ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

Von Károly TANDORI

EINE ABSCHÄTZUNG ÜBER DIE TOEPLITZSCHEN MITTEL VON ORTHOGONALREIHEN

Summary. Let $T = (t_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ be a regular Toeplitz matrix and $\Omega(K)$, $K \in [1,\infty$ be a family of all systems $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ of functions defined on $(0,1)$ such that $|\varphi_k(x)| \leqslant K$ for $x \in (0,1)$ and $k=0,1,2,\ldots$

Let $t_n(a,\varphi,x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l\varphi_l(x)\right)$ for $a \in l_2$ and let

$$\|a;K;T\| = \sup_{\varphi\in\Omega(K)}\left(\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} t_n^2(a,\varphi,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then for every $K \in (1,\infty)$ there exists a constant C such that $\|a;1;T\| \geqslant C\|a,K,T\|$ for every $a \in l_2$.

Herrn Professor Zygmunt Zahorski zum 70 Geburtstag gewidmet

1. Es sei $T = \|t_{n,k}\|_{n,k=0}^{\infty}$ eine reguläre Toeplitzsche Matrix; d.h. es gelten

(i) $$\lim_{n\to\infty} t_{n,k} = 0 \qquad (k = 0,1,\ldots),$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k} = 1,$$

(iii) $$\sum_{k=0}^{\infty} |t_{n,k}| \leqslant C_1 \qquad (n = 0,1,\ldots).$$

($C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen positive Konstanten).

Für ein K $(1 \leqslant K \leqslant \infty)$ bezeichnen wir mit $\Omega(K)$ die Klasse jener orthonormierten Systeme $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_0^{\infty}$ im Intervall $(0,1)$, für die

$$|\varphi_k(x)| \leqslant K \qquad (x \in (0,1);\ k = 0,1,\ldots)$$

ist. ($\Omega(\infty)$ ist also die Klasse aller orthonormierten Systeme φ in $(0,1)$; im Falle $\varphi \in \Omega(1)$ gilt weiterhin $|\varphi_k(x)| = 1$ $(k = 0,1,\dots)$ fast überall in $(0,1)$). Offensichtlich gilt

$$\Omega(1) \subsetneq \Omega(K) \subsetneq \Omega(\infty) \qquad (1 < K < \infty). \tag{1}$$

Es seien $a = \{a_k\}_0^\infty \in l^2$ und $\varphi \in \Omega(\infty)$. Auf Grund von (iii) konvergieren die Summen

$$\sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l \varphi_l(x)\right) \qquad (n = 0,1,\dots)$$

in der Metrik von $L^2(0,1)$; ihre Summen bezeichnen wir mit $t_n(a;\varphi;x)$ $(n = 0,1,\dots)$. Offensichtlich gilt

$$t_n(a;\varphi;x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l \varphi_l(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{n,l}\right) a_k \varphi_k(x)$$
$$(n = 0,1,\dots)$$

fast überall in $(0,1)$.

Für eine Folge $a \in l^2$ und für ein K $(1 \leqslant K \leqslant \infty)$ setzen wir

$$\|a;K;T\| = \sup_{\varphi \in \Omega(K)} \left\{\int_0^1 \sup_{n \geqslant 0} t_n^2(a;\varphi;x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

Auf Grund von (1) gilt

$$\|a;1;T\| \leqslant \|a;K;T\| \leqslant \|a;\infty;T\| \qquad (a \in l^2,\ 1 \leqslant K \leqslant \infty).$$

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz. Es sei $1 < K < \infty$. Dann gibt es eine von der Folge a unabhängige endliche positive Zahl $C(K)$ derart, dass für jede Folge $a \in l^2$

$$\|a;1;T\| \geqslant C(K)\,\|a;K;T\|.$$

Bemerkung. Diese Abschätzung hat der Verfasser vorherig im Falle $t_{n,n} = 1$, $t_{n,k} = 0$ $(k \neq n)$ $(n = 0,1,\dots)$ bewiesen [1].

Es ist ein offenes Problem, ob die Behauptung des Satzes auch im Falle $K = \infty$ gültig ist.

2. Als Vorbereitung zum Beweis des Satzes schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Es seien $a \in l^2$ und $\varphi \in \Omega\ (\infty)$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

nennen wir T-summierbar fast überall in (0,1), wenn $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(a;\varphi;x)$ fast überall in (0,1) existiert. Für ein K $(1 \leqslant K \leqslant \infty)$ bezeichnen wir mit $M(K,T)$ die Klasse der Folgen a, für welche die Reihe (2) in (0,1) fast überall T-summierbar ist.

Es sei $1 \leqslant K \leqslant \infty$. Für eine Folge $a \in l^2$ setzen wir

$$D(a;K;T;N_1,N_2) = \sup_{\varphi\in\Omega(K)} \left\{ \int_0^1 \sup_{\substack{n_1,n_2 \\ N_1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant N_2}} (t_{n_2}(a;\varphi;x) - t_{n_1}(a;\varphi;x))^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(0 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant \infty).$$

Die folgenden Sätze sind bekannt.

Satz A [2]. Im Falle $1 < K < \infty$ gilt $M(1;T) = M(K,T)$.

Satz B [2]. Es seien $1 \leqslant K \leqslant \infty$ und $a \in l^2$. Ist

$$\lim_{N\to\infty} D(a;K;T;N,\infty) = 0,$$

so gilt $a \in M(K,T)$.

Satz C [2]. Es seien $1 \leqslant K \leqslant \infty$ und $a \in l^2$. Ist

$$\lim_{N\to\infty} D(a;K;T;N,\infty) \neq 0,$$

so besteht $a \notin M(K,T)$.

Auf Grund der Definitionen von $\|\cdot\,;K;T\|$ und $D(\cdot\,;K;T;N_1,N_2)$ ergeben sich unmittelbar die folgenden Ungleichungen:

$$\|a+b;K;T\| \leqslant \|a;K;T\| + \|b;K;T\| \qquad (a,b \in l^2;\ 1 \leqslant K \leqslant \infty),$$

$$D(a+b;K;T;N_1,N_2) \leqslant D(a;K;T;N_1,N_2) + D(b;K;T;N_1,N_2)$$
$$(a,b \in l^2;\ 0 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant \infty),$$

$$D(a;K;T;N_1,N_2) \leqslant 2\|a;K;T\| \quad (a \in l^2;\ 1 \leqslant K \leqslant \infty;\ 0 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant \infty).$$

Fur eine Folge $a = \{a_k\}_1^\infty$ und für ganze Zahlen $N_1, N_2 (0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \infty)$ setzen wir

$$a(N_1, N_2) = \{0, \ldots, 0, a_{N_1}, \ldots, a_{N_2}, 0, \ldots\}.$$

<u>Hilfesatz I.</u> Für jeden Folge $a \in l^2$ und für jedes K $(1 \leq K \leq \infty)$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \|a(0,N);K;T\| = \|a;K;T\|.$$

Beweis des Hilfesatzes I. Zunächst ist zu beachten, dass für jede Folge $b \in l^2$ und für jedes $\varphi \in \Omega\,(\infty)$

$$\max_{0\leq n\leq M} |t_n(b;\varphi;x)| \nearrow \sup_{n\geq 0} |t_n(b;\varphi;x)|, \quad (M\nearrow\infty).$$

fast überall in $(0,1)$, und somit

$$\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M} t_n^2(b;\varphi;x)dx \nearrow \int_0^1 \sup_{n\geq 0} t_n^2(b;\varphi;x)dx \quad (M\nearrow\infty).$$

Fall $\|a;K;T\| < \infty$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\varphi \in \Omega\ (K)$ mit

$$\left\{\int_0^1 \sup_n t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} > \|a;K;T\| - \varepsilon .$$

und so existiert eine positive ganze Zahl M_0 mit

$$\left\{\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M_0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} > \|a;K;T\| - \varepsilon . \tag{3}$$

Da für jede nichtnegative ganze Zahl N

$$t_n(a(N,\infty);\varphi;x) = \sum_{k=N}^{\infty}\left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{l,k}\right)a_k\varphi_k(x) \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

gilt, besteht die Ungleichung

$$\int_0^1 t_n^2(a(N,\infty);\varphi;x)dx \leqslant C_1^2 \sum_{k=N}^{\infty} a_k^2 \quad (n = 0,1,\ldots) \tag{4}$$

auf Grund von (iii). Wegen $a \in l^2$ gibt es also eine positive ganze Zahl N_0, für die

$$\left\{\int_0^1 t_n^2(a(N,\infty);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} < \frac{C_1}{M_0+1}\varepsilon \quad (n = 0,1,\ldots;\ N \geqslant N_0). \tag{5}$$

Aus den Ungleichungen

$$\max_{0\leqslant n\leqslant M_0} |t_n(a;\varphi;x)| \leqslant \max_{0\leqslant n\leqslant M_0} |t_n(a(0,N);\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{M_0} |t_\vartheta(a(N+1,\infty);\varphi;x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} |t_n(a(0,N);\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{M_0} |t_\vartheta(a(N+1,\infty);\varphi;x)|,$$

$$\max_{0\leqslant n\leqslant M_0} |t_n(a(0,N);\varphi;x)| \leqslant \max_{0\leqslant n\leqslant M_0} |t_n(a;\varphi;x) + \sum_{\vartheta=0}^{M_0} t_\vartheta(a(N+1,\infty);\varphi;x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} |t_n(a;\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{M_0} |t_\vartheta(a(N+1,\infty);\varphi;x)|$$

erhalten wir

$$\|a;K;T\| - \varepsilon \leqslant \left\{\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} t_n^2(a(0,N);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} + C_1\varepsilon,$$

$$\left\{\int_0^1 \max_{0\leqslant n\leqslant M_0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} + C_1\varepsilon \leqslant \|a;K;T\| + C_1\varepsilon$$

auf Grund von (3) und (5) für $N \geq N_0$. Daraus folgt

$$\|a;K;T\| - (1+C_1)\varepsilon < \|a(0,N);K;T\| =$$

$$= \lim_{M_0\to\infty}\left\{\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M_0} t_n^2(a(0,N);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} < \|a;K;T\| + C_1\varepsilon$$

für $N \geq N_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\lim_{N\to\infty}\|a(0,N);K;T\| = \|a;K;T\|$.

Fall $\|a;K;T\| = \infty$. Es sei $L > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\varphi \in \Omega(K)$ mit

$$\left\{\int_0^1 \sup_{n\geq 0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} > L,$$

und so gibt es eine positive ganze Zahl M_0 mit

$$\left\{\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M_0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} > L. \tag{6}$$

Weiterhin existiert nach (4) eine positive ganze Zahl N mit

$$\left\{\int_0^1 t_n^2(a(N,\infty);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} < \frac{L}{2(M_0+1)} \qquad (n = 0,1,\dots;N \geq N_0). \tag{7}$$

Aus der Ungleichung

$$\max_{0\leq n\leq M_0}|t_n(a;\varphi;x)| \leq \max_{0\leq n\leq M}|t_n(a(0,N);\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{M_0} t_\vartheta(a(N+1;\infty);\varphi;x)| \leq$$

$$\leq \sup_{n\geq 0}|t_n(a(0,N);\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{M_0}|t_\vartheta(a(N+1,\infty);\varphi;x)|$$

erhalten wir

$$L \leq \left\{\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M_0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_0^1 \max_{0\leq n\leq M_0} t_n^2(a(0,N);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} + \frac{L}{2}$$

auf Grund von (6) und (7) für $N \geqslant N_o$, woraus sich

$$\|a(0,N);K;T\| > \frac{L}{2} \quad (N > N_o)$$

ergibt. Da $L > 0$ beliebig war, erhalten wir tatsächlich

$$\lim_{N\to\infty} \|a(0,N);K;T\| = \infty .$$

Damit ist Hilfssatz I bewiesen.

Hilfssatz II Es seien $1 \leqslant K \leqslant \infty$ und $a \in l^2$. Dann gilt

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\right\}^{1/2} \leqslant \|a;K;T\| \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| .$$

Beweis des Hilfssatzes II. Es sei N_o eine beliebige positive ganze Zahl. Für ein System $\varphi \in \Omega\ (K)$ gilt

$$\left\{\sum_{k=0}^{N_o} a_k^2\left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{n,l}\right)^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_0^1 t_n^2(a(0,N_o);\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leqslant \|a(0,N_o);K;T\|$$

$$(n = 0,1,\dots).$$

Wegen (ii) folgt daraus

$$\left\{\sum_{k=0}^{N_o} a_k^2\right\}^{1/2} \leqslant \|a(0,N_o);K;T\| \qquad (N_o = 1,2,\dots),$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes I ergibt sich endlich

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\right\}^{1/2} \leqslant \lim_{N\to\infty} \|a(0,N);K;T\| = \|a;K;T\| .$$

Weiterhin gilt für jedes $\varphi \in \Omega\ (K)$

$$|t_n(a;\varphi;x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\varphi_k(x)| \left|\sum_{l=k}^{\infty} t_{n,l}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0} |a_k\varphi_k(x)|\left(\sum_{l=k}^{\infty} |t_{n,l}|\right) \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\varphi_k(x)|$$

$(x \in (0,1);\ n = 0,1,\dots)$ wegen (iii). So folgt

$$\left\{\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| .$$

und da $\varphi \in \Omega(K)$ beliebig war, erhalten wir auch

$$\|a;K;T\| \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| .$$

<u>Hilfesatz III</u>. Es seien $a \in l^2$ und $1 \leqslant K \leqslant \infty$. Gilt für eine nichtnegative ganze Zahl N $D(a;K;T;N,\infty) < \infty$, so ist $\|a;K;T\| < \infty$

Beweis des Hilfesatzes III. Es sei $\varphi \in \Omega(K)$. Dann gilt

$$|t_n(a;\varphi;x)| \leqslant |t_n(a;\varphi;x) - t_N(a;\varphi;x)| + |t_N(a;\varphi;x)| ,$$

woraus sich

$$\sup_{n\geqslant 0} |t_n(a;\varphi;x)| \leqslant \sup_{\substack{n_1,n_2 \\ N\leqslant n_1 \leqslant n_2}} |t_{n_2}(a;\varphi;x) - t_{n_1}(a;\varphi;x)| + |t_N(a;\varphi;x)|$$

und demzufolge

$$\sup_{n\geqslant 0} |t_n(a;\varphi;x)| \leqslant \sup_{\substack{n_1,n_2 \\ N\leqslant n_1 \leqslant n_2}} |t_{n_2}(a;\varphi;x) - t_{n_1}(a;\varphi;x)| + \sum_{\vartheta=0}^{N} |t_\vartheta(a;\varphi;x)|$$

ergibt. Durch Integrieren folgt

$$\left\{\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} t_n^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_0^1 \sup_{\substack{n_1,n_2 \\ N\leqslant n_1 \leqslant n_2}} (t_{n_2}(a;\varphi;x) - t_{n_1}(a;\varphi;x))^2 dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ \sum_{\vartheta=0}^{N} \left\{\int_0^1 t_\vartheta^2(a;\varphi;x)dx\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant D(a;K;T;N,\infty) + NC_1 \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\right\}^{1/2}$$

auf Grund von (iii), und daraus bekommen wir endlich

$$\|a;K;T\| \leqslant D(a;K;T;N,\infty) + NC_1\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\right\}^{1/2}.$$

3. Der Beweis des Satzes wird indirekt geführt

Unter der Annahme, dass die Behauptung des Satzes nicht zutrifft

a) gibt es eine Zahl K_0 $(1 < K_0 < \infty)$ derart, dass für jede positive Zahl M eine Folge $a \in l^2$ mit

$$\|a;1;T\| < \|a;K_0;T\| \,/\, M$$

existiert.

Wir zeigen, dass im Falle a)

b) für jede nichtnegative ganze Zahl N und für jede positive Zahl M eine Folge $a \in l^2$ mit

$$\|a(N,\infty);1;T\| < \|a(N,\infty);K_0;T\| \,/M$$

existiert.

Im entgegengesetzen Fall gibt es nämlich eine nichtnegative ganze Zahl N_0 und eine positve Zahl M_0 derart, dass

$$\|a(N_0,\infty);1;T\| \geqslant \|a(N_0,\infty);K_0;T\| \,/M_0 \tag{8}$$

für jede Folge $a \in l^2$ besteht. Auf Grund des Hilfssatzes II und der Ungleichung (8) folgt aber, dass für jede Folge $a \in l^2$

$$\|a;K_0;T\| \leqslant \|a(0,N_0-1);K_0;T\| + \|a(N_0,\infty);K_0;T\| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k| + \|a(N_0,\infty);1;T\| M_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sqrt{N_0}\left\{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k^2\right\}^{1/2} + \|a(N_0,\infty);1;T\| M_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sqrt{N_0}\,\|a;1;T\| + \|a(N_0,\infty);1;T\| M_0. \tag{9}$$

Auf Grund des Hilfesatzes II gilt

$$\|a(N_o,\infty);1;T\| \leq \|a;1;T\| + \|a(0,N_o-1);1;T\| <$$

$$< \|a;1;T\| + C_1 \sum_{k=0}^{N_o-1} |a_k| \leq \|a;1;T\| + C_1 \sqrt{N_o} \left\{\sum_{k=0}^{N_o-1} a_k^2\right\}^{1/2} <$$

$$< (1 + C_1 \sqrt{N_o})\|a;1;T\| .$$

Daraus und aus (9) bekommen wir

$$\|a;K_o;T\| < C_2 \|a;1;T\|$$

für jede Folge $a \in l^2$ mit der Konstante $C_2 = C_1(2+C_1\sqrt{N_o})\sqrt{N_o}<\infty$, die von der Folge a unabhängig ist. Diese Ungleichung widerspricht nun aber der Voraussetzung a). Damit haben wir gezeigt, dass unter der Voraussetzung a) auch b) gilt.

Durch vollständige Induktion definieren wir eine Folge $(0=)N_o< \dots <N_m< \dots$ ganzer Zahlen und eine Folge $b = \{b_k\}_o^\infty$ derart, dass für jeden Index $m(=0,1,\dots)$ gelten:

$$\text{c)} \quad \|b(N_m,N_{m+1}-1);K_o;T\| = (m+1) + C_1 N_m \left\{\sum_{k=0}^{N_m-1} b_k^2\right\}^{1/2} .$$

$$\text{d)} \quad \|b(N_m,N_{m+1}-1);1;T\| < \frac{1}{(m+1)^2}.$$

Auf Grund der Voraussetzung a) gibt es eine Folge $a^{(1)} \in l^2$ mit

$$\|a^{(1)};1;T\| < \|a^{(1)};K_o;T\|.$$

Weiterhin gibt es auf Grund des Hilfesatzes I eine positive ganze Zahl N_1 mit

$$\|a^{(1)}(0,N_1-1);1;T\| \leq \|a^{(1)}(0,N_1-1);K_o;T\| ;$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\|a^{(1)}(0,N_o-1);K_o;T\| = 1$ annehmen. Es sei $b_k = a_k^{(1)}$ $(k = 0,\dots,N_1-1)$. Offensichtlich sind c), d) im Falle $m = 0$ erfüllt.

Es sei m_o eine nichtnegative ganze Zahl. Wir nehmen an, dass die Zahlen b_k $(k = 0,\dots,N_{m_o+1}-1)$ schon, derart definiert sind, dass c) und

d) für $m = 0,\dots,m_0$ erfüllt sind. Auf Grund von b) gibt es dann eine Folge $a^{(m_0+1)} \in l^2$ mit

$$\|a^{(m_0+1)}(N_{m_0+1},\infty);1;T\| < \|a^{(m_0+1)}(N_{m_0+1},\infty);K_0;T\|/\varrho_{m_0+1},$$

wobei $\varrho_{m_0+1} = (m+1)^2((m_0+1) + C_1\sqrt{N_{m_0+1}}\left\{\sum_{k=0}^{N_{m_0+1}-1} b_k^2\right\}^{1/2})$ ist.

Auf Grund des Hilfssatzes I existiert eine ganze Zahl $N_{m_0+2}(> N_{m_0+1})$ mit

$$\|a^{(m_0+1)}(N_{m_0+1},N_{m_0+2}-1);1;T\| < \|a^{(m_0+1)}(N_{m_0+1},N_{m_0+2}-1);K_0;T\|/\varrho_{m_0+1}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$\|a^{(m_0+1)}(N_{m_0+1},N_{m_0+2}-1);K_0;T\| = (m_0+1) + C_1\sqrt{N_{m_0+1}}\left\{\sum_{k=0}^{N_{m_0+1}-1} b_k^2\right\}^{1/2}$$

annehmen. Wir setzen $b_k = a_k^{(m_0+1)}$ $(k = N_{m_0+1},\dots,N_{m_0+2}-1)$. Es ist klar, dass c) und d) auch für $m = m_0+1$ erfüllt sind. Durch dieses induktive Verfahren sind dann die Folgen $\{N_m\}_0^\infty$ und b mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Aus b) folgt auf Grund des Hilfssatzes II

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2\right\}^{1/2} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=N_m}^{N_{m+1}-1} b_k^2\right\}^{1/2} < \sum_{m=0}^{\infty}\|b(N_m,N_{m+1}-1);1;T\| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2} < \infty$$

d.h. es gilt $b \in l^2$.

Es seien $\varepsilon > 0$ beliebig und m_0 eine positive ganze Zahl mit $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$. Dann gilt für $N \geqslant N_{m_0}$

$$D(b;1;T;N,\infty) \leqslant D(b(0,N_{m_0}-1);1;T;N,\infty) +$$

$$+ \sum_{m=m_0}^{\infty} D(b(N_m,N_{m+1}-1);1;T;N,\infty) \leqslant$$

$$\leq D(b(0,N_{m_0}-1);1;T;N,\infty) + 2\sum_{m=m_0}^{\infty} \|b(N_m,N_{m+1}-1);1;T\| \leq$$

$$\leq D(b(0,N_{m_0}-1);1;T;N,\infty) + 2\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2} \leq$$

$$\leq D(b(0,N_{m_0}-1);1;T;N,\infty) + 2\frac{1}{m_0} < D(b(0,N_{m_0}-1);1;T;N,\infty) + 2\varepsilon, \quad (10)$$

auf, Grund von d).

Es sei $\varphi \in \Omega(1)$. Dann ist

$$t_{n_2}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x) - t_{n_1}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_{m_0}-1} b_k\varphi_k(x)\left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{n_2,l} - \sum_{l=k}^{\infty} t_{n_1,l}\right)$$

für jedes n_1, n_2 $(n_1 \leq n_2)$, und so gilt

$$\sup_{\substack{n_1,n_2\\ N\leq n_1\leq n_2}} |t_{n_2}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x) - t_{n_1}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N_{m_0}-1} |b_k\varphi_k(x)| \sup_{\substack{n_1,n_2\\ N\leq n_1\leq n_2}} \left|\sum_{l=k}^{\infty} t_{n_2,l} - \sum_{l=k}^{\infty} t_{n_1,l}\right|,$$

woraus folgt, dass

$$\left\{\int_0^1 \sup_{\substack{n_1,n_2\\ N\leq n_1\leq n_2}} (t_{n_2}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x) - t_{n_1}(b(0,N_{m_0}-1);\varphi;x))^2\, dx\right\}^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{N_{m_0}}\left\{\sum_{k=0}^{N_{m_0}-1} b_k^2\left(\sup_{\substack{n_1,n_2\\ N\leq n_1\leq n_2}} \left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{n_2,l} - \sum_{l=k}^{\infty} t_{n_1,l}\right)^2\right)\right\}^{1/2}$$

für jedes System $\varphi \in \Omega(1)$ gilt. Daraus erhalten wir

$$D(b(0,N_{m_o}-1);1;T;N\,\infty) < \sqrt{N_{m_o}}\left\{\sum_{k=0}^{N_{m_o}-1} b_k^2 \sup_{\substack{n_1,n_2\\ N\leq n_1<n_2}} \left(\sum_{l=k}^{\infty} t_{n_2,l} - \sum_{l=k}^{\infty} t_{n_1,l}\right)^2\right\}^{1/2} \longrightarrow 0$$

$(N \longrightarrow \infty)$ auf Grund von (i) und (ii). Auf Grund dieser Relation gibt es eine positive ganze Zahl $\bar{N}_o$ derart, dass

$$D(b(0,N_{m_o}-1);1;T;N,\infty) < \varepsilon/\sqrt{N_{m_o}} \qquad (N \geq \bar{N}_o)$$

gilt. Daraus und aus (10) folgt

$$D(b;1;T;N,\infty) < 3\varepsilon \qquad (N \geq N_o = \max(N_{m_o},\bar{N}_o)).$$

also $\lim\limits_{N\to\infty} D(b;1;T;N,\infty) = 0$, und so haben wir

$$b \in M(1,T) \tag{11}$$

auf Grund des Satzes B.

Es sei m_o eine positive ganze Zahl. Dann gilt

$$\|b(0,N_{m_o+1}-1);K_o;T\| \geq \|b(N_{m_o},N_{m_o+1}-1);K_o;T\| - \|b(0,N_{m_o}-1);K_o;T\|. \tag{12}$$

Auf Grund des Hilfssatz II ist

$$\|b(0,N_{m_o}-1);K_o;T\| \leq C_1 \sum_{k=0}^{N_{m_o}-1} |b_k| \leq C_1\sqrt{N_{m_o}}\left\{\sum_{k=0}^{N_{m_o}-1} b_k^2\right\}^{1/2},$$

und auf Grund von c) und (12) ergibt sich daraus

$$\|b(0,N_{m_o+1}-1);K_o;T\| \geq m_o+1 \qquad (m_o = 1,2,\ldots).$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes I folgt also $\|b;K_o;T\| = \infty$.
Endlich erhalten wir auf Grund des Hilfssatzes III

$$D(b;K_o;T;N,\infty) = \infty \quad (N = 0,1,\ldots).$$

Somit ist $\lim\limits_{N\to\infty} D(b;K_o;T;N,\infty) \neq 0$, und nach Satz C gilt $b \in M(K_o,T)$, was wegen Satz A der Relation (11) widerspricht.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

[1] Tandori K.: Gewisse Abschätzungen über beschränkte orthonormierte Systeme, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 34 (1979), 85-90.

[2] Tandori K.: Über die beschränkten orthonormierten Systeme. (Russisch). (Unter Erscheinung in Lusinschen Festschriften, Moskau, 1983).

Recenzent: Doc. dr hab. Roman Ger

Wpłynęło do redakcji: 22.XI.1983 r.

OSZACOWANIE ŚREDNICH TOEPLITZA W SZEREGACH ORTOGONALNYCH

S t r e s z c z e n i e

Niech $T = (t_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ będzie regularną macierzą Toeplitza, zaś $\Omega(K)$, $K \in [1,\infty]$ rodziną wszystkich układów $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ funkcji zdefiniowanych na $(0,1)$ takich, że $|\varphi_k(x)| \leq K$ dla $x \in (0,1)$ i $k = 0,1,2,\ldots$.

Niech $t_n(a,\varphi,x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l\varphi_l(x)\right)$ dla $a \in l_2$ oraz niech

$$\|a;K;T\| = \sup_{\varphi\in\Omega(K)} \left(\int_0^1 \sup_{n\geq 0} t_n^2(a,\varphi,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Autor dowodzi, że dla $K \in (1,\infty)$ istnieje stała C, taka, że

$$\|a;1;T\| \geq C\|a,K,T\| \quad \text{dla wszystkich} \quad a \in l_2.$$

ОЦЕНКА СРЕДНИХ ТЕПЛИЦА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Р е з ю м е

Пусть $T = (t_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ регулярная матрица Теплица а $\Omega(K)$, $K \in [1,\infty]$ семейство всех ортонормальных систем $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ функций на $(0,1)$ таких, что $|\varphi_k(x)| \leq K$ для всех $x \in (0,1)$ и $k = 0,1,2,\ldots$ Положим

$$t_n(a,\varphi,x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l\varphi_l(x)\right) \text{ для } \quad a \in l_2$$

$$\|a;K;T\| = \sup_{\varphi\in\Omega(K)} \left(\int_0^1 \sup_{n\geq 0} t_n^2(a,\varphi,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Автором доказана следующая теорема: Если $K \in (1,\infty)$, то существует постоянная C такая, что неравенство

$$\|a,1,T\| \geq C\|a,K,T\|$$

справедливо для всех $a \in l_2$.