ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

J. TIMMLER

PEWNA WŁASNOŚĆ SZEREGÓW WEKTOROWYCH W PRZESTRZENI R^3

Streszczenie. W pracy wykazano prawdziwość twierdzenia: dla każdego ciągu wektorów $\{v_k\}$, $k = 1,2,3,\ldots$ przestrzeni R^3 takiego, że $|v_k| \to 0$ istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że szereg $\sum \varepsilon_k v_k$ jest zbieżny.

WSTĘP

B. Riemann pierwszy zwrócił uwagę na łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 0.1

Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych v_k oraz dowolnie obrana liczba q. Jeżeli

i) $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 0, \qquad v_k > 0$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = \infty$,

to istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot v_k = q$$

A. Dvoretzky i Ch. Hanani w pracy [2] dla ciągów liczb zespolonych udowodnili nie tak ogólne jak twierdzenie 0.1.

Twierdzenie 0.2

Jeżeli wyrazy ciągu liczb zespolonych spełniają warunek $v_k \to 0$, to ciąg mnożników $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ można dobrać tak, by szereg

$$\sum_{k=1} \varepsilon_k v_k$$

był zbieżny.

Dowód powyższego twierdzenia łatwo wynika z ciekawej własności wektorów w przestrzeni R^2. Własność ta w pracy [2] sformułowana jest w postaci następującego lematu.

Lemat 0.3

Dla dowolnego ciągu wektorów (skończonego)

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots, v_m$$

przestrzeni R^2 można dobrać ciąg mnożników

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_m,$$

gdzie $\varepsilon_k = \pm 1$ $k = 1,2,\ldots,m$ tak, by

$$\left| \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k v_k \right| \leqslant \sqrt{3} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |v_k|, \qquad r = 1,2,\ldots,m$$

W pracy [1] E. Calabi i A. Dvoretzky podają do wiadomości, że stała $\sqrt{3}$, spełniająca lemat 0.3, jest najlepsza, tzn. nie można jej zastąpić inną stałą, mniejszą od liczby $\sqrt{3}$. Ponadto, autorzy pracy [1] informują, że w przestrzeni R^n $n \geqslant 3$, własność podana w lemacie 0.3 jest im nieznana.

Celem niniejszej pracy jest uogólnienie lematu 0.3 na przestrzeń R^3.

Rozważymy naroże trójścienne, którego krawędziami są półproste l_1, l_2, l_3, o wspólnym początku O.

Lemat 1.1

Jeżeli półproste l_1, l_2, l_3 o początku w punkcie O są krawędziami naroża trójściennego o kątach płaskich, mniejszych od $\pi/2$, a półprosta l o początku w punkcie O leży na jednej ze ścian tego naroża, to

$$\sphericalangle(l, l_2) \leqslant \max(\sphericalangle(l_1, l_2); \sphericalangle(l_2, l_3), \sphericalangle(l_1, l_3)), \tag{1.1}$$

gdzie $i = 1,2,3$.

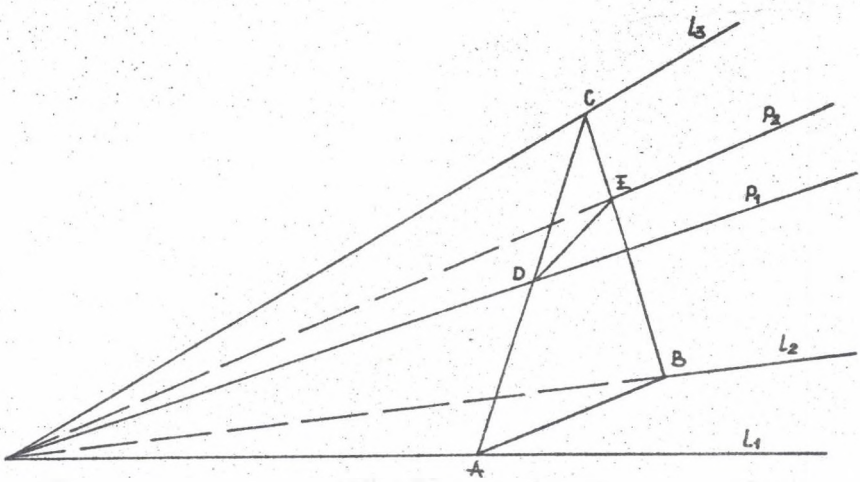
Prosty dowód lematu pomijamy.

Lemat 1.2

Jeżeli półproste l_1, l_2, l_3 o początku w punkcie O są krawędziami naroża trójściennego, o kątach płaskich mniejszych od $\pi/2$, a półproste p_1, p_2 o początku w punkcie O leżą na ścianach tego naroża, to

$$\sphericalangle(p_1, p_2) \leqslant \max(\sphericalangle(l_1, l_2), \sphericalangle(l_2, l_3), \sphericalangle(l_1, l_3)). \tag{1.2}$$

Rozpatrzmy naroże trójścienne jak na rysunku



Rys. 1.1

Stosując lemat 1.1 kolejno do naroży trójściennych, utworzonych przez punkty ODEC oraz przez punkty OABC, dostajemy tezę lematu 1.2.

Niech dane będą wektory

$$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1). \tag{1.3}$$

Wektor

$$r_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}$$

łączy wierzchołek czworościanu utworzonego przez wektory (1.3) ze środkiem ciężkości trójkąta podstawy tego czworościanu.

Łatwo sprawdzić, że

$$\cos \sphericalangle(e_i, r_s) > \frac{1}{2}, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.4}$$

Ponadto, wektor

$$w_{ij} = e_i + e_j, \qquad i \neq j, \qquad i,j = 1,2,3$$

z wektorem r_s tworzę kąt mniejszy od $\pi/3$, ponieważ

$$\cos \sphericalangle(w_{ij}, r_s) > 1/2 \tag{1.5}$$

Twierdzenie 1.3

Jeżeli półproste p_1, p_2, p_3, p_4 o początku w środku układu kartezjańskiego należą do jednego z oktantów przestrzeni R^3, to istnieją takie dwie półproste p_i, p_j, że

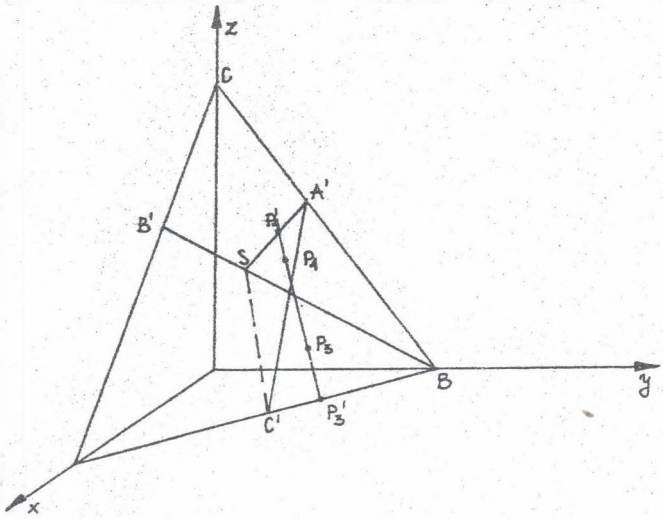
$$\cos\sphericalangle(p_i, p_j) > 1/2 \qquad i \neq j, \quad i,j = 1,2,3,4$$

Dowód

Załóżmy, co nie zmniejsza ogólności, że półproste p_i, $i = 1,2,3,4$ należą do pierwszego oktantu. Płaszczyzna

$$x + y + z = 1,$$

ograniczona płaszczyznami układu Oxyz, wyznacza trójkąt równoboczny ABC, jak na rysunku 1.2.



Rys. 1.2

Środek ciężkości trójkąta ABC oznaczymy przez S. Odcinki SA, SC, SB dzielą trójkąt na trzy deltoidy AB'SC', BC'SA', CA'SA'. Na podstawie założenia o półprostych p_i, $i = 1,2,3,4$ widać, że przynajmniej dwie z nich przebijają jeden z trzech deltoidów. Niech półproste p_3, p_4 przebijają deltoid BC'SA'. Punkty przebicia płaszczyzny deltoidu BC'SA' półprostymi p_3, p_4 oznaczymy P_3, P_4. Jeżeli punkty P_3, P_4 leżą po tej samej stronie przekątnej C'A' lub przekątnej SB deltoidu BC'SA', to z lematu 1.2 wynika prawdziwość tezy naszego twierdzenia.

Ostatni przypadek, tj. zaprzeczenie czterech dotychczas rozpatrzonych, daje, że punkty P_3, P_4 leżą w dwu różnych "ćwiartkach" deltoidu BC'SA', np.

punkty P_3, P_4 leżą jak na rysunku 1.2. Wtedy odcinek P_3, P_4 przedłużamy do przecięcia się z bokami SA', $C'B$, otrzymując odcinek P_3' P_4'. Widać, że

$$\sphericalangle(P_3' O\ P_4) < \sphericalangle(P_3'\ O\ P_4'). \tag{1.6}$$

Stosując lemat 2.1 do naroża trójścinnego, którego krawędziami są półproste OS, OP_4, OA, otrzymamy

$$\sphericalangle(P_3'\ OP_4') \leqslant \max(\sphericalangle SOA', \sphericalangle SO\ P_4', \sphericalangle A'O\ P_4'). \tag{1.7}$$

Ponadto

$$\sphericalangle P_4'\ OA' \leqslant \max(\sphericalangle C'OB, \sphericalangle C'OA', \sphericalangle A\ OB),$$

więc

$$\sphericalangle P_4'\ OA \leqslant \pi/3. \tag{1.8}$$

Analogicznie w narożu trójściennym, którego krawędziami są półproste OC', OS, OB, na podstawie lematu 1.1 otrzymamy

$$\sphericalangle SOP_4 \leqslant \max(\sphericalangle SOC', \sphericalangle BOC', \sphericalangle SOB), \tag{1.9}$$

zaś

$$\sphericalangle BOC' \leqslant \pi/3.$$

Na podstawie (1.7), (1.8), (1.9), wiedząc, że $\sphericalangle$ SOA jest mniejszy od $\pi/3$, dostajemy

$$\sphericalangle P_3'\ OP_4' \leqslant \pi/3. \tag{1.10}$$

Z (1.10) i (1.6) wynika prawdziwość tezy. Q ed.
Z twierdzenia 1.3 bezpośrednio wynika

<u>Twierdzenie 1.4</u>

W ciągu wektorów

$$v_1, v_2, \ldots, v_{13}$$

przestrzeni R^3 istnieje taka para wektorów v_i, v_j, $i \neq j$, że

$$\cos \sphericalangle(v_i v_j) \geqslant 1/2.$$

Dowód twierdzenia pomijamy.

Oznaczmy przez

$N^*(3)$ najmniejszą ilość wektorów w przestrzeni R^3, spełniającą warunki twierdzenia 1.4.

Uwaga

Tylko w dwu przypadkach znana jest najmniejsza liczba N^*. Mianowicie, w przestrzeni R^1 $N^*(1) = 2$, zaś dla R^2 $N^*(2) = 3$. Wyznaczenie liczby $N^*(3)$ (dla przestrzeni R^3) wymagałoby długich choć elementarnych poszukiwań. Oszacowanie z dołu liczby $N^*(3)$ można otrzymać rozważając 20-ścian foremny. Sześć wektorów łączących środek dwudziestościanu z sześcioma wierzchołkami najbliższymi do jednego z nich tworzy 15 kątów. Kosinusy tych kątów przyjmują tylko dwie wartości $1/\sqrt{5}$ lub $-1/\sqrt{5}$.

Ponieważ $1/\sqrt{5} < 1/2$, więc stąd wynika, że

$$N^*(3) > 6. \tag{2.1}$$

Wyznaczenie liczby $C(3)$.

Z geometrii elementarnej wiadomo, że dla dwu wektorów a, b z przestrzeni R^n prawdziwa jest nierówność

$$\max(|a|,|b|) \geqslant \begin{cases} |a-b| & \text{gdy } \sphericalangle(a,b) \in [0\ \ \pi/3] \\ |a+b| & \text{gdy } \sphericalangle(a,b) \in [2\pi/3, \pi] \end{cases} \tag{2.1}$$

Twierdzenie 2.1

Dla każdego skończonego ciągu

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \tag{2.2}$$

wektorów przestrzeni R^3, o długościach nie większych niż 1, istnieje ciąg

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m \tag{2.3}$$

mnożników równych 1 lub - 1 taki, że

$$\left| \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k v_k \right| < C(3); \qquad r = 1,2,3,\ldots,m \tag{2.4}$$

W dowodzie twierdzenia 2.1 ciąg mnożników ε_k nie jest określony bezpośrednio. W celu wyraźnego uwidocznienia tego, dowód twierdzenia dzielimy na trzy części:

a) konstrukcja skończonego ciągu wektorów,
b) konstrukcja ciągów (skończonych) mnożników,
c) dowód pewnej nierówności, która stanowi tazę twierdzenia.

Dowód twierdzenia 2.1

a) Załóżmy, że w R^3 dany jest ciąg

$$v_1, v_2, \ldots, v_m, \qquad m \geqslant 13,$$

w którym długości wektorów są nie większe od 1.
Określimy indukcyjnie ciągi wektorów

$$v_{sk}, \qquad s = 0,1,2,\ldots, \quad m-12, \quad k = 1,2,\ldots,m-s$$

gdzie

$$|v_{sk}| \leqslant 1$$

w następujący sposób

i) przyjmujemy

$$v_{ok} = v_k, \qquad k = 1,2,\ldots,m \tag{2.5}$$

więc $|v_{ok}| \leqslant 1$.

ii) jeżeli jest określony ciąg

$$v_{sk}$$

$$|v_{sk}| \leqslant 1, \quad 0 < s < m - 12, \quad k = 1,2,\ldots,m-s \quad m-s \geqslant 13,$$

to określimy ciąg

$$v_{s+1,k},$$

$|v_{s+1,k}| \leqslant 1$, $k = 1,2,\ldots,m-s-1$ w następujący sposób:

Ponieważ ilość wyrazów ciągu v_{sk} jest $m-s \geqslant 13$, to na podstawie twierdzenia 1.4 istnieje co najmniej jedna para wskaźników

$$k_1 = \alpha_{1s}, \qquad k_2 = \alpha_{2s}$$

takich, że

$$|\cos \sphericalangle (v_{sk_1}, v_{sk_2})| \geqslant 1/2.$$

Aby zapewnić jednoznaczność wyboru takiej pary wskaźników (takich par może być więcej), wybieramy najpierw te pary, w których k_1 jest najmniejsze, a z nich tę, w której k_2 jest najmniejsze. Jest więc

$$1 \leqslant \alpha_{1s} < \alpha_{2s} \leqslant 13. \tag{2.6}$$

Wybrawszy i ustaliwszy wskaźniki α_{1s}, α_{2s}, określimy i to jednoznacznie liczbę $\eta_s = \pm 1$

$$\eta_s = \begin{cases} -1 & \text{gdy } \sphericalangle (v_{s\alpha_{1s}}, v_{s\alpha_{2s}}) \in [0, \pi/3] \\ 1 & \text{gdy } \sphericalangle (v_{s\alpha_{1s}}, v_{s\alpha_{2s}}) \in [2\pi/3; \pi] \end{cases} \tag{2.7}$$

Za pomocą liczb (2.6), (2.7), związanych z ciągiem v_{sk}, i wektorów tego ciągu określimy wektory ciągu $v_{s+1,k}$ równością

$$v_{s+1,k} = \begin{cases} v_{sk} & \text{dla wszystkich } k < \alpha_{1s} \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ v_{s,k+1} & \text{dla wszystkich } k \in (\alpha_{1s}-1, \alpha_{2s}-1) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ v_{s,k+2} & \text{dla wszystkich } k \in (\alpha_{2s}-2, 12) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ v_{s\alpha_{1s}} + \eta_s v_{s\alpha_{2s}} & \text{dla } k = 12 \\ v_{s,k+1} & \text{dla wszystkich } k \in (12, m-s) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Zastrzeżenie "jeśli takie k istnieją" jest potrzebne:

np., gdy $\alpha_{1s} = 1$, to $k < \alpha_{1s}$ nie istnieje

Określone wzorem (2.8) wektory ciągu $v_{s+1,k}$ dla każdego $k=1,2,\ldots,m-s-1$ spełniają nierówność $|v_{s+1,k}| \leqslant 1$. Równość (2.8) stanowi koniec indukcyjnej konstrukcji ciągów v_{sk} spełniających warunek $|v_{sk}| \leqslant 1$ dla każdego rozważanego s,k, gdzie $s = 0,1,2,\ldots,m-12$, $k = 1,2,\ldots,m-s$.
Należy podkreślić, że gdy

$s = m-12$ to ciąg v_{sk}

posiada 12 wyrazów

i jest to ostatni z ciągów v_{sk}.

b) Konstrukcja ciągów (skończonych) mnożników ε_{sk}

Korzystając z tych samych założeń co w części a) dla tych samych wartości m, s, k określimy indukcyjnie ciągi mnożników ε_{sk}. $\varepsilon_{sk} = \pm 1$, $s = 0,1,2,\ldots,m-12$, $k = 1,2,\ldots,m-s$.

Wykorzystując określone jednoznacznie w pierwszej części dowodu liczby

$\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \eta_s$,

i) dla $s = m-12$ mnożniki

$$\varepsilon_{m-12,k}, \qquad k = 1,2,\ldots,12, \tag{2.10}$$

przyjmujemy równe dowolnym liczbom rzeczywistym, których wartość bezwzględna jest równa 1,

np. $\varepsilon_{m-12,k} = 1$, dla $k = 1,2,\ldots,12$.

ii) Zakładając, że już jest określony ciąg mnożników

$$\varepsilon_{sk}, \quad 0 < s < m-12, \quad k = 1,2,\ldots,m-s$$

o wyrazach 1 lub -1 wyznaczymy ciąg $\varepsilon_{s-1,k}$,
$k = 1,2,\ldots,m-s+1$ za pomocą następującej równości

$$\varepsilon_{s-1,k} = \begin{cases} \varepsilon_{sk} & \text{dla każdego } k < \alpha_{1,s-1}, \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ \varepsilon_{s,12} & \text{dla } k = \alpha_{1,s-1} \\ \varepsilon_{s,k-1} & \text{dla każdego } k \in (\alpha_{1,s-1}\alpha_{2,s-1}) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ \eta_{s-1}\varepsilon_{s,12} & \text{dla } k = \alpha_{2,s-1} \\ \varepsilon_{s,k-2} & \text{dla każdego } k \in (\alpha_{2,s-1}\ 14) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ \varepsilon_{s'k-1} & \text{dla każdego } k \in (13\ m-s+2) \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \end{cases} \tag{2.11}$$

W powyższej równości określamy liczby $\varepsilon_{s-1,k}$ za pomocą już wcześniej określonych liczb $\varepsilon_{s,k}$, $k = 1,2,\ldots m-s+1$, rozpatrując wszystkie możliwe rozłączne przypadki dla wskaźnika k, a ponadto wykorzystujemy określone w pierwszej części dowodu liczby $\eta_{s-1}, \alpha_{1,s-1}, \alpha_{2,s-1}$. Łatwo zauważyć, że wyrazy ciągu $\varepsilon_{s-1,k}$ przyjmują tylko dwie wartości 1 lub -1, gdyż

jedne z nich są równe pewnym
liczbom ciągu ε_{sk}, a te na mocy założenia
są równe -1 lub 1
a pozostałe różnią się od ε_{sk} czynnikiem
η_{s-1}, który także równy jest 1 lub -1.

Możemy więc stwierdzić, że wzory (2.10) i (2.11) określają jenoznacznie ciągi liczby ε_{sk} o wartościach 1 lub -1, dla każdego

$$\begin{aligned} &k = 1,2,\ldots, m-s \\ &s = m-14,\ m-13,\ m-12,\ldots,1,0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Powyższa konstrukcja ciągów mnożników ε_{sk} była potrzebna po to, by otrzymać ciąg mnożników ε_k,

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{ok}, \qquad k = 1,2,\ldots,m. \tag{2.13}$$

c) Dowód nierówności z tezy lematu

Nierówność (2.4) z C(3) = 12 będzie wnioskiem z następującej równości

$$\sum_{k=1}^{12} \varepsilon_{sk} v_{sk} = \sum_{k=1}^{12+q} \varepsilon_{s-q,k} v_{s-q,k}, \tag{2.14}$$

gdzie

$$q = 0,1,2,\ldots,s, \quad s = 0,1,2,\ldots,m-12, \quad m > 13.$$

Równość (2.14) udowodnimy, korzystając z indukcji względem wskaźnika q. Jeżeli q = 0, to równość (2.14) jest oczywiście prawdziwa. W dowodzie wykorzystujemy równości (2.8) i (2.11). W szczególności, wyrażając wektory $v_{s-q,k}$ przez wektory $v_{s-q-1,j}$, można skorzystać bezpośrednio ze wzoru (2.8). Natomiast wzory (2.11) nie są dogodne do bezpośredniego zastosowania, gdyż wyrażają $\varepsilon_{s-1,k}$ z niższym wskaźnikiem s-1 przez $\varepsilon_{s,j}$ ze wskaźnikiem s.

Równość wynikającą z (2.11), ale z większym o 1 wskaźnikiem po lewej stronie, zapiszemy więc w następującej postaci, pisząc ponadto s-q-1 zamiast s-1, zaś s-q zamiast s:

$$\varepsilon_{s-q,k} = \begin{cases} \varepsilon_{s-q-1,k} & \text{dla każdego } k < \alpha_{1,s-q-1} \text{ jeśli takie } k \text{ istnieją} \\ \varepsilon_{s-q-1,k+1} & \text{dla każdego } k \in (\alpha_{1,s-q-1}-1\ \alpha_{2,s-q-1}-1) \quad - \text{ " } - \\ \varepsilon_{s-q-1,k+2} & \text{dla każdego } k \in (\alpha_{2,s-q-1}-2,\ 12) \quad - \text{ " } - \\ \varepsilon_{s-q-1,k+1} & \text{dla każdego } k \in (12,\ m-s+q+1) \quad - \text{ " } - \\ \varepsilon_{s-q-1,\alpha_{1,s-q-1}} = \eta_{s-q-1}\ \varepsilon_{s-q-1\ \alpha_{2,s-q-1}} & \text{dla } k = 12 \end{cases} \tag{2.15}$$

Dalszą część dowodu równości (2.14) pozostawiamy czytelnikowi.
Dla q = s równość (2.14) przyjmuje postać

$$\sum_{k=1}^{12} \varepsilon_{sk} v_{sk} = \sum_{k=1}^{s+12} \varepsilon_{ok} v_{ok} = \sum_{k=1}^{s+12} \varepsilon_k v_k$$

dla każdego $s = 0,1,2,\ldots,m-12$, wobec czego

$$\left|\sum_{k=1}^{s+12} \varepsilon_k v_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{12} \varepsilon_{sk} v_{sk}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{12} \left|\varepsilon_{sk} v_{sk}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{12} 1 \cdot 1 = 12 = C(3).$$

Oznaczając

$$r = s+12,$$

mamy więc dla każdego $r = 12,13,\ldots,m$

$$\left|\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k v_k\right| \leqslant C(3) = 12, \tag{2.16}$$

zaś dla $r = 1,2,\ldots,11$ nierówność (2.16) przyjmuje postać

$$\left|\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k v_k\right| \leqslant r < 12 = C(3).$$

Koniec dowodu.

Z dowodu twierdzenia 2.1 wynika, że stałą $C(3) = 12$ wyznaczymy tym sposobem dla skończonego ciągu wektorów przestrzeni R^3. Łatwo zauważyć, że w przestrzeni R^1 twierdzenia 2.1 jest także prawdziwe dla nieskończonego ciągu wektorów. Nie wiadomo czy tak jest choćby w R^2.

Stała $C(3) = 12$ wyznaczona w twierdzeniu 2.1 nie jest najmniejszą stałą spełniającą jego tezę. Najmniejszą stałą jest liczba

$$C^*(3) = \inf C(3) \tag{2.17}$$

Wiadomo jedynie, że w przestrzeni R^1 $C^*(1) = 1$.
W pracy [1] podane zostało, że w przestrzeni R^2 $C^*(2) = \sqrt{3}$.

3. WYZNACZANIE CIĄGU MNOŻNIKÓW UZBIEŻNIAJĄCYCH

Korzystając z twierdzenia 2.1 udowodnimy.

<u>Twierdzenie 3.1</u>

Dla każdego ciągu wektorów v_k w przestrzeni R^3, takiego, że $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$, istnieje ciąg mnożników ε_k, $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k v_k \tag{3.1}$$

jest zbieżny.

Dowód

Załóżmy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = \infty$$

gdyż w przeciwnym wypadku twierdzenie jest prawdziwe i to przy dowolnym ciągu mnożników ograniczonych.

Określimy indukcyjnie ciąg liczb m_j.

m_1 jako najmniejszą liczbę naturalną taką, że dla każdego $k \geq m_1$ $|v_k| \leq 1$.

m_{s+1} jako najmniejszą liczbę naturalną większą od m_s $(m_{s+1} > m_s)$ taką, że dla każdego $k \geq m_{s+1}$ $|v_k| < 1/2^s$.

Na podstawie twierdzenia 2.1 do ciągu wektorów

$$v_k, \quad k = m_s, m_s+1, \ldots, m_{s+1}-1$$

można dobrać ciąg mnożników ε_k taki, że

$$\left| \sum_{k=m_s}^{j} \varepsilon_k \cdot v_k \right| \leq \frac{12}{2^{s-1}}, \tag{3.2}$$

gdzie $j = m_s, m_s+1, \ldots, m_{s+1}-1$.

Dla $k < m_1$ przyjmujemy $\varepsilon_k = 1$.

W szczególności biorąc $j = m_{s+1}-1$ na podstawie (3.2), otrzymamy szereg

$$\sum_{k=1}^{m_1-1} v_k + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=m_s}^{m_{s+1}-1} \varepsilon_k v_k, \tag{3.3}$$

który jest bezwzględnie zbieżny. Szereg (3.3) nie jest jednak szeregiem (3.1). Ciąg wszystkich sum częściowych szeregu (3.1), w których wskaźniki są większe od m_1-1, jest równy

$$\sum_{k=1}^{j} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=1}^{m_1-1} v_k + \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=m_s}^{m_{s+1}-1} \varepsilon_k v_k \right) + \sum_{k=m_{p+1}}^{j} \varepsilon_k v_k, \tag{3.4}$$

gdzie $m_{p+2} > j \geq m_{p+1}$ dla odpowiedniego $p = p(j)$, $p = 1, 2, \ldots$

Ponieważ $m_{k+1} > m_k$ więc $p(j) \to \infty$ gdy $j \to \infty$
Korzystając z (3.2) i oznaczając przez S sumę szeregu (3.3), mamy

$$\left| S - \sum_{k=1}^{j} \varepsilon_k v_k \right| = \left| S - \sum_{k=1}^{m_1-1} v_k - \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=m_s}^{m_{s+1}-1} \varepsilon_k v_k \right) - \sum_{k=m_{p+1}}^{j} \varepsilon_k v_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{s=p+1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_s}^{m_{s+1}-1} \varepsilon_k v_k \right) - \sum_{k=m_{p+1}}^{j} \varepsilon_k v_k \right| \leqslant \sum_{s=p+1}^{\infty} \frac{12}{2^{s-1}} + \frac{12}{2^p} = \frac{36}{2^p},$$

gdzie $p = p(j)$, więc

$$\lim_{j \to \infty} \frac{36}{2^p} = 0.$$

Z powyższej równości wynika, że szereg (3.1) jest zbieżny i ma tę samą sumę co szereg (3.3).

Koniec dowodu.

LITERATURA

[1] Calabi E., Dvoretzky A.: Convergence - and sum factors of series of complex numbers. Transactions of the American Math. Society 70 (1951) p. 177-194.

[2] Dvoretzky A., Hanani C.: Sur les changements des signes des terems d'une serie a'terms complexes. Comptes rendus de l'Academie des Sciences (Paris) - 225 (1947) p 516-518.

Recenzent: Prof. zw. dr hab. Zygmunt Zahorski

Wpłynęło do redakcji: 2.IV.1984 r.

О СВОЙСТВАХ РЯДА ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ R^3

Р е з ю м е

В работе доказана теорема: для каждого ряда векторов $\{v_k\}$, $k = 1,2,3,\ldots$ пространства R^3 такого, что $|v_k| \to 0$ существует ряд сомножителей $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ такой, что ряд $\sum \varepsilon_k v_k$ сходится.

ON A PROPERTY OF VECTOR SERIES IN R^3 SPACE

S u m m a r y

In this note we have proved that for every sequence of vectors $\{v_k\}$, $k = 1,2,3,\ldots$ of R^3 space where $|v_k| \to 0$, we can choose the infinite sequence of signes $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ such that the series $\sum \varepsilon_k v_k$ is convergent.