ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

STANISŁAWA PANKIEWICZ

WŁĄCZENIE TEKSTÓW PROGRAMOWYCH DO PROCESU NAUCZANIA MATEMATYKI NA STUDIACH TECHNICZNYCH DLA PRACUJĄCYCH

MATEMATYKA-FIZYKA

Z. 49
GLIWICE
1988

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 854

MATEMATYKA-FIZYKA

ZESZYT CZTERDZIESTY DZIEWIĄTY

STANISŁAWA PANKIEWICZ

WŁĄCZENIE TEKSTÓW PROGRAMOWYCH DO PROCESU NAUCZANIA MATEMATYKI NA STUDIACH TECHNICZNYCH DLA PRACUJĄCYCH

GLIWICE 1988

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-470X

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 150+55 Ark. wyd. 2 Ark druk. 2,75 Papier offset. kl.III 70x100 70g
Oddano do druku 18.03.1986 Podpis. do druku 4.12.1986 Druk ukończ. w styczniu 1988
Zam 315|86 O-23 Cena zł 40,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP

Zawodowe studia techniczne dla pracujących prowadzone są w Polsce jako studia wieczorowe i studia zaoczne. W obu systemach efektywność studiów dla pracujących zależy w dużym stopniu od organizacji procesu dydaktycznego, czyli od doboru metodyki nauczania, a więc od metodyki przekazywania wiedzy i metodyki uczenia się.

Na studiach wieczorowych treści wykładów wprowadzają do poszczególnych tematów, które następnie studenci przerabiają z podręcznika. W przekazywaniu wiedzy na technicznych studiach zawodowych dla pracujących podręcznik odgrywa bardzo ważną rolę. Jeszcze większą rolę odgrywa podręcznik na studiach zaocznych, na których wykłady wprowadzające odbywają się w okresach zjazdów i mają charakter syntetyczny. Podręcznik studentowi zaocznemu zastępuje żywe słowo wykładowcy i w miarę możliwości środki poglądowe stosowane przez wykładowcę. Zatem na studiach dla pracujących metodyka przekazywania wiedzy jest ściśle zespolona z metodyką uczenia się. Właściwa metodyka uczenia się winna przede wszystkim umożliwić studentowi głębokie zrozumienie treści nauczania oraz samokontrolę nad stopniem jej opanowania. Z tym wiąże się bezpośrednio wyrabianie umiejętności stosowania wiedzy teoretycznej do rozwiązywania zagadnień technicznych, co z kolei wpływa na rozwijanie umiejętności samodzielnego myślenia.

Ponadto w związku z przyspieszonym rozwojem nauki i techniki najbardziej nawet gruntowna wiedza wyniesiona przez studentów wyższej szkoły technicznej dla pracujących powinna być stale pogłębiana i uzupełniana. Uczelnia winna więc uczynić wszystko, aby jej wychowankowie byli ludźmi o umysłach chłonnych, zdolni stale samodzielnie dokształcać się i nadążać za tempem przemian w technice i w życiu społecznym. Absolwent szkoły technicznej dla pracujących winien być przekonany o konieczności stałego podnoszenia swoich kwalifikacji i posiadać umiejętność ich zdobywania. W uczelni więc należy ukształtować i właściwie ukierunkować aktywną postawę i ambicje twórcze absolwenta.

W wielu ośrodkach prowadzone są intensywne poszukiwania najlepszych i racjonalnych metod samokształcenia studentów na studiach zawodowych technicznych z uwzględnieniem nowej technologii dydaktycznej. Do nowej technologii nauczania zalicza się również nauczanie programowane. Nauczanie programowane może okazać się szczególnie przydatne na studiach zaocznych. O tym czy takie założenie jest słuszne przesądzi oczywiście praktyka szkolenia.

2. WŁĄCZANIE DO ORGANIZACJI PROCESU NAUCZANIA TEKSTÓW PROGRAMOWANYCH

Niespotykany w rozwoju ludzkości szybki proces narastania informacji naukowych, z jakimi powinien zaznajomić się student w czasie swego pobytu w wyższej szkole technicznej dla pracujących, stwarza konieczność odpowiedniego selekcjonowania i aktualizowania treści nauczania przy równoczesnym poszukiwaniu najbardziej skutecznych form i metod procesu dydaktycznego. Chodzi głównie o taką organizację procesu nauczania, która pozwoliłaby przezwyciężyć sprzeczność między narastaniem wiedzy a ograniczonym czasem, przeznaczonym na zaznajomienie z nią studentów.

Ulepszenie procesu nauczania w uczelni technicznej dla pracujących w drodze stosowania nowoczesnych metod i środków dydaktycznych staje się sprawą niezwykle ważną i aktualną. Podejmując zadanie unowocześnienia procesu dydaktycznego należy jednakże zachować dużą ostrożność w dokonywaniu zmian. Należy bowiem pamiętać, że problem unowocześnienia procesu nauczania polega z jednej strony na kultywowaniu wartościowych tradycji z adaptacją do zmieniających się warunków, a z drugiej strony na wprowadzaniu szeroko w praktyce wypróbowanych, sprawdzonych pod względem efektywności nowatorskich koncepcji dydaktycznych.

Do nowatorskich koncepcji dydaktycznych zaliczamy między innymi także i nauczanie programowane, w szczególności łączenie nauczania programowanego z nauczaniem konwencjonalnym.

Intensywne badania nad nauczaniem programowanym, dotyczące szerokiego wachlarza zagadnień, prowadzone są w wielu krajach, między innymi w Stanach Zjednoczonych, Anglii, Francji a także i w krajach należących do obozu socjalistycznego. Wyrazem tego zainteresowania są międzynarodowe zjazdy, sympozja i konferencje.

Nauczanie programowane stosuje się w Polsce w wyższym szkolnictwie wojskowym w sposób eksploatacyjny i eksperymentalny. Równolegle z eksperymentami w Akademiach Wojskowych prowadzone są intensywne badania w tym zakresie pod kierunkiem prof. dra hab. Cz. Kupisiewicza w kilku wyższych uczelniach w kraju. Wyniki zrealizowanych eksperymentów za granicą i w kraju świadczą o przewadze nauczania programowanego nad konwencjonalnym, ale szeroko rozpowszechniony jest pogląd, że nauczanie programowane w całokształcie działalności dydaktycznej szkoły wyższej ma rację bytu tylko jako metoda pomocnicza, szczególnie przydatna w zakresie przekazywania nowych informacji, w procesie kierowanie uczeniem się, w utrwalaniu zdobytej wiedzy oraz w kontroli i ocenie stopnia przyswajania wiadomości. Ponieważ nauczanie programowane indywidualizuje proces nauczania, może być wykorzystane z dobrymi wynikami także i w dostosowaniu procesu nauczania do tempa pracy uczącej się osoby, przede wszystkim w pracy samokształceniowej studentów technicznych studiów dla pracujących.

Włączone obok metod konwencjonalnych do procesu dydaktycznego nauczanie programowane może spełnić ważną rolę w integracji różnych form tego procesu. Badania wykazały, że optymalne korzyści osiągnąć można wówczas, gdy wprowadzając w szkole wyższej nauczanie programowane zorganizujemy proces dydaktyczny danej dyscypliny w ten sposób, że składać się będzie z jednostek metodycznych, tworzących zamknięty cykl:

- wykład,
- samodzielna praca studentów z podręcznikiem programowanym,
- seminarium końcowe (ewentualnie praca laboratoryjna).

Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że łączenie nauczania programowanego z nauczaniem konwencjonalnym w wyższej szkole technicznej dla pracujących wydaje się szczególnie korzystne w zakresie takich przedmiotów, jak: matematyka, mechanika, elektrotechnika, elektronika, geologia.

Ostatnie badania w zakresie nauczania matematyki wykazały, że włączenie do procesu nauczania tekstów programowanych przez utworzenie cyklu zamkniętego:

- praca studentów nad tekstem programowanym,
- wykład,
- ćwiczenia tablicowe

przyczyniają się wybitnie do efektywnego zdobywania przez studentów operatywnej wiedzy z tego zakresu.

Stwierdzono bowiem empirycznie, że teksty zaprogramowane metodą blokową zapewniają dobre wyniki nie tylko w zakresie opanowania przez studentów wiedzy biernej, ale wymagają również umiejętności zastosowania poznanych pojęć i twierdzeń w rozwiązywaniu zadań, uzasadniania i weryfikowania sądów oraz dowodzenia twierdzeń. Rozwijają więc w jakimś stopniu samodzielne myślenie.

3. KONSTRUOWANIE TEKSTÓW PROGRAMOWANYCH METODĄ BLOKOWĄ

Popularyzacja tej formy pracy ze studentami jest utrudniona brakiem odpowiednich tekstów programu blokowego, dostosowanego do treści wykładanego materiału nauczania. Opracowanie odpowiedniego podręcznika programowanego jest bardzo pracochłonne, ponieważ wymaga kilkakrotnej i różnorakiej weryfikacji. W programie blokowym informacje muszą być starannie uporządkowane i ułożone w wyraźnie zarysowane obszary pojęć.

Przy konstruowaniu programów metodą blokową praca przebiega w następujący sposób:

1) Formułujemy cele, które winny być zrealizowane przez studentów po przerobieniu programu i na tej podstawie dobieramy odpowiednie fragmenty tekstów konwencjonalnych, opierając się przeważnie na tekstach zawartych w podręcznikach. Wybrany tekst poddaje się skrupulatnej analizie wykorzystując do tego celu między innymi metodę macierzową. Dopiero po ustaleniu drogą analizy w obranym tekście treści informacji naukowych, po uwzględnieniu uogólnień, po zbadaniu zachodzących między nimi stosunków merytorycznych i logicznych, po zlikwidowaniu zbędnych powtórzeń i dygresji, tekst zostaje włączony do programu.

2) Dla przygotowanego tekstu opracowujemy listę pytań, starając się o to, aby dotyczyły one merytorycznych punktów ciężkości zawartych w tekście konwencjonalnym.

3) Sporządzamy listę możliwych do popełnienia przez studentów błędów. Do tego celu możemy wykorzystać wypracowania studentów na ćwiczeniach prowadzonych metodami konwencjonalnymi.

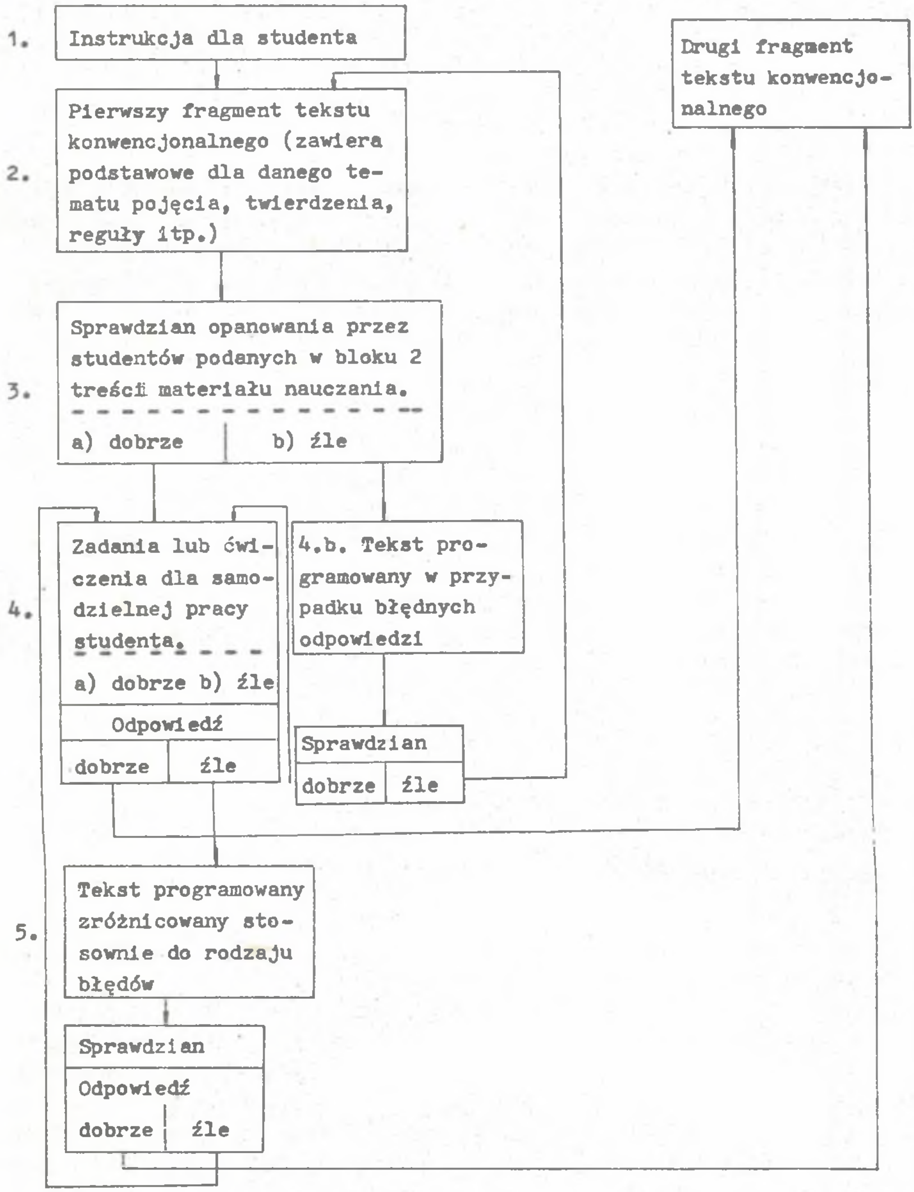
4) Stosownie do rodzaju przewidywanych błędów budujemy odpowiednie programy korektywne, najczęściej metodą programowania rozgałęzionego.

5) Końcowym etapem jest opracowanie sprawdzianu wiadomości i umiejętności, korespondującego merytorycznie z zestawem pytań sprawdzających stopień opanowania przez studentów tekstu konwencjonalnego.

Po takim przygotowaniu materiału przystępujemy do programowania według schematu strukturalnego podanego na str. 9.

Bloki programowane spełniają w przedstawionej metodzie głównie funkcje korektywne. Przekazuje się w nich niekiedy informacje o charakterze pomocniczym, pochodne wobec tych, które zawarte są w tekście konwencjonalnym. Sprawdziany (zadania) stawiają studenta w sytuacji problemowej, wymagają od niego zastosowania poznanych pojęć, praw i reguł w nowych warunkach, uzasadniania i weryfikowania sądów. W ostatnim bloku na ogół podajemy tekst programowany dodatkowy wyjaśniający, zróżnicowany stosownie do popełnianych błędów.

Schemat strukturalny programu



4. PRZYKŁADOWY TEKST PROGRAMOWANY

Niżej został podany przykładowy fragment programu o konstrukcji zbliżonej do programu blokowego, obejmujący informacje o ekstremum funkcji jednej zmiennej. Program przeznaczony jest dla samodzielnej pracy studentów. (W przykładzie nie zostały uwzględnione bloki 4b i 5 schematu strukturalnego).

EKSTREMUM FUNKCJI

4.1. Definicja ekstremum funkcji $y = f(x)$

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0.
Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0

maksimum	minimum

lokalne, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla każdego $x \in S(x_0; \delta)$ spełniona jest odpowiednio nierówność

$f(x) \leqslant f(x_0)$	$f(x) \geqslant f(x_0)$.

Jeżeli są spełnione odpowiednio nierówności mocne

$f(x) < f(x_0)$	$f(x) > f(x_0)$

to maksimum (minimum) lokalne nazywamy właściwym. Maksima i minima funkcji noszą wspólną nazwę ekstremów funkcji.

Ekstremum lokalne w punkcie x_0 jest pojęciem odnoszącym się do dostatecznie małego otoczenia $T(x_0; \delta)$; fakt ten wyraża słowo lokalne. Określone tu ekstremum lokalne należy odróżnić od tzw. ekstremum absolutnego (maksimum absolutne, minimum absolutne), które jest pojęciem integralnym, odnoszącym się do pewnego zbioru (np. do całej dziedziny funkcji) i oznacza największą (albo odpowiednio najmniejszą) wartość funkcji w tym zbiorze. Pisząc krótko ekstremum będziemy mieli zawsze na myśli ekstremum lokalne.

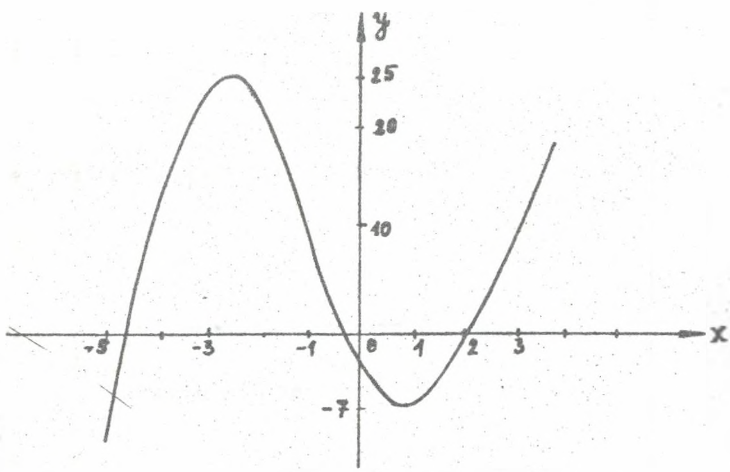
Na rys. 1 przedstawiono wykres funkcji

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2,$$

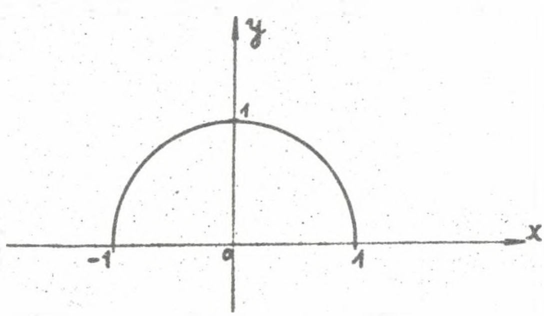
która ma maksimum właściwe w punkcie $x = -3$, przy czym $f(-3) = y_{maks} = 25$, a minimum właściwe ma w punkcie $x = 1$, $f(1) = y_{min} = -7$.
(Na rys. 1 przyjęto na osiach układu różne skale).
Funkcja określona wzorem

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

w swej dziedzinie naturalnej, którą jest przedział $[-1, 1]$, ma maksimum w pukcie 0, przy czym $y_{maks} = 1$ (rys. 2). Maksimum to jest jednocześnie największą wartością funkcji w przedziale $[-1, 1]$. W punktach $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, równą zeru. Funkcja nie posiada minimum, ponieważ nie jest określona w żadnym otoczeniu punktu $x_1 = -1$ ani punktu $x_2 = 1$.



Rys. 1



Rys. 2

maksimum lokalne maksimum lokalne właściwe	A_1 Funkcja f(x) określona w pewnym otoczeniu puntu x_0 przyjmuje w tym punkcie ekstremum lokalne właściwe, jeżeli: a) istnieje taka liczba . . . 0, że dla każdego . . . . spełniona jest nierówność $f(x) \quad f(x_0)$ albo $f(x) \quad f(x_0)$ b) przedstaw graficznie otoczenie punktu x_0. Przejdź na str. 13 A_2
lokalne minimum lokalne zbioru dziedziny	(ze str. 13) B_1 Jeżeli dla każdego $x \in S(x_0; \delta)$ spełniona jest nierówność: $f(x) \geqslant f(x_0)$, wówczas f(x) przyjmuje w punkcie x_0 . . . . a jeżeli spełniona jest nierówność: $f(x) > f(x_0)$, wówczas funkcja f(x) przyjmuje w punkcie $x=x_0$ . . . . Przejdź na str. 13 B_2

$\delta >$

$x \in S(x_0; \delta)$

$<$

$>$

$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$

(ze str. 12)

A_2

Jeżeli dla każdego x należącego do sąsiedztwa $S(x_0; \delta)$ spełniona jest nierówność:

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

wówczas funkcja $f(x)$ przyjmuje w punkcie x_0

. . . .

a jeżeli spełniona jest nierówność:

$$f(x) < f(x_0)$$

wówczas mówimy, że funkcja $f(x)$ przyjmuje

w x_0 . . . .

. . . .

Przejdź na str. 12 B_1

minimum lokalne

minimum lokalne właściwe

Ze str. 12

B_2

Ekstremum lokalne (maksimum . . . .
albo . . . . odróżniamy od tzw. ekstremum absolutnego, które odnosi się do pewnego . . . ., np. całej . . . . funkcji.

Przejdź na str. 12 B_1
a następnie do zadania 4.1.1, na str. 14

(ze str. 13)

Zadanie 4.1.1. Zbadać czy funkcja $y = x\sqrt{4 - x^2}$ przyjmuje w punkatach $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ ekstrema.

Porównaj swoje rozumowanie z wyjaśnieniem podanym na str. 15.

Zadanie 4.1.2. Sporządzić szkic wykresu funkcji

$$W_3(x) = -x^3 + x^2$$

w przedziale $(-1, 1)$ i zbadać, czy w tym przedziale funkcja $W_3(x)$ może przyjmować ekstremum.

Porównaj twoją odpowiedź z rys. 4 na str. 15 i str. 16.

(ze str. 14)

Do zadania 4.1.1. Funkcja $y = x\sqrt{4 - x^2}$ jest określona w przedziale $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Ponieważ funkcja ta nie jest określona w otoczeniu punktu $x_1 = -2$ ani punktu $x_2 = 2$, więc w tych punktach nie posiada ekstremów. Funkcja ta może przyjmować ekstrema w innych punktach.

Zbadaj znak i miejsce zerowe funkcji i następnie wyznacz jej przedziały monotoniczności. Sporządź szkic wykresu funkcji.

Porównaj swój wykres z rys. 3 na str. 16.

Do zadania 4.1.2. Funkcja $W_3(x)$ jest wielomianem, zatem jest ciągła. Aby sporządzić szkic wykresu funkcji $W_3(x)$, zbadaj wstępnie funkcję w podanym przedziale:

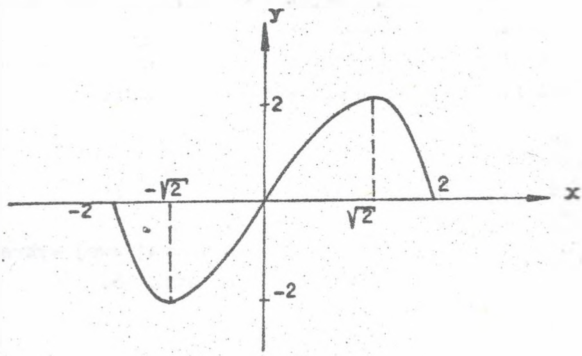
a) zbadaj znak funkcji w tym przedziale,
b) oblicz wartości funkcji na krańcach przedziału,
c) wyznacz miejsca zerowe funkcji,
d) wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

Teraz sporządź szkic wykresu funkcji.

Porównaj swoje wyniki z wyjaśnieniem podanym na str.16.

(ze str. 15)

Do zadania 4.1.1

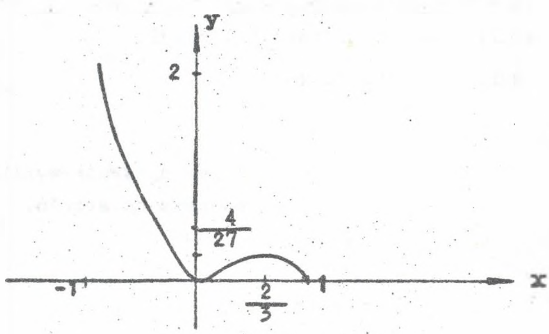


Rys. 3

Funkcja $y = x\sqrt{4 - x^2}$ przyjmuje minimum w punkcie $x_1 = -\sqrt{2}$, $y_{min.} = -2$, zaś maksimum w punkcie $x_2 = \sqrt{2}$, $y_{maks.} = 2$.

Przejdź na str.   do zadania 4.1.2.

Do zadania 4.1.2. Funkcja $W_3(x)$ przyjmuje w punkcie $x_1 = 0$ minimum i $y_{min.}/0 = 0$, a maksimum w punkcie $x_2 = \frac{2}{3}$ i $y_{maks.}(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$.



Rys. 4

Przejdź na str. 17.

(ze str. 16)

4.2. Twierdzenie Fermata

Zakładamy, że

a) funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_o ekstremum,
b) pierwsza pochodna w punkcie x_o istnieje,

twierdzimy

$$f'(x_o) = 0$$

(jest to tzw. twierdzenie Fermata).

Dowód. Ponieważ istnieje pochodna $f'(x_o)$, więc

$$f'(x_o-) = f'(x_o+) = f'(x_o).$$

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy w przypadku maksimum.

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_o maksimum, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że:

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad -\delta < h < 0$$

oraz

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad 0 < h < \delta.$$

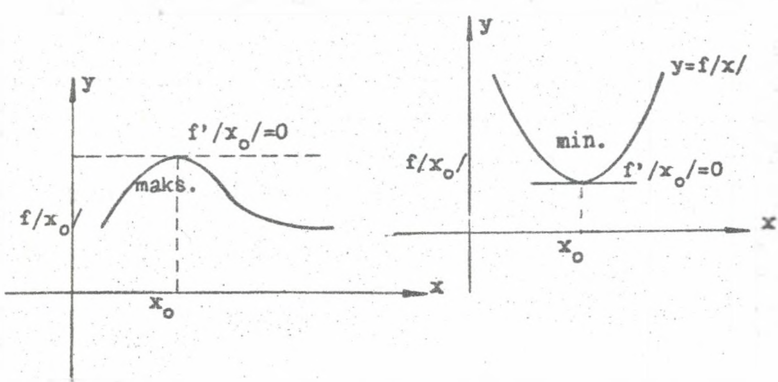
Wobec powyższych nierówności mamy:

$$f'(x_o-) \geqslant 0, \quad \text{natomiast} \quad f'(x_o+) \leqslant 0.$$

Ponieważ istnieje pochodna $f'(x_o)$ i $f'(x_o) \geqslant 0$ oraz $f'(x_o) \leqslant 0$, więc

$$\underline{\underline{f'(x_o) = 0}}$$

c.n.d.



Rys. 5

Punkt, w którym pierwsza pochodna funkcji $f(x)$ jest równa zero, nazywamy punktem stacjonarnym tej funkcji.

<u>Wniosek:</u> Warunek

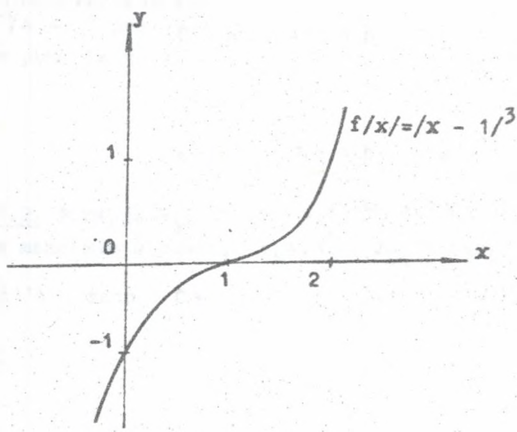
$$f'(x_o) = 0$$

jest warunkiem koniecznym na to, aby funkcja $f(x)$ różniczkowalna w punkcie x_o miała w tym punkcie ekstremum. Warunek ten nie jest jednak wystarczający, na to wskazuje przykład funkcji

$$f(x) = (x - 1)^3$$

w punkcie $x_o = 1$.

Istotnie, $f'(1) = 0$, jednakże dla $x < 1$ otrzymujemy $(x - 1)^3 < 0$, zaś dla $x > 1$ $(x - 1)^3 > 0$. Funkcja $y = (x-1)^3$ nie ma ekstremum w punkcie $x_o = 1$ (rys. 6).



Rys. 6

Podane twierdzenie Fermata ułatwia poszukiwanie ekstremów, bowiem funkcja ciągła $f(x)$ może przyjmować ekstremum jedynie

a) w punktach, w których pochodna nie istnieje,

b) w punktach, w których pochodna (jeżeli istnieje) $f'(x)$ przyjmuje wartość równą zero.

Przejdź na str. 19.

stacjonarnych

o

Fermata

(ze str. 18)

A_1

Zakładamy, że

a) funkcja $f(x)$ jest w punkcie x_o różniszkowalną,

b) posiada w tym punkcie ekstremum.

Twierdzimy, że . . . . = ...

Punkt, w którym $f'(x) = 0$ nazywamy punktem . . . .

Przejdź na str. 20 A_2

$f'(x_o) = 0$

wystarczającym

(ze str. 20)

B_1

W dowodzie tzw. twierdzenia Fermata korzystamy z równości pochodnych . . . . (oczywiście jeżeli funkcja $f(x)$ jest w punkcie x_o . . . .)

Twierdzenie Fermata jest bardzo przydatne w poszukiwaniu . . . . funkcji . . . .

Przejdź na str. 20 B_2

(ze str. 19)

A_2

Gdy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w pewnym przedziale, to ekstremum może wystąpić tylko w punktach . . . . funkcji.

Aby funkcja $f(x)$ różniczkowalna w punkcie x_0 miała w tym punkcie ekstremum, konieczne jest, aby $f'(x)$ = ... Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia . . . .

Przejdź na str. 19 B_1

$f'(x_0)$ 0

stacjonarnym

(ze str. 19)

B_2

Warunek konieczny . . . . istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej w punkcie x_0 nie jest warunkiem . . . . Można podać przykład takiej funkcji $f(x)$ różniczkowalnej, której pierwsza pochodna w punkcie $x = x_0$ zeruje się, lecz funkcja $f(x)$ nie ma w punkcie x_0 ekstremum, np. $y = x^3$ w punkcie $x = 0$.

Przejdź na str. 21 do zadań.

jednostronnych
różniczkowalna
ekstremów
różniczkowalnych

(ze str. 20)

Zadanie 4.2.1. Znaleźć ekstrema funkcji

$$y(x) = 9(x^3 - x^2).$$

Porównaj swoje rozwiązanie z wynikiem na str. 22.

Zadanie 4.2.2. Czy funkcja

$$y(x) = |x|$$

przyjmuje w jakimś punkcie ekstremum?

Porównaj odpowiedź z wynikiem na str. 22.

(ze str. 21)

Do zadania 4.2.1. Obliczamy pochodną funkcji

$$y'(x) = 9(3x^2 - 2x).$$

Zauważmy, że

$$y'(x) = 0$$

dla $x_1 = 0$ oraz dla $x_2 = \frac{2}{3}$.

Tylko w punktach x_1 oraz x_2 może funkcja przyjmować ekstremum. Dalej stwierdzimy, że w sąsiedztwie punktu $x_1 = 0$ funkcja $y(x)$ przyjmuje wartości mniejsze niż w samym punkcie $x_1 = 0$, wobec tego w punkcie $x_1 = 0$ występuje maksimum. Zbadaj podobnie czy w punkcie x_2 funkcja przyjmuje ekstremum.

Porównaj swoje rozwiązanie z wynikiem na str. 23.

Do zadania 4.2.2. Funkcja

$$y(x) = |x|$$

posiada pochodną w każdym punkcie $x_1 \neq 0$, ale pochodna nigdzie nie zeruje się.

Dla $x < 0$ otrzymujemy bowiem $y'(x) = -1$, natomiast dla $x > 0$ $y'(x) = 1$. W punkcie $x_1 = 0$ funkcja $y(x) = |x|$ nie ma pochodnej. Tylko w tym punkcie ta funkcja może mieć ekstremum. Ponieważ $|x| > 0$ dla $x \neq 0$, więc funkcja

$$y(x) = |x|$$

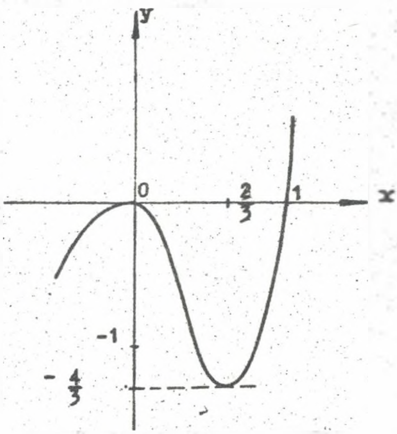
ma minimum w $x_1 = 0$, $y_{min}(0) = |0| = 0$ (rys. 8).

Przejdź na str. 23.

(ze str. 22)

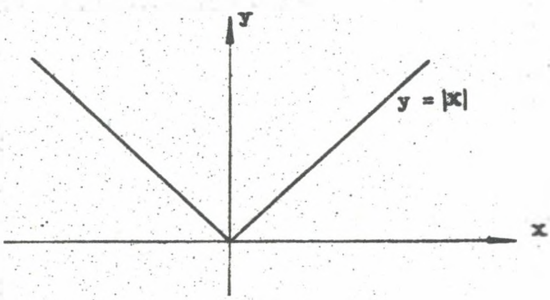
Do zadania 4.2.1. W sąsiedztwie punktu $x_2 = \frac{2}{3}$ wartości funkcji $y(x)$ są większe niż w samym punkcie x_2. W tym punkcie funkcja $y(x)$ przyjmuje minimum, $y_{min}(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$, (rys. 7).

x	0	$\frac{2}{3}$
$y'(x)$	0	0
$y(x)$	0	$-\frac{4}{3}$



Rys. 7

Do zadania 4.2.2



Rys. 8

Przejdź na str. 24.

(ze str. 23)

4.3. Pierwszy warunek wystarczający ekstremum

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, a ponadto posiada pochodną $f'(x)$ w pewnym sąsiedztwie $S(x_0; \delta)$, przy czym

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \text{dla} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) &< 0 \quad \text{"} \quad x_0 < x < x_0 + \delta, \end{aligned} \qquad (a)$$

to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum właściwe (rys. 9).

Jeżeli natomiast spełniony jest warunek:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \text{dla} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) &> 0 \quad \text{"} \quad x_0 < x < x_0 + \delta, \end{aligned} \qquad (b)$$

to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum właściwe.

Dla uzasadnienia zauważmy, że dla $x \in S(x_0; \delta)$ funkcja $f(x)$ spełnia założenia twierdzenia o przyrostach w przedziale (x_0, x) (oczywiście $x_0 > x$ albo $x_0 < x$).

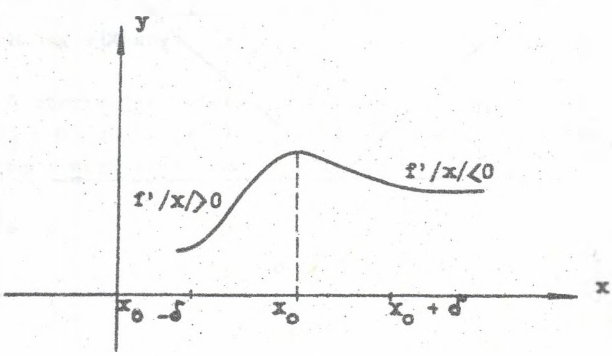
W równości

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) \qquad (c \in T(x_0, \delta))$$

Znak iloczynu

$$f'(c) \cdot (x - x_0)$$

zależy od znaku $f'(c)$ oraz od znaku przyrostu zmiennej niezależnej $(x - x_0)$. Krótka analiza znaku iloczynu $f'(c) \cdot (x - x_0)$ pozwala uzasadnić warunki (a) i (b).



Rys. 9

Zwykle mówimy, że funkcja różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 przyjmuje w punkcie $x = x_0$ maksimum właściwe, jeżeli

$$f'(x_0) = 0$$

i jeżeli $f'(x)$ zmienia znak z dodatniego na ujemny, gdy x rosnąc przechodzi przez x_0.

<u>Drugi</u> warunek wystarczający ekstremum.

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną, która jest ciągła w punkcie $x = x_0$, a ponadto

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

to funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = x_0$ ekstremum właściwe. W szczególności, jeżeli

$$f''(x_0) > 0,$$

wówczas funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = x_0$ minimum właściwe, natomiast jeżeli

$$f''(x_0) < 0,$$

wówczas funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = x_0$ maksimum właściwe.

<u>Dowód:</u> Wobec przyjętych założeń mamy na podstawie twierdzenia Taylora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c_0)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad c_0 \in S(x, x_0)$$

Znak iloczynu

$$\frac{f''(c_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$$

zależy tylko od znaku drugiej pochodnej $f''(c_0)$, gdyż dla każdego x z otoczenia punktu $x = x_0$ drugi czynnik $(x - x_0)^2$ jest dodatni. Stąd dla $f''(x_0) > 0$ otrzymujemy nierówność (tw. o zachowaniu znaku)

$$f(x) - f(x_0) > 0, \quad \text{czyli} \quad f(x_0) < f(x),$$

a więc w punkcie $x = x_0$ jest minimum właściwe.
Gdy natomiast $f''(x_0) < 0$, wówczas

$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ czyli } f(x_0) > f(x),$$

zatem funkcja $f(x)$ osiąga w punkcie $x = x_0$ maksimum właściwe.

(ze str. 25)

przedziale
maleje

rośnie
minimum

A_1

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ założenia twierdzenia Lagrange'a, to w równości

$$f(x) - f(x_0) = f'(c).(x - x_0)$$

iloczyn . . . . jest dodatni, jeżeli

$f'(c)$ oraz $x - x_0$

są tego samego . . . .

Zatem, jeżeli $x - x_0 < 0$, to również

. . . . < 0.

Jeżeli natomiast $x - x_0 > 0$, to również

. . . .

Przejdź na str. 27 A_2

(ze str. 27)

0
< 0
minimum
lokalne
właściwe

B_1

Zwykle mówimy, że funkcja $f(x)$ różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 przyjmuje w punkcie $x = x_0$ minimum właściwe, jeżeli

$f'(x) = ...$

i gdy x rosnąc przechodzi przez punkt x_0 pochodna $f'(x)$ . . . .
z ujemnego na . . . .

Przejdź na str. 27 B_2

(ze str. 26)

A_2

Z wniosków twierdzenia Lagrange'a wiemy, że jeżeli w pewnym przedziale $x - x_0$ pochodna

$$f'(x) < 0,$$

to funkcja f(x) w tym . . . . Jeżeli natomiast w przedziale $x - x_0$ pochodna

$$f'(x) > 0,$$

to f(x) . . . . w tym przedziale.

Jeżeli pochodna funkcji w punkcie $x = x_0$ przyjmuje wartość równą zero i w otoczeniu tego punktu zmienia znak z ujemnego na dodatni, wówczas w punkcie $x = x_0$ jest . . . .

Przejdź na str. 26 B_1.

$f'(c).(x - x_0)$

znaku

$f'(c)$

$f'(c) > 0$

(ze str. 28)

B_2

Jeżeli funkcja f(x) jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i jeżeli

$$f'(x_0) = \dots\dots \quad \text{oraz} \quad f''(x_0) \dots\dots,$$

to funkcja f(x) w punkcie $x = x_0$ przyjmuje maksimum lokalne właściwe. Natomiast, jeżeli

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f''(x_0) > 0,$$

wówczas funkcja f(x) przyjmuje w punkcie $x = x_0$

. . . .

Przejdź na str. 28 do zadania.

0

zmienia

znak

dodatni

(ze str. 27)

Zadanie 4.3.1. Wykazać, że funkcja

$$y(x) = \sqrt[3]{x}$$

nie przyjmuje ekstremum.

Porównaj swoje rozwiązanie z wynikiem na stronie 29.

Zadanie 4.3.2. Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x) = 2x^2 + |x|$$

Porównaj odpowiedź z wynikiem podanym na str. 29.

(ze str. 28)

Do zadania 4.3.1. Obliczamy pochodną funkcji y(x)

$$y'(x) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}. \qquad (x \neq 0)$$

Pochodna y'(x) jest określona dla każdej wartości x różnej od zera. Stwierdzamy, że pochodna y'(x) dla wszystkich $x \neq 0$ jest dodatnia, zatem funkcja y(x) jest stale rosnąca. Z tego wynika, że nigdzie nie przyjmuje ekstremum.

Przejdź na str. 28 do zadania 4.3.2.

Do zadania 4.3.2. Należy zauważyć, że funkcja f(x) posiada pochodną w każdym punkcie $x_0 \neq 0$. W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f(x) jest ciągła. Pochodna

$$f'(x) = 4x - 1 < 0 \quad \text{dla} \quad x < 0$$

$$f'(x) = 4x + 1 > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Ponieważ pochodna funkcji f'(x) w sąsiedztwie punktu x = 0 zmienia znak z ujemnego na dodatni, gdy x rosnąc przechodzi przez 0, stwierdzamy, że badana funkcja ma minimum w punkcie $x_0 = 0$.

$$f(x)\text{min.} = f(x_0) = f(0) = 0.$$

Przejdź na str. 30 do zadania 4.3.3.

(ze str. 29)

Zadanie 4.3.3. Wskaźnik wytrzymałości W belki prostokątnej poziomo leżącej wyraża się wzorem:

$$W = \frac{1}{6} x.y^2 ,$$

gdzie x jest szerokością, y - wysokością przekroju belki.

Jak wyciąć z pnia mającego kształt walca, którego podstawa ma średnicę równą a, belkę prostokątną o największym wskaźniku wytrzymałości?

Porównaj odpowiedź z wynikiem podanym na str. 31.

Zadanie 4.3.4. Stół ma kształt koła o promieniu r = 60 cm. W jakiej odległości ponad powierzchnią stołu należy zawiesić żarówkę, aby brzeg stołu był najlepiej oświetlony?

Porównaj odpowiedź z wynikiem podanym na str. 32.

(ze str. 30)

Do zadania 4.3.3. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

(1) $$y^2 = a^2 - x^2,$$ (rys. 10)

Zatem

$$W(x) = \frac{1}{6}\,(a^2x - x^3) \quad \text{dla} \quad 0 < x < a.$$

Obliczamy przy jakich wartościach funkcja $W(x)$ może osiągnąć maksimum. $W(x)$ jest funkcją wszędzie ciągłą oraz posiada pierwszą i drugą pochodną.

Pierwsza pochodna ma postać:

$$W'(x) = \frac{1}{6}\,(a^2 - 3x^2).$$

Stąd

$$W'(x_0) = 0, \quad \text{gdy} \quad x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Obliczamy drugą pochodną funkcji $W(x)$

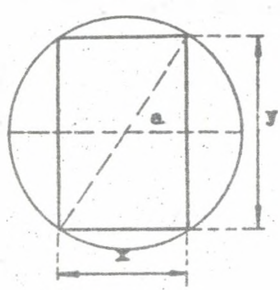
$$W''(x) = -x\ .$$

Ponieważ

$$W''(x_0) = -\frac{a}{\sqrt{3}} < 0,$$

więc funkcja $W(x)$ osiąga w punkcie $x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ maksimum.

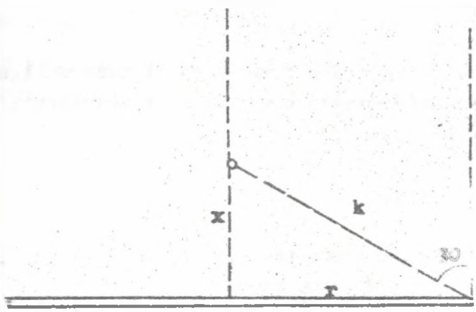
Z równania (1) obliczamy y_0. Otrzymujemy $y_0 = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.



Rys. 10

(ze str. 30)

Do zadania 4.3.4. Oświetlenie elementu powierzchni stołu jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła światła k oraz wprost proporcjonalne do cosinusa kąta podania α (rys. 11)



Rys. 11

Szukamy zatem ekstremum funkcji

$$y = \frac{\cos\alpha}{k^2}.$$

Z rys. 11 wynika, że:

$$k = \frac{r}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{r}{\sin\alpha},$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\sin^2\alpha}{r^2}.$$

Funkcję y możemy wyrazić jako funkcję kąta ,

$$y = f(\alpha) = \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha}{r^2} \tag{a}$$

Funkcja $f(\alpha)$ jest ciągła i różniczkowalna dla α z przedziału $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Wyznacz ekstremum funkcji (a).

Porównaj wyniki na str. 33.

(ze str. 32)

Do zadania 4.3.4. Ponieważ funkcja

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha . \sin^2\alpha}{r^2}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna, korzystamy dla wyznaczenia ekstremum z drugiego warunku wystarczającego ekstremum.
Obliczamy pochodną

$$f'(\alpha) = \frac{1}{r^2} \quad (-\sin^3\alpha + 2\cos^2\alpha \sin\alpha).$$

Po przekształceniu

$$f'(\alpha) = \frac{1}{r^2} \sin\alpha . (3 \cos^2\alpha - 1).$$

Dla α w podanym przedziale $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$f'(\alpha_0) = 0, \quad \text{gdy} \quad \cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Obliczamy drugą pochodną:

$$f''(\alpha) = \frac{1}{r^2} (-3 \cos\alpha \sin^2\alpha - 4\cos\alpha \sin^2\alpha + 2\cos^3\alpha).$$

Po przekształceniu

$$f''(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{r^2} . (9\cos^2\alpha - 7).$$

Dla $\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pochodna drugiego rzędu $f''(\alpha_0)$ jest ujemna, otrzymamy bowiem

$$f''(\alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{3} . r^2} (3 - 7) = \frac{-4}{r^2\sqrt{3}} < 0.$$

Zatem funkcja $f(\alpha)$ osiąga maksimum w punkcie α_0. Szukaną odległość x wyznaczamy z warunku:

$$x = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{r \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r \cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}.$$

Ostatecznie

$$x = \frac{60}{\sqrt{2}} \quad 42{,}3.$$

Odpowiedź: Żarówkę należy zawiesić na wysokości około 42 cm.

Przejdź na str. 34.

(ze str. 33)

4.4. Uogólniony warunek wystarczający ekstremum

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ posiada w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ pochodne aż do n-tego rzędu włącznie $(n > 1)$ oraz:

1) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

2) pochodna $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ jest ciągła w punkcie $x = x_0$.

Twierdzimy: Gdy n jest liczbą nieparzystą, to w punkcie $x = x_0$ nie występuje ekstremum. Gdy natomiast n jest liczbą parzystą, wówczas w punkcie $x = x_0$ występuje:

maksimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$

minimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Dowód: Uwzględniając założenia 1) i 2) w twierdzeniu Taylora otrzymujemy:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x - x_0)^n,$$

gdzie $c \in Q(x_0; \delta)$.

Jeżeli założymy, że n jest liczbą parzystą, dowód przeprowadza się analogicznie jak w przypadku, gdy $n = 2$.

Przypuśćmy obecnie, że n jest liczbą nieparzystą i załóżmy, że:

$$f^{(n)}(x_0) > 0.$$

Biorąc $x > x_0$ dostatecznie bliskie x_0 otrzymujemy:

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad (x - x_0)^n > 0,$$

stąd wniosek, że:

$$f(x) - f(x_0) > 0, \quad \text{czyli} \quad f(x) > f(x_0).$$

Przyjmując zaś, że $x < x_0$ jest dostatecznie bliskie x_0 mamy:

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad (x - x_0)^n < 0,$$

więc

$$f(x) - f(x_0) < 0, \quad \text{czyli} \quad f(x) < f(x_0)$$

Z powyższego wynika, że w otoczeniu punktu $x = x_0$ istnieją wartości funkcji $f(x)$ większe i mniejsze od $f(x_0)$, czyli w punkcie $x = x_0$ nie występuje ekstremum.

Przejdź na str. 36.

(ze str. 35)

A_1

Uogólniony warunek wystarczający ekstremum wykorzystujemy, gdy funkcja $f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ spełnia trzy założenia:

1) posiada pochodne . . . . rzędu włącznie (n . . .),

2) w punkcie $x = x_0$

$$f'(x_0) = f''(\ _0). = ... = f^{(n-1)}(x_0)$$

wszystkie są równe zero,

3) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ jest ciągła w punkcie $x = x_0$ oraz n jest liczbą . . . .

Przejdź na str. 37 A_2.

trzy

$f^{(n)}(x_0) < 0$

$f^{(n)}(x_0) > 0$

(ze str. 37)

B_1

Jeżeli funkcja $f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ ma pochodne aż . . . . (n > 1) oraz jeżeli $f'(x_0) = f''(x_0) = . . . = . . . = f^{(n-1)}(x_0 =$ = ... i n jest liczbą nieparzystą, ale $f^{(n)}(x)$ ciągła w punkcie $x = x_0$ jest . . . . . . zera, wówczas twierdzimy, że w punkcie $x = x_0$ . . . . ekstremum.

Przejdź na str. 37 B_2.

Taylora

nieparzystego

nie

występuje

aż do

n - tego

> 1

parzystą

(ze str. 36)

A_2

Jeżeli funkcja f(x) w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ spełnia te . . . . . . warunki, to twierdzimy, że funkcja f(x) w punkcie $x = x_0$ ma:

a) maksimum właściwe, gdy . . . .

b) minimum właściwe, gdy . . . .

Przejdź na str. 36 B_1)

---

do n - tego

rzędu

włącznie

0

różna od

nie

występuje

(ze str. 36)

B_2

W dowodzie tego twierdzenia korzystamy ze wzoru . . . . Wykazujemy opierając się na ciągłości $f^{(n)}(x)$, że dla n . . . . w otoczeniu punktu $x = x_0$ istnieją wartości funkcji f(x) większe i mniejsze od $f(x_0)$, zatem w punkcie $x = x_0$ . . . . ekstremum.

Przejdź na str. 36 B_1 a następnie do zadania 4.4.1. str. 38.

(ze str. 37)

Zadanie 4.4.1. Zbadać czy funkcja

$$f(x) = (x - 2)^n$$

przyjmuje w jakimś punkcie $x = x_0$ ekstremum.

Porównaj swoją odpowiedź z wynikiem na stronicy 39.

Zadanie 4.4.2. Wyznaczyć punkty, w których funkcja

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

osiąga ekstremum.

Porównaj odpowiedź z wynikiem na str. 39).

Do zadania 4.4.1. Wszystkie pochodne aż do pochodnej rzędu n-1 są w punkcie $x_0 = 2$ równe zero, a n-ta pochodna

$$f^{(n)}(x) = n!$$

jest dodatnia.

Gdy n jest parzyste, wówczas w punkcie $x_0 = 2$ istnieje minimum. Natomiast gdy n jest nieparzyste, wówczas funkcja $f(x) = (x-2)^n$ nie przyjmuje ekstremum.

Przejdź na str. 38 do zadania 4.4.2.

Do zadania 4.4.2. Punkt $x_0 = 0$ jest punktem stacjonarnym, gdyż w punkcie tym jest równa zero pochodna

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x.$$

Mamy dalej

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x \qquad f^{(4)}(0) = 4$$

Ponieważ pierwszą nie znikającą w punkcie $x_0 = 0$ pochodną jest pochodna rzędu parzystego, mamy tu ekstremum, a mianowicie minimum, bo $f^{(4)}(0) > 0$.

$$f_{min}(0) = 4$$

Przejdź na str. 39.

5. ROLA ŁĄCZENIA NAUCZANIA PROGRAMOWANEGO Z NAUCZANIEM KONWENCJONALNYM MATEMATYKI W WYŻSZEJ SZKOLE TECHNICZNEJ DLA PRACUJĄCYCH

W omawianej organizacji procesu dydaktycznego nauczanie programowane spełnia rolę p o m o c n i c z ą w przygotowaniu studentów do optymalnego korzystania z wykładu.

Dostarczone studentom teksty programowane zaznajamiały studentów z p o d s t a w o w y m i elementami określonej partii materiału nauczania oraz nie dopuszczały do narastania luk w wiedzy wskutek nieuwagi na wykładach lub ćwiczeniach, przez co przygotowywały słuchaczy do lepszej percepcji wykładu.

Natomiast g ł ó w n ą i k l u c z o w ą pozycją w całym procesie nauczania jest wykład.

Dla przygotowanych słuchaczy konwencjonalny wykład może ujmować materiał nauczania w sposób p o g ł ę b i o n y i r o z s z e r z o n y, przy równoczesnym urozmaiceniu odmiany wykładu. Dla takich studentów wykład częściej może być wykładem p r o b l e m o w y m, w którym podaje się pewne treści w postaci problemów rozwiązywanych przez wykładowcę. W wykładzie problemowym także łatwiej można ilustrować zastosowanie matematyki w rozwiązywaniu zadań z zakresu nauk technicznych.

Druga ważna odmiana wykładu to wykład p o r z ą d k u j ą c y i u t r w a l a j ą c y pewien zakres przerobionego materiału nauczania. W takim wykładzie można ująć syntetycznie wyniki cząstkowych opracowań w pewną całość.

Obie odmiany wykładów są wręcz konieczne w nauczaniu matematyki na studiach technicznych dla pracujących. Do właściwego odbioru szczególnie tych dwóch rodzajów wykładów włączenie nauczania programowanego przygotowuje audytorium.

W organizacji procesu dydaktycznego, w której włączone jest nauczanie programowane, wymagane jest bezwzględne przestrzeganie synchronizacji wszystkich trzech form zajęć dydaktycznych w danym zamkniętym cyklu. Koordynacja zajęć we wszystkich trzech formach w obrębie danego zamkniętego cyklu warunkuje podniesienie efektywności pracy dydaktycznej zarówno w aspekcie ekonomicznym, jak i dydaktycznym.

LITERATURA

[1] Berezowski E.: Maszyny dydaktyczne. PZWS, Warszawa 1968.

[2] Dróbka N.: Weryfikacja tekstów programowanych. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z- 3-4, 1968.

[3] Dąbrowska W.: Nauczanie programowane. Ruch Pedagogiczny, 1964.

[4] Fleming E.: Programowanie w procesie nauczania. Nasza Księgarnia, Warszawa 1967.

[5] Kietlińska Z.: Badania nad szkolnictwem wyższym i ich przydatność praktyczna. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z. 2-3-(6-7), Warszawa 1969.

[6] Krajewski T.: Sympozjum na temat nowych metod kształcenia w szkolnictwie wyższym NRD. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z. 1-2 (9-10), Warszawa 1970.

[7] Kupisiewicz Cz.: Nauczanie programowane PZWS, Warszawa 1966.

[8] Kupisiewicz Cz.: Metody programowania. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z. 1, Warszawa 1978.

[9] Leja L.: Nauczanie programowane we Francji. "Życie Szkoły Wyższej", z. 6/7 Warszawa 1967.

[10] Leja L.: Kształcenie pedagogiczne asystentów w zakresie nowoczesnego nauczania w Uniwersytecie Poznańskim. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z. 1, Warszawa 1968.

[11] Mazur N.: Nauczanie programowane. "Kwartalnik Pedagogiczny". Nr 1, 1964.

[12] Nowacki T.: Nauczanie programowane w pracach Katedry Dydaktyki Wojskowej WAP. "Życie Szkoły Wyższej", nr 6-7, 1967.

[13] Okoń W.: Nauczanie konwencjonalne a nauczanie programowane. "Życie Szkoły Wyższej", z. 6/7, Warszawa 1967.

[14] Okoń W.: U podstaw problemowego uczenia się. PWN, Warszawa 1965.

[15] Okoń W.: Środki dydaktyczne i ich unowocześnienia. "Dydaktyka Szkoły Wyższej", z. 1, Warszawa 1968.

[16] Pankiewicz S.: Z badań nad organizacją pracy studentów z podręcznikiem programowanym. "Dydaktyka Szkoły Wyższej" nr 4, Warszawa 1967.

[17] Przyjemski J.: Programowane nauczanie matematyki w szkole wyższej. "Życie Szkoły Wyższej" nr 6-7, Warszawa 1967.

[18] Skinner B.F.: The Analysis of Bahavior, New York 1961.

[19] Zborowski J., Czosnowska A.: U podstaw modernizacji procesu dydaktycznego w uczelni wyższej. "Dydaktyka Szkoły Wyższej" z. 2-3 (6-7), Warszawa 1969.

WŁĄCZENIE TEKSTÓW PROGRAMOWANYCH DO PROCESU NAUCZANIA MATEMATYKI NA STUDIACH TECHNICZNYCH DLA PRACUJĄCYCH

S t r e s z c z e n i e

Przedmiotem pracy jest organizacja procesu nauczania matematyki z włączeniem tekstów programowanych. Zbadano bowiem empirycznie, że w procesie nauczania matematyki utworzenie z jednostek metodycznych:

praca studentów nad tekstem programowanym,
wykład,
ćwiczenia tablicowe,

cyklu zamkniętego przyczynia się w wysokim stopniu do efektywnego zdobywania przez studentów operatywnej wiedzy. Omówiono konstruowanie tekstów programowanych metodą blokową, podano schemat strukturalny programu oraz przykładowy tekst programowany.

ВКЛЮЧЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАННЫХ ТЕКСТОВ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ НА ВЕЧЕРНЕМ И ЗАОЧНОМ ОТДЕЛЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе описана организация процесса преподавания математики с использованием программированных текстов. Эмпирическим путем было установлено, что создание в процеосе обучения математике из следующих методических единиц:

работа студентов над программированным текстом,
лекция,
упражнения с таблицами

замкнутого цикла в значительной мере способствует эффективному приеваиванию студентами оперативных знаний.
Представлен способ подготовки программированных текстов системой блоков, приведена структурная схема программы, а также дан пример такого текста.

INCLUSION OF PROGRAMMABLE TEXTS TO THE TEACHING PROCESS OF MATHEMATICS FOR TECHNICAL EVENING STUDENTS

S u m m a r y

The organization of the educational process of mathematics including programmable texts is discussed. The closed cycle consisting in the methodical units such as students works with the programmable text
lecture
classes
' s been empirically found to be efficient way of teaching students. Texts esign by a block technique is described. The structural scheme of the program and an examplary programmable text are given.