ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Marian PALEJ
Anna POGONOWSKA

O RELACJACH ZACHODZĄCYCH POMIĘDZY RZUTAMI TZW. STOŻKOWYCH ŚRODKÓW I STOŻKOWYCH PODSTAWOWYCH

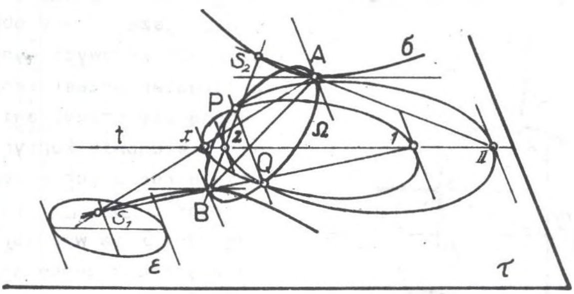
Streszczenie. W pracy kontynuowane są rozważania na temat rzutowania dowolnej stożkowej Ω , tzw. stożkowej podstawowej na pęk okręgów leżących w płaszczyźnie $\tau \not\parallel \Omega$.

Wiadomo, że miejscem geometrycznym takich środków rzutów jest tzw. stożkowa środków.

Szczegółowo rozpatrzono wzajemne położenia rzutów na τ stożkowej podstawowej i stożkowej środków dowodząc, na podstawie rozważań przestrzennych, że są one współosiowe i ortogonalne. Zanalizowano również szczególne przypadki rzutów stożkowej środków - hiperbolę równoboczną oraz parabolę przystającą do stożkowej podstawowej.

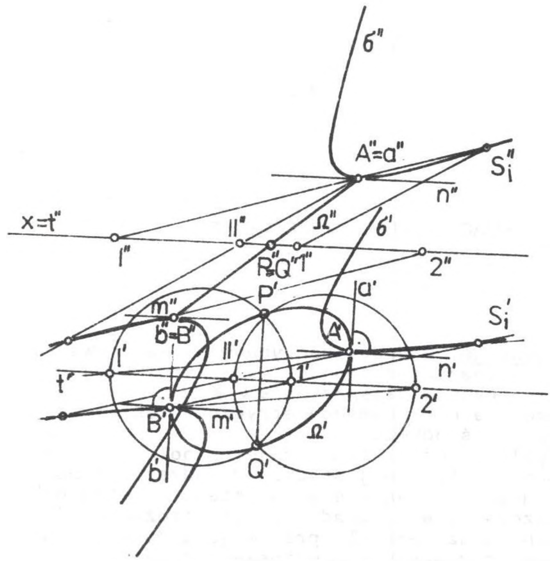
Rozważania uzupełniono wnioskami dotyczącymi ogólniejszego przypadku, tj. rzutowania stożkowej podstawowej na pęk stożkowych środkowo-podobnych.

W pracy [1] omówiono tworzenie i rodzaje tzw. stożkowych środków, z których rzuty zadanej krzywej stopnia drugiego Ω tzw. stożkowej podstawowej na dowolną płaszczyznę τ (różną od podstawy Ω i nierównoległą do niej) są krzywymi środkowo-podobnymi do dowolnie obranej stożkowej ε (rys. 1).



Rys. 1

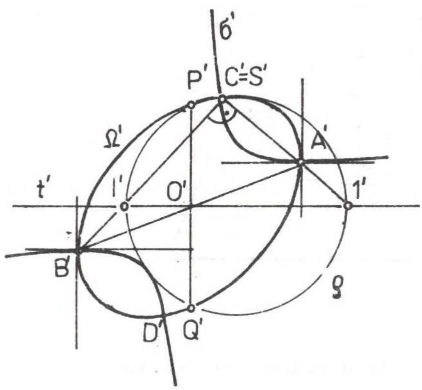
Ograniczając się do przypadku rzutowania stożkowej podstawowej na okręgi (rys. 2) zanalizujmy wynikające stąd relacje zachodzące w płaszczyźnie τ. W tym celu załóżmy, że stożkowa podstawowa Ω oraz stożkowa



Rys. 2

środków σ zostały zrzutowane np. prostokątnie na płaszczyznę τ. Jest jasne, że poszczególne punkty stożkowej σ' - S_i' są wówczas środkami kolineacji przekształcających stożkową Ω' na pęk okręgów. Punktami podstawowymi tego pęku są rzeczywiste lub urojone punkty P', Q' przecięcia rzutnią τ stożkowej Ω, a osią wszystkich kolineacji - prosta PQ.

Wzajemne położenie stożkowych Ω' i σ' badał T. Dyduch [2], wykazując, na drodze rozważań płaskich, że są to krzywe współosiowe i ortogonalne. W niniejszej pracy obydwie własności tych krzywych wyprowadzone będą z rozważań przestrzennych, które wydają się przedstawiać drogę prostszą i stanowią kontynuację zagadnień poruszonych w rozprawie [1].



Rys. 3

Z prac [3], [1] wiadomo, że stożkowe Ω i σ są współśrodkowe i przechodzą przez końce wspólnej średnicy AB (rys. 1, 2). Wobec tego w rzucie na płaszczyznę τ (rys. 3) stożkowe Ω' i σ' przecinać się będą w punktach A' i B', a ponadto w dalszych dwóch punktach C' i D' środkowo-symetrycznych. Rozważmy jeden z tych punktów, np. C' i zauważmy, że jest to rzut wierzchołka S jednego ze stożków rzutujących stożkową podstawową Ω na okręgi pęku (PQ)[x]. Wprowadźmy okrąg ϱ określony punktami $C'P'Q'$. Jest to okrąg, na który rzutuje się stożkową Ω z punktu S' (ponieważ zgodnie z założeniem $S' = C'$ tworząca SS' rzutuje na τ określony punkt stożkowej Ω - C). Zgodnie z definicją tworzenia stożkowej środków punkty przecięcia okręgu ϱ z prostą t (rys. 3) zrzutowane z punktów A' i B' winny wyznaczyć promienie $A'1'$, $B'I'$ przecinające się w punkcie stożkowej środków, a więc w C'. Ponieważ $C' \in \varrho$ wynika stąd natychmiast, że:

$$C'B' \perp C'A' \tag{1}$$

oraz

$$\overline{C'O'} = \overline{O'D'} \tag{2}$$

Z równości (1) i (2) wnosimy, że punkty $A'B'C'D'$ są wierzchołkami prostokąta, co oznacza, że obydwie stożkowe σ' i Ω' opisane są na wspólnym prostokącie. Kierunki boków tego prostokąta ustalają kierunki osi, a ponieważ obydwie stożkowe mają wspólny środek, są one współosiowe.

Wróćmy jeszcze do rys. 2. Widać, że styczne do stożkowej Ω w punktach A i B - proste a i b mają kierunek prostopadły do rzutni pionowej. Z drugiej strony proste m,n, przechodzące przez punkty A i B równolegle do osi t, są stycznymi stożkowej środków w tych punktach (każda z tych prostych jest promieniem pęku (A) lub (B) odpowiadającym promieniowi AB).

Ponieważ $t \parallel \pi_2$, stąd $m,n \perp a,b$. Wobec jednoczesnej równoległości $a,b,m,n \parallel \pi_1$ zachodzi:

$$a' \perp m', \quad b' \perp n' \tag{3}$$

Oznacza to, że rzuty stożkowych Ω i σ przecinają się w punktach A' i B' pod kątem prostym. Ponieważ jednak, zgodnie z wcześniejszym rozumowaniem, stożkowe Ω' i σ' są współosiowe, wynika stąd natychmiast, że są one również ortogonalne.

Postawmy jeszcze pytanie czy i w jakim przypadku stożkowa środków może być stożkową o szczególnych własnościach miarowych: okręgiem lub hiperbolą równoboczną.

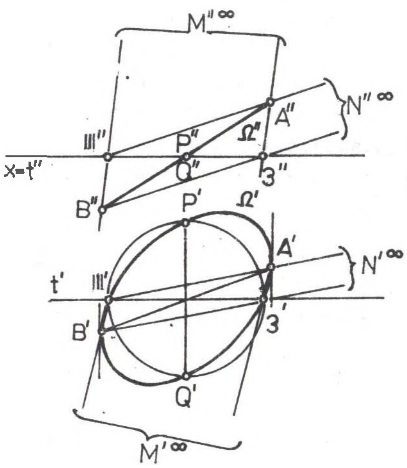
Odpowiedź na pytanie pierwsze wynika wprost z ortogonalności krzywych Ω' i σ'. W zbiorze stożkowych ortogonalnych do danej hiperboli σ' nie ist-

---

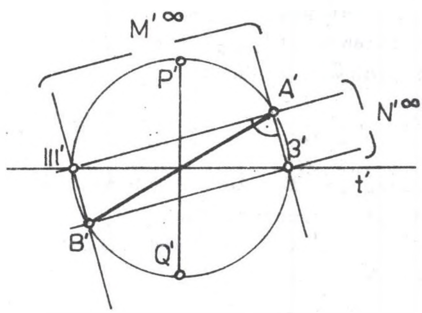
x) W rys. 2 i dalszych przyjęto, że punkty P i Q, w których stożkowa przebija rzutnię, są końcami średnicy tej stożkowej. Założenie takie nie zmniejsza jednak ogólności rozważań, gdyż dla określonego ustawienia rzutni τ, równoległe jej przesunięcie do położenia $\tau_1 \parallel \tau$, w którym punkty P_1, $Q_1 = \tau \cap \Omega$ stanowią końce cięciwy a nie średnicy, nie zmienia stożków rzutujących i zachowuje przecięcie ich rzutnią w pęku okręgów (por. również (2)).

nieje okrąg, gdyż normalna w dowolnym punkcie okręgu jest jego średnicą; gdyby więc w jakimś punkcie hiperboli przecinał się z nią ortogonalnie współśrodkowy okrąg Ω', wówczas styczna do hiperboli w tym punkcie musiałaby przechodzić przez środek tejże hiperboli, co przeczyłoby definicji klasy tej krzywej (oprócz asymptot - przez środek przechodziłaby trzecia styczna!).

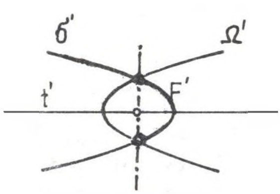
W odniesieniu do pytania drugiego przeprowadźmy następujące rozumowanie. Niech na rys. 4 odcinek $3''III''$ reprezentuje rzut pionowy jednego z okręgów pęku (PQ). Zachodzi oczywiście relacja: $\overline{PQ} = \overline{3III}$. Proste $A3 \parallel BIII$ i $AIII \parallel B3$ wyznaczają punkty stożkowej środków, a więc kierunki asymptot hiperboli σ. Relacja ta zachowuje się oczywiście i w rzucie na τ (rys. 5), tj. proste $A'3' \parallel B'III'$ oraz $A'III' \parallel B'3'$ wyznaczają kierunki asymptot hiperboli σ'. Aby hiperbola σ' była równoboczna, żądamy warunku $A'3' \perp \overline{B'3'}$, tj. by punkt $3'$ (a także III') leżał na okręgu o średnicy $A'B'$, wówczas $\overline{A'B'} = \overline{3'III'}$. Wynika stąd, że środkowa stożkowa środków σ' będzie hiperbolą równoboczną, kiedy w stożkowej podstawowej (elipsie) średnica leżąca na osi kolineacji lub do niej równoległa jest tej samej długości co sprzężona z nią średnica $P'Q'$.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Warto jeszcze zauważyć dwa przypadki:

1) stożkowa σ' może być prostą - ma to miejsce wówczas, kiedy stożkowa Ω przecina się z rzutnią τ w osi (lub cięciwie do niej równoległej). Wtedy: $C' \equiv B'$ a także $D' \equiv A'$,

2) w przypadku kiedy stożkowa podstawowa jest parabolą (o osi nierównoległej do τ), stożkowa σ' jest również parabolą. Może się

zdarzyć, że obydwie stożkowe Ω' i σ' będą przystające. Ma to miejsce wówczas, gdy punkty przecięcia się parabol są współliniowe ze wspólnym ich ogniskiem (rys. 6).

Uzupełniając powyższe wywody warto wspomnieć, że dla przypadku rzutowania stożkowej podstawowej nie na pęk okręgów lecz na pęk stożkowych środkowo-podobnych do dowolnie zadanej krzywej stopnia drugiego (zgodnie z pracą [1]) wnioski odnośnie do wzajemnego położenia stożkowych Ω' i σ' są mniej szczególne. Z analogicznych do wyżej rozważań można wnosić, że stożkowe te posiadają zawsze wspólną parę średnic sprzężonych (w miejsce osi). Kierunek jednej z nich jest kierunkiem PQ (a więc osi kolineacji). Ustalenie takie eliminuje oczywiście możliwość przyjęcia przez stożkową σ' postaci okręgu.

LITERATURA

[1] Pogonowska A.: Stożkowe środkowo-podobne jako rzuty krzywych stopnia drugiego i kwadryk krzywoliniowych. Praca doktorska, Gliwice 1985.

[2] Dyduch T.: O współosiowych przekształceniach środkowo-kolineacyjnych w (E^3). Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 1986 (w druku).

[3] Tran Van Nam: Podstawy geometryczne konstrukcji powłokowych i sugestie ich zastosowania ew ewpółczesnym budownictwie Wietnamu. Rozprawa doktorska, Kraków 1982.

О ВЗАИМНОМ ПОЛОЖЕНИИ ПРОЕКЦИЙ ТАК НАЗЫВАЕМЫХ КРИВЫХ ЦЕНТРОВ
И КРИБЫХ НАЧАЛЬНЫХ 2-Й СТЕПЕНИ

Р е з ю м е

В работе продолжается рассуждения в области проектирования произвольной кривой 2-й степени Ω так называемой начальной кривой на пучок окружностей лежащих в плоскости $\tau \nparallel \Omega$.

Известно, что геометрическое место центров таких проекций являестя кривой 2-й степени - так называемой кривой центров.

В подробности рассмотрено взаимное положение пргекций на τ начальной кривой Ω и кривой центров σ и доказано, на основе пространственных рассуждений, что обе кривые соосевые и ортогональные.

Проанализированы также особенные случаи проекций кривой центров - равносторонная гипербола и парабола пристающая к начальной кривой 2-й степени.

Рассуждения дополнены выводами касающимися общего случая - проектирования начальной кривой на пучок гомотетических кривых 2-й степени.

ON RELATIONS BETWEEN PROJECTIONS OF THE SO CALLED CONIC CENTRES AND BASIC CONIC

S u m m a r y

The paper deals with projection of a conic Ω the so called basic conic into a pencil of circles lying on the plane $\tau \not\ni \Omega$. It is known, that centres of such projections are coinciding with a conic the so called conic centres.

Reciprocal situation of projections of basic and conic centres has been considered and it is proved on the ground of space consideration, that those projections have common axes and are orthogonal.

Special cases of projection of conic centres - regular hyperbola and parabola congruent to the basic conic have been analysed. Considerations have been completed with conclusions concerning general case - projection of basic conic onto a pencil of homotetic conics.