ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Anna POGONOWSKA

ELEMENTY OKREŚLAJĄCE STOŻKOWE ŚRODKÓW PRZY RZUTOWANIU STOŻKOWEJ NA PĘK OKRĘGÓW

Streszczenie. Artykuł zawiera rozwinięcie twierdzenia sformułowanego przez Tran Van Namà w jego pracy doktorskiej.

Rozwiązane zostało zagadnienie dotyczące tzw. stożkowych środków przez analizę i konstrukcję określających je elementów, w szczególności asymptot hiperboli, osi paraboli i średnic sprzężonych elipsy.

W konstrukcji asymptot hiperboli środków rozważono równoległe przesunięcie rzutni do położenia incydentnego ze środkiem stożkowej podstawowej. Przesunięcie to zachowuje zbiór stożków rzutujących, nie zmieniając charakteru ich przekroju rzutnią.

W konstrukcji osi paraboli środków wykorzystano symetrię prostokątną o znanym kierunku osi.

Przy wyznaczeniu średnic sprzężonych elipsy środków konstrukcja oparta jest na własności czwórki harmonicznej.

Tran Wan Nam w swojej pracy doktorskiej [1] sformułował i udowodnił następujące twierdzenie:

"w przestrzeni istnieje stożkowa - miejsce geometryczne środków rzutów - z których rzuty stożkowej na daną płaszczyznę są okręgami".

Dowód tego twierdzenia oparty był na własnościach miarowych okręgu. Dowód ten przeprowadzić można w sposób bardziej ogólny, rzutowy, a w wyniku sformułować twierdzenie precyzyjniejsze:

"w przestrzeni istnieje stożkowa - miejsce geometryczne środków rzutów - z których rzuty stożkowej na daną płaszczyznę tworzą pęk okręgów".

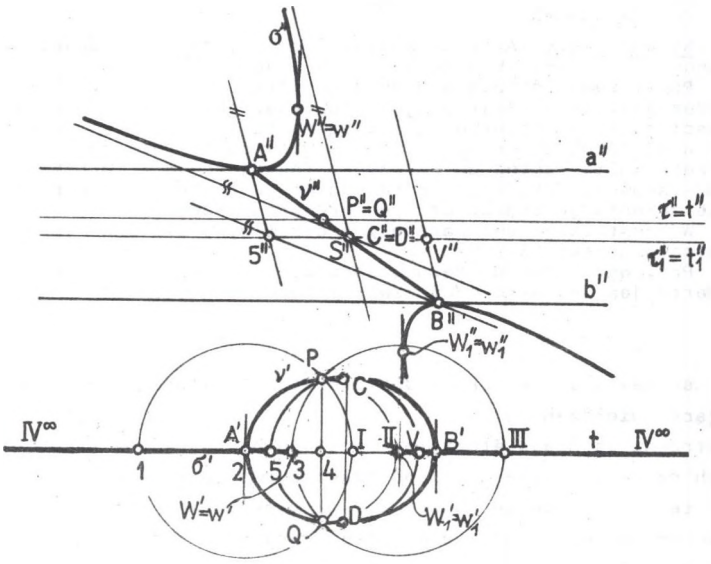
W dalszym ciągu stożkową rzutowaną na pęk okręgów nazywać będziemy stożkową podstawową ϑ, a miejsce geometryczne środków rzutów, czyli zbiór wierzchołków odpowiednich stożków rzutujących - stożkową środków. Na drodze rzutowej [1], [2] łatwo można wykazać, iż stożkowa środków jest utworem dwóch inwolucyjnych pęków prostych i stanowi:

hiperbolę - jeżeli stożkowa podstawowa jest elipsą,
parabolę - jeżeli stożkowa podstawowa jest parabolą,
elipsę - jeżeli stożkowa podstawowa jest hiperbolą.

Rysunek 1 przedstawia konstrukcję rzutów elipsy jako stożkowej podstawowej na pęk okręgów leżących w płaszczyźnie τ. Punktami podstawowymi pęku są punkty przecięcia stożkowej podstawowej płaszczyzną τ (P i Q). Roz-

ważmy inwolucyjne pary punktów 1I, 2II, 3III itd., w których oś pęku przecina poszczególne okręgi pęku.

W kolejnym rzutowaniu pary te pokrywają się z rzutami końców AB średnicy elipsy sprzężonej z kierunkiem PQ[x]. Oznacza to, że wierzchołkami inwolucyjnych pęków prostych tworzących stożkową środków są punkty A i B. Ponieważ w inwolucji punktów 1,2,3,...I,II,III,... punktowi 4 leżącemu na przecięciu osi pęku z prostą PQ odpowiada punkt - niewłaściwy IV∞, wynika stąd, iż styczne do stożkowej środków w punktach A i B będą do siebie równoległe.



Rys. 1

Wnosimy stąd natychmiast, iż AB jest również średnicą stożkowej środków, a jej środek - środkiem tejże stożkowej.

W rozpatrywanym przykładzie na rys. 1 stożkowa środków jest hiperbolą.

Wyznaczmy jej asymptoty [2]. W tym celu ustalmy takie odpowiadające sobie promienie pęków (A) i (B) [na rys. 1 pęków (A'') i (B'')], które przecinają się w punktach niewłaściwych. Zauważmy, że przy równoległym przesuwaniu płaszczyzny τ (z zachowaniem jej wyjściowego ustawienia) stożki rzutujące stożkową podstawową będą przecinane nadal przez tę płaszczyznę w pęku okręgów. Zmieniać się będą jedynie punkty podstawowe tych pęków jako punkty przecięcia stożkowej podstawowej rzutnią τ.

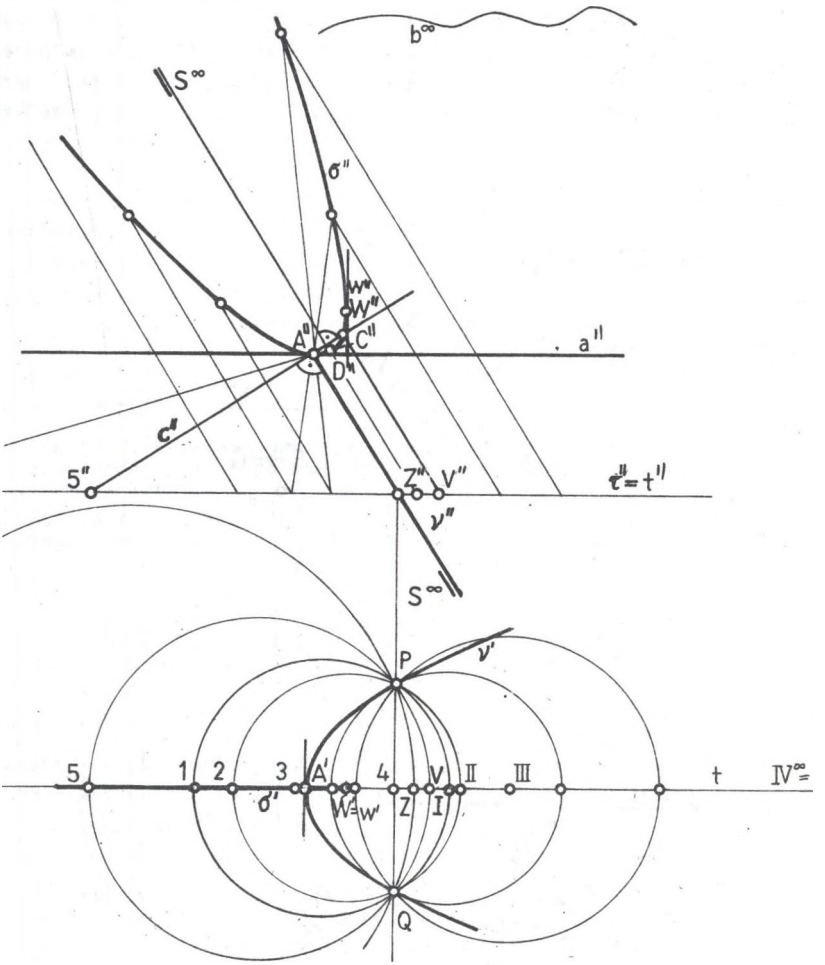
---

x) Wynika to z warunku równoległości do PQ stycznych do elipsy w punktach A B oraz stycznych do okręgów w punktach stanowiących rzuty końców A B.

Przysuńmy zatem płaszczyznę τ do położenia τ_1, tj. tak, aby przechodziła ona przez środek S. Punkty podstawowe pęku okręgów w tym położeniu są końcami C i D średnicy sprzężonej z AB. Jeżeli rozważymy okrąg pęku o średnicy CD i jego punkty przecięcia z osią t - 5,V, otrzymamy na skutek symetrii równoległość promieni $A5 \parallel BV$ oraz $AV \parallel B5$. Punkty niewłaściwe $A5 \cap BV$ i $AV \cap B5$. ustalają kierunki asymptot hiperboli środków.

Rysunek 2 ilustruje konstrukcje rzutowania na pęk okręgów (o punktach podstawowych P, Q) paraboli o wierzchołku A i środku S^{∞}.

Wyznaczmy oś drugiej paraboli stanowiącej w tym przypadku stożkową środków. Zauważmy, iż środek obydwu parabol, podobnie jak w przypadku po-



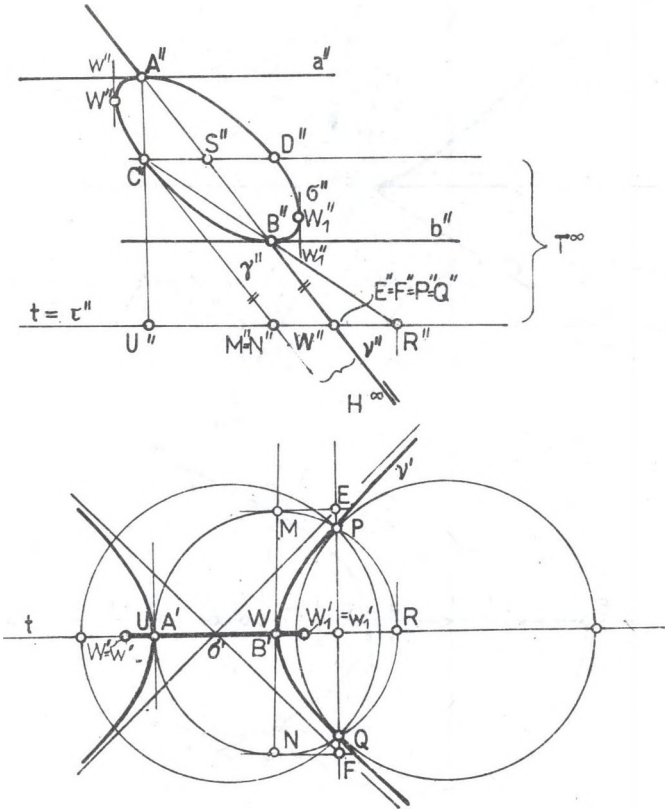
Rys. 2

przednim, jest wspólny, a co za tym idzie, znany jest kierunek szukanej osi. Wiadomo również, iż parabola środków przechodzi przez punkt A.

Zadanie sprowadzić więc można do wyznaczenia punktu C paraboli odpowiadającego w symetrii prostokątnej punktowi A. Oś symetrii odcinka AC jest szukaną osią paraboli.

Konstrukcja punktu C wymaga jedynie wykreślenia promienia o pęku (A) o kierunku prostopadłym do AB. Ustalenie punktu $c \cap t = 5$ oraz wprowadzenie promienia SV odpowiadającego w pęku (S^{∞}) promieniowi c wyczerpuje konstrukcję.

W przypadku rzutowania na pęk okręgów hiperboli (rys. 3) konstruować będziemy średnice sprzężone elipsy środków [2]. Na wstępie przypomnimy, iż jedną z tych średnic jest średnica hiperboli AB. Aby skonstruować sprzężoną z nią średnicę CD (o znanym kierunku T^{∞} ustalonym przez styczne w punktach A i B) uwzględnimy następujące rozumowanie. Dana jako hiperbola, stożkowa podstawowa leży na powierzchni każdego ze stożków



Rys. 3

rzutujących ją na pęk okręgów. Wierzchołki tych stożków są punktami stożkowej środków. Szukając zatem np. punktu C średnicy CD, szukamy wierzchołka odpowiedniego stożka. Wiemy przy tym, iż jego kierującą jest jeden z okręgów pęku (PQ), a przekrój płaszczyzną równoległą do danej stożkowej podstawowej (hiperboli) i przechodzącą przez wierzchołek C - parą tworzących równoległych do asymptot hiperboli.

Załóżmy, iż znany jest nam punkt C (rys. 3). Wprowadźmy harmoniczną czwórkę promieni pęku (C) CA, CB, CS, CH^{∞}. Czwórka ta przecina oś t pęku okręgów w harmonicznej czwórce punktów U, R, T^{∞}, W, przy czym, uwzględniając stożek rzutujący, dwa z nich to punkty przecięcia jego kierującej osią t, pozostałe - środek kierującej i punkt niewłaściwy.
O stożku tym ponadto wiemy, iż tworzące leżące w płaszczyźnie równoległej do stożkowej podstawowej (rys. 3) przecinają kierującą w końcach średnicy. Ponieważ znany jest także kierunek tworzących, a wysokość wierzchołka C odpowiedniego stożka jest równa wysokości środka hiperboli, położenie tego wierzchołka da się łatwo ustalić.

Wystarczy rozważyć okręg pęku (PQ) o takiej średnicy MN, której długość jest równa odcinkowi EF wyciętemu przez rzutnię na asymptotach danej hiperboli.

Wynikająca stąd konstrukcja kierującej nie wymaga komentarza. Punkt C leży w przecięciu promieni UA i RB.

LITERATURA

[1] Tran Van Nam: Podstawy geometryczne konstrukcji powłokowych i sugestie ich zastosowania we współczesnym budownictwie Wietnamu. Praca doktorska, Kraków 1982.

[2] Pogonowska A.: Stożkowe środkowo-podobne jako rzuty krzywych stopnia drugiego i kwadryk krzywoliniowych. Praca doktorska, Warszawa 1985.

ЭЛЕМЕНТЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОНУСНЫЕ СЕЧЕНИЯ ЦЕНТРОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНУСНЫХ НА ПУЧЁК ОКРУЖНОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе представлено уточнение теоремы, поставленной Тран Ван Намой в его кандидатской диссертации. Решено задание определения некоторых элементов т.н. конусных сечений центров, в частности ассимптот гипербола, оси парабола и диаметров эллипса. В конструкции ассимптот гипербола центров, рассмотрено параллельное движение площади проекции к положению, принадлежащему центру основного эллипса. Такое движение сохраняет множество проектирующих конусов и вид пересечения их поверхностью проекции. В конструкции оси парабола центров использована прямоугольная симметрия при данном направлении. При определении сопряженных диаметров эллипса центров, конструкция основывалась на свойствах гармонической четвёртки.

ELEMENTS DEFINING CONIC CENTRES BY PROJECTION
OF THE CONIC ONTO PENCIL OF CIRCLES

S u m m a r y

The paper specifies Tran Van Nams theorem determined in his D.S_c. thesis. The problem of the so called conic centres has been solved due to the analysis and construction of the elements that determine those centres; i.e. the asymptotes of hyperbola, axis of parabola and conjugate diameters of ellipse.

In the construction of asymptotes of hiperbola centres there has been considered the parallel shift of the plane of projection to the incidental with centre of projected conic position. This shift keeps the set of projective cones not changing the character of their section by plane of projection.

Rectangular symmetry when the axis direction is known has been used in the construction of parabola centres.

While determining conjugate diameters of ellipse centres the construction is based on the feature of harmonic four.