ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Grażyna KOZŁOWSKA

TWIERDZENIA APROKSYMACYJNE W PEWNYCH FUNKCYJNYCH PRZESTRZENIACH FRÉCHETA

Streszczenie. W pracy udowodniono pewne twierdzenia aproksymacyjne, w których funkcje z przestrzeni L^{Φ} aproksymowane są wielomianami trygonometrycznymi. Udowodniono również w przestrzeni L^{Φ} nierówność typu Bernsteina-Zygmunda. Uzyskano w ten sposób uogólnienie wyników Iwanowa [1].

1. Wstęp

Niech Φ będzie funkcją ciągłą, niemalejącą, określoną dla $s \geqslant 0$, taką, że $\Phi(0) = 0$, $\Phi(s) > 0$ dla $s > 0$ i $\Phi(s_1+s_2) \leqslant \Phi(s_1) + \Phi(s_2)$.

L^{Φ} niech oznacza przestrzeń liniową funkcji f mierzalnych, okresowych o okresie 2π, prawie wszędzie skończonych, dla których

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} \Phi(|f(x)|)dx < \infty \text{ z metryką } \varrho(t,\varphi) = \|f-\varphi\| \quad (f,\varphi \in L^{\Phi}).$$

Przestrzeń L^{Φ} jest przestrzenią Frécheta z F-normą $\| \ \|$ ([2]).

Niech T_n będzie wielomianem trygonometrycznym stopnia $\leqslant n$ $(n \geqslant 0)$.

Niech $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$ i $\psi(\alpha) = \sup\limits_{s>0} \frac{\Phi(\alpha s)}{\Phi(s)}$ dla $\alpha \geqslant 0$.

Oczywiste są następujące własności funkcji:

1) $\psi(\alpha\beta) \leqslant \psi(\alpha)\psi(\beta)$, $(\alpha,\beta \geqslant 0)$,

2) dla $n \in N$ $\psi(n) \leqslant n$,

$\psi(nt) \leqslant n\psi(t)$ $(t \geqslant 0)$,

$\psi(1) = 1$,

$\psi(\frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{n}$,

3) $\Phi(\alpha\beta) \leqslant \Phi(\alpha)\psi(\beta)$, $\Phi(\alpha\beta) \leqslant \psi(\alpha)\Phi(\beta)$ $(\alpha,\beta \geqslant 0)$,

4) ψ jest funkcją niemalejącą.

2. Twierdzenia aproksymacyjne

Niech $f \in L^{\Phi}$. Przyjmijmy oznaczenia $E_n(f)_{\Phi} = \inf_{T_n} \| f - T_n \|$,

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} f(x+ih)$$

oraz dla $\delta > 0$ $\omega_k(f\delta)_{\Phi} = \sup_{|h| \leq \delta} \| \Delta_h^k f \|$.

Funkcję $f' \in L^{\Phi}$ nazywamy pochodną funkcji $f \in L^{\Phi}$ w sensie metryki przestrzeni L^{Φ}, jeśli $\lim_{h \to 0} \| \frac{\Delta_h^1 f}{h} - f' \| = 0$.

Lemat 1 [2] zapewnia istnienie elementu najlepszego przybliżenia funkcji $f \in L^{\Phi}$.

Z własności funkcji Φ i twierdzenia Beppo-Leviego wynika prawdziwość następującego lematu:

Lemat 1

Jeśli $f_i \in L^{\Phi}$ $(i = 1,2,\ldots)$, to $\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i \|$.

Lemat 2

Jeśli dla pewnego $p \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{i^p}) < \infty$, to dla $n \geq 1$, $h \in R$, i $h \neq 0$

$$\| \frac{\Delta_h^1 T_n}{h} \| \leq C_{\varphi}^1 \varphi(n) \| T_n \|, \text{ gdzie } C_{\varphi}^1 \text{ jest stałą zależną od } \varphi.$$

Dowód

Z [2] (str. 282) wiadomo, że $\left| \frac{\Delta_h^1 T_n(x)}{h} \right| \leq n(l+1) \Big\{ T_n(x+h) + \sum_{i=0}^{2n(l+1)} S_{nl}(x_i) |T_n(x+x_i)| \Big\}$ dla $x_i = \frac{2\pi i}{2n(l+1)+1}$ $i = 0,1,\ldots,2n(l+1)$,

$l \in N$ i $S_{nl}(x) = \left(\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{(n+1)\sin \frac{x}{2}} \right)^{2l}$.

Stąd $\| \frac{\Delta_h^1 T_n}{h} \| \leq \int_0^{2\pi} \Big[n(l+1) \Big\{ |T_n(x+h)| + \sum_{i=0}^{2n(l+1)} S_{nl}(x_i) |T_n(x+x_i)| \Big\} \Big] dx \leq$

$$\leq (l+1)\varphi(n) \Big\{ \int_0^{2\pi} \Phi(|T_n(x+h|)dx + \sum_{i=0}^{2n(l+1)} \varphi(S_{nl}(x_i)) \int_0^{2\pi} \Phi(|T_n(x+x_i)|)dx \Big\} \leq$$

$$\leq (l+1)\varphi(n) \Big\{ 1 + \sum_{i=0}^{2n(l+1)} \varphi(S_{nl}(x_i)) \Big\} \| T_n \|.$$

Wybierając odpowiednio $l=l_\varphi$, otrzymujemy $1+\sum_{i=0}^{2n(l+1)} \varphi(S_{nl}(x_i)) \leqslant C^2_\varphi$

gdzie C^2_φ jest stałą zależną od φ (patrz lemat 6 [2], ss. 202-203).

Stąd $\left\| \frac{\Delta^1_h T_n}{h} \right\| \leqslant C^1_\varphi \varphi(n) \| T_n \|$.

Z lematu 2, po zastosowaniu twierdzenia Lebesgue'a o przejściu do granicy pod znakiem całki, otrzymuje się natychmiast nierówność Bernsteina-Zygmunda.

Nierówność Bernsteina-Zygmunda

Jeśli dla pewnego $p \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{i^p}) < \infty$, to dla $n \geqslant 1$ $\| T'_n \| \leqslant C_\varphi \varphi(n) \| T_n \|$, gdzie C_φ jest stałą zależną od φ.

Stąd indukcyjnie otrzymujemy odpowiednią nierówność dla pochodnych rzędów wyższych. Zatem dla każdego $r \in N$

$$\| T^{(r)}_n \| \leqslant \tilde{C}_\varphi \varphi^r(n) \| T_n \|. \tag{1}$$

Łatwo zauważyć, że dla $r \in N$ oraz $i \in N$, $i > 1$ prawdziwe są nierówności (*) i (**).

$$(*) \quad [\varphi(2^i)]^r E_{2^{i-1}}(f) \leqslant 2^{2r-1} \sum_{\mu=2^{i-2}+1}^{2^{i-1}} \frac{[\varphi(\mu)]^r}{\mu} E_\mu(f)_\Phi.$$

$$(**) \quad \sum_{k=m+2}^{\infty} [\varphi(2^k)]^r \| T_{2^k} - T_{2^{k-1}} \| \leqslant 2^{2r} \sum_{\mu=2^m+2}^{\infty} \frac{[\varphi(\mu)]^r}{\mu} E_\mu(f)_\Phi.$$

Twierdzenie 1

Jeśli $f \in L^\Phi$, $E_n(f)_\Phi = \| f - T_n \|$ i dla pewnych naturalnych $p, r \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{i^p}) < \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\varphi(n)]^r}{n} E_n(f)_\Phi < \infty$, to funkcja f ma pochodną r-tego rzędu w sensie metryki przestrzeni L^Φ i dla $n \geqslant 1$

$\| f^{(r)} - T^{(r)}_n \| \leqslant C_{\varphi,r} \left\{ \varphi^r(n) E_n(f)_\Phi + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^r(\mu)}{\mu} E_\mu(f)_\Phi \right\}$, gdzie $C_{\varphi,r}$ jest stałą zależną od φ i r.

Dowód

Z założenia $\| T_{2^i} - T_{2^{i-1}} \| \leqslant 2\varepsilon_{2^{i-1}}(f)_\Phi$.

Łatwo zauważyć, że $f = T_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (T_{2^i} - T_{2^{i-1}}) = \sum_{i=0}^{\infty} t_{2^i}$, gdzie zbieżność rozumiana jest w sensie metryki przestrzeni L^Φ.

Pokażemy, że dla $l = 1,2,\ldots,r$ istnieją funkcje $\varphi_l \in L^\Phi$ takie że $\varphi_l(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{(l)}_{2^i}(x)$ i $\varphi_l(x) = f^{(l)}(x)$.

Z lematów ,1,2 i nierówności Bernsteina-Zygmunda otrzymujemy:

$$\left\| \frac{\Delta_h^1 f}{h} - \varphi_1 \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta_h^1 t_{2^i}}{h} - \sum_{i=0}^{\infty} t'_{2^i} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} \left\| \frac{\Delta_h^1 t_{2^i}}{h} - t'_{2^i} \right\| + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\left\| \frac{\Delta_h^1 t_{2^i}}{h} \right\| + \| t'_{2^i} \| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} \left\| \frac{\Delta_h^1 t_{2^i}}{h} - t'_{2^i} \right\| + C^3_\varphi \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi(2^i) \| t_{2^i} \|. \tag{2}$$

Z założenia i nierówności (**)

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi(2^i) \| t_{2^i} \| \leqslant 4 \sum_{\mu=2^{N-1}+1}^{\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \varepsilon_\mu(f)_\Phi < \infty$$

Zatem prawa strona nierówności (2) dąży do zera przy $h \to 0$ i $N \geqslant N_0$.

Jest więc $f'(x) = \varphi_1(x)$. Dla $l = 2,\ldots,r$ dowód przebiega indukcyjnie.

Dobierając m tak, by $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, otrzymujemy, korzystając z nierówności (1) i (**):

$$\| T_n^{(r)} - f^{(r)} \| = \| T_n^{(r)} - T_1^{(r)} - \sum_{i=1}^{\infty} (T^{(r)}_{2^i} - T^{(r)}_{2^{i-1}}) \| \leqslant \| T_n^{(r)} - T^{(r)}_{2^{m+1}} \| +$$

$$+ \sum_{i=m+2}^{\infty} \| T^{(r)}_{2^i} - T^{(r)}_{2^{i-1}} \| \leqslant C^*_{\varphi,r} \Big\{ \psi^r(2^{m+1}) \| T_n - T_{2^{m+1}} \| +$$

$$+ \sum_{i=m+2}^{\infty} \varphi^r(2^i) \| T_{2^i} - T_{2^{i-1}} \| \Big\} \leqslant C_{\varphi,r} \Big\{ \varphi^r(n) \varepsilon_n(f)_\Phi +$$

$$+ \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^r(\mu)}{\mu} \varepsilon_\mu(f)_\Phi \Big\}.$$

Twierdzenie 2

Jeśli $f \in L^{\Phi}$, $k \in N$, dla pewnego naturalnego r $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{k+r}(n+1)}{n+1} E_n(f)_{\Phi} < \infty$

i dla pewnego $p \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} \psi(\frac{1}{i^p}) < \infty$, to istnieje r-ta pochodna funkcji f

w sensie metryki przestrzeni L^{Φ} i dla $n \geqslant 1$

$$\omega_k(f^{(r)}, \tfrac{1}{n})_{\Phi} \leqslant C_{\psi,k,r} \psi^k(\tfrac{1}{n}) \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\psi^k(\mu+1)}{\mu+1} \Big[\psi^r(\mu) E_{\mu}(f)_{\Phi} + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{\psi^r(\nu)}{\nu} E_{\nu}(f)_{\Phi}\Big],$$

gdzie $C_{\psi,k,r}$ jest stałą zależną od ψ, r i k.

Dowód

Niech t_n będzie wielomianem najlepszego przybliżenia funkcji f stopnia $\leqslant n$. Wtedy dla całkowitego $m \geqslant 0$ otrzymujemy, podobnie jak w twierdzeniu 2 [2], następujące nierówności:

$$\omega_k(f, \tfrac{1}{n}) \leqslant 2^k E_{2^{m+1}}(f)_{\Phi} + \omega_k(t_{2^{m+1}}, \tfrac{1}{n})_{\Phi},$$

i $$\omega_k(t_{2^{m+1}}, \tfrac{1}{n})_{\Phi} \leqslant C^*_{\psi,k} \psi^k(\tfrac{1}{n}) \sum_{\nu=0}^{2^m} \frac{\psi^k(\nu+1)}{\nu+1} E_{\nu}(f)_{\Phi}.$$

Dobierając m tak, by $2^{m+1} \leqslant n < 2^{m+2}$ i korzystając z nierówności $(*)$

otrzymujemy: $2^k E_{2^{m+1}}(f)_{\Phi} \leqslant C_k \psi^k(\frac{1}{n}) \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\psi^k(\mu+1)}{\mu+1} E_{\mu}(f)_{\Phi}$.

Zatem $\omega_k(f, \frac{1}{n})_{\Phi} \leqslant C_{\psi,k} \psi^k(\frac{1}{n}) \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\psi^k(\mu+1)}{\mu+1} E_{\mu}(f)_{\Phi}$.

Stąd i z twierdzenia 1

$$\omega_k(f^{(r)}, \tfrac{1}{n})_{\Phi} \leqslant C^2_{\psi,k} \psi^k(\tfrac{1}{n}) \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\psi^k(\mu+1)}{\mu+1} E_{\mu}(f^{(r)})_{\Phi} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\psi,k,r} \psi^k(\tfrac{1}{n}) \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\psi^k(\mu+1)}{\mu+1} \Big[\psi^r(\mu) E_{\mu}(f)_{\Phi} + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{\psi^r(\nu)}{\nu} E_{\nu}(f)_{\Phi}\Big]$$

LITERATURA

[1] Iwanow W.J.: Priamyje i obratnyje tieoriemy tioroii priblizenija w mietrikie L_p dla $0<p<3$. Mat. Zam. t. 18/5/75/641-657/.

[2] Kozłowska G.: Direct and indirect Jackson's type theorems in some Fréchet functions spaces. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Mat.-Fiz., z. 39, Gliwice 1982, ss. 275-285.

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Р е з ю м е

В этой работе обобщены некоторые результаты В.И. Иванова [1]. Более интересные теоремы это аналог неравенства Бернштейна-Зигмунда и Теорема 2

Пусть L^{Φ} некоторое функциональное пространство фреше с F-нормой $\| \ \|$. [2], T_n тргонометрический полином порядка не выше n ($n \geqslant 0$), Обозначим для $\alpha \geqslant 0$, $\psi(\alpha) = \sup_{s>0} \frac{\Phi(\alpha s)}{\Phi(s)}$.

Неравенство Бернштейна-Зигмунда

Пусть ψ такая, что при некотором натуральном p $\sum_{i=1}^{\infty} \psi(i^{-p}) < \infty$, тогда для $n \geqslant 1$, $r \in N$ $\|T_n^{(r)}\| \leqslant C_{\psi} \psi^r(n) \| T_n \|$.

Теорема 2

Если $f \in L$, $k \in N$, при некотором $r \in N$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{k+r}(n+1)}{n+1} E_n(f)_{\Phi} < \infty$ и такая, что при некотором $p \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} \psi(i^{-p}) < \infty$, тогда существует производная функции f r-того порядка в смысле метрики L^{Φ} и для $n \geqslant 1$ $\omega_k(\frac{1}{n}, f^{(r)}) \leqslant$

$\leqslant C_{\psi,k,r} \psi^k(\frac{1}{n}) \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\psi^k(n+1)}{\mu+1} [\psi^r(\mu) E_{\mu}(f)_{\Phi} + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{\psi^r(\nu)}{\nu} E_{\nu}(f)_{\Phi}]$, где $C_{\psi,k,r}$ константа, зависящая от ψ, k и r.

APPROXIMATION THEOREM IN CERTAIN FUNCTIONAL FRÉCHET SPACES

S u m m a r y

An approximation theorem is proved about L^{Φ} functions approximated by trigonometric polynomials. The Bernstein-Zygmund type inequality in L^{Φ} space is also proved. By this the generalization of Ivanow's results is obtained.