ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Jolanta ŚMIGIELSKA

UOGÓLNIONA NIERÓWNOŚĆ TYPU GRUNSKY'EGO - NEHARIEGO DLA FUNKCJI KLASY S_1^{RT} I S_1^R

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest udowodnienie dokładności uogólnionej nierówności typu Grunsky'ego - Nehariego w przypadku wszystkich parametrów rzeczywistych lub czysto urojonych w klasie funkcji symetrycznych, jednolistnych i ograniczonych.

Głównym wynikiem pracy jest następujące twierdzenie:

Niech S_1^R oznacza klasę funkcji jednolistnych, symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$ i niech L będzie ciągłym i liniowym funkcjonałem określonym na przestrzeni $H(U)$ wszystkich funkcji analitycznych w U takim, że $L(1) = 0$, $L(h) = \overline{L(\overline{h})}$ lub $L(\overline{h}) = -\overline{L(h)}$, gdzie $h \in H(U)$, $\overline{h}(z) = \overline{h(\overline{z})}$ i ponadto $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\overline{\zeta})))$, $|L|^2(\varphi(z,\overline{\zeta})) = L(\overline{L(\overline{\varphi(z,\overline{\zeta})})})$ dla każdej funkcji $\varphi(z,\zeta)$ analitycznej w $U \times U$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in S_1^R$ ma miejsce następująca, dokładna w klasie S_1^R, nierówność:

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2(\log(1-f(z)\overline{f(\zeta)}))\right\} \leqslant -|L|^2(\log(1-\overline{\zeta}z)).$$

Wstęp

Niech S_1 oznacza klasę funkcji f holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$ o postaci:

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots = b_1(z + a_2 z^2 + \dots), \quad b_1 > 0, \tag{0.1}$$

spełniających warunek:

$$|f(z)| < 1 \quad \text{dla} \quad z \in U, \tag{0.i}$$

a S_1^R podklasę klasy S_1 funkcji spełniających dodatkowo warunek:

$$\operatorname{Im} b_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\dots \tag{0.ii}$$

Niech dalej $S_1(b_1)$ i $S_1^R(b_1)$ oznaczają podklasy odpowiednio S_1 i S_1^R funkcji o ustalonym współczynniku b_1.

Niech wreszcie S_1^T i S_1^{RT}, $0<T<1$ oznaczają podklasy odpowiednio S_1 i S_1^R funkcji spełniających dodatkowo warunek:

$$b_1 \geqslant T. \tag{0.iii}$$

Z uwagi na to, że dla funkcji klasy S_1 musi być $0<b_1\leqslant 1$, mamy:

$$S_1 = \bigcup_{0<T<1} S_1^T,$$

$$S_1^R = \bigcup_{0<T<1} S_1^{RT},$$

a ponadto

$$S_1(b_1) \subset S_1^{b_1}, \quad S_1^R(b_1) \subset S_1^{Rb_1}.$$

Klasy $S_1(b_1)$, S_1^T i $S_1^R(b_1)$, S_1^{RT} mają tę wyższość nad klasami S_1 i S_1^R, że są zwarte, z czego wynika między innymi, że dowolny funkcjonał rzeczywisty i ciągły, określony na jednej z tych klas, osiąga swoje kresy, co może nie zachodzić dla klas S_1 i S_1^R, które stają się zwarte dopiero po dołączeniu funkcji $f = 0$.

Już w roku 1953 Z. Nehari w [4] podał warunki konieczne i wystarczające na to, by funkcja, która w kole U ma rozwinięcie o postaci (0.1), należała do klasy S_1. Warunki te mają postać nierówności, w których oprócz dowolnych parametrów występują współczynniki funkcji f i, ponieważ są podobne do warunku Grunsky'ego dla funkcji klasy S (funkcje holomorficzne i jednolistne w kole U, takie, że $f(0) = f'(0) - 1 = 0$), zostały nazwane warunkami Grunsky'ego-Nehariego.

Nierówności Grunsky'ego-Nehariego są dokładne, tzn. nie dają się poprawić, choć nie wiadomo czy w każdym przypadku istnieje funkcja, dla której stają się równościami. Nierówności te spełnia oczywiście każda funkcja klasy S_1^R względnie $S_1^R(b_1)$, gdyż są one podklasami klas S_1 względnie $S_1(b_1)$, nie wiadomo natomiast czy nierówności tych nie można zaostrzyć, jak to często bywa w przypadku rozmaitych podklas.

Najlepszą, choć nie jedyną, metodą otrzymywania oszacowań dokładnych jest znalezienie funkcji, dla której funkcjonał, który chce się oszacować, osiąga swoje ekstremum. W teorii funkcji jednolistnych służy do tego zwykle znajomość dostatecznie bogatej wariacji w danej klasie funkcji jednolistnych i wyprowadzone na podstawie tej znajomości równanie różniczkowo-funkcyjne, które muszą spełniać funkcje ekstremalne. Dla klas S_1^T równanie takie uzyskał Z. Charzyński w [1] (1953), a dla klas S_1^{RT} I. Dziubiński w [3] (1960) w przypadku funkcjonałów zależnych od skończonych ilości współczynników. W roku 1961 Z. Charzyński i H. Śmiałek w [2] uzyskali rozszerzenie tych wyników na funkcjonały różniczkowalne w sensie Frécheta. Ze względu na znaczenie wyniku Z. Charzyńskiego i H. Śmiałek, jako głównego narzędzia prezentowanej tu pracy, przytoczymy twierdzenie, w którym wynik ten jest zawarty.

Twierdzenie I

Jeśli funkcjonał $\Phi(f)$ jest określony, rzeczywisty i różniczkowalny w sensie Frécheta w każdym punkcie f należącym do S_1^{RT}, $0<T<1$, którego różniczka $L^*(h)$, $h\in H(U)$, ($H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w kole U, ze zbieżnością jednostajną w zbiorach zwartych) nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie $f\in S_1^{RT}$, wtedy każda funkcja ekstremalna

$$f = f(z), \tag{0.2}$$

to znaczy funkcja, dla której funkcjonał Φ osiąga maksymalną wartość w S_1^{RT}, spełnia następujące warunki:

1) Istnieje otwarty łuk C na okręgu $|\zeta| = 1$, na którym funkcja f jest holomorficzna i jednolistna i odwzorowuje ten łuk na pewien łuk D na okręgu $|w| = 1$.

2) Dla każdego $\zeta\in C$ zachodzi:

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right|^2 \mathfrak{M}[f(\zeta)] = \mathfrak{N}(\zeta), \tag{0.3}$$

gdzie:

$$\mathfrak{M}(w) = L^*\left[f(z)\left(\frac{1 + wf(z)}{1 - wf(z)} + \frac{1 + \bar{w}f(z)}{1 - \bar{w}f(z)}\right)\right] - \varphi, \tag{0.4}$$

$$\mathfrak{N}(\zeta) = L^*\left[zf'(z)\left(\frac{1 + \zeta z}{1 - \zeta z} + \frac{1 + \bar{\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z}\right)\right] - \varphi, \tag{0.5}$$

$$\varphi = \min_{0\leqslant y\leqslant 2\pi} L^*\left[f(z)\left(\frac{1 + e^{iy}f(z)}{1 - e^{iy}f(z)} + \frac{1 + e^{-iy}f(z)}{1 - e^{-iy}f(z)}\right)\right], \tag{0.6}$$

gdzie z oznacza zmienną pozorną w (0.4) i (0.5), w oraz ζ pełnią rolę parametrów. $L^*(h)$ oznacza różniczkę Frécheta funkcjonału Φ w punkcie f.

3) Funkcje (0.4) i (0.5) są rzeczywiste i nieujemne na okręgach $|w| = 1$ i $|\zeta| = 1$ odpowiednio.

4) Pierwszy współczynnik b_1 funkcji ekstremalnej jest równy T.

5) Jeśli istnieje obszar E^* zawarty w U, którego brzeg zawiera okrąg jednostkowy ∂U oraz żaden punkt tego okręgu nie jest punktem skupienia punktów istotnych dopełnienia zbioru E^* (punktami istotnymi dopełnienia

zbioru E^* nazywamy punkty zbioru $U \setminus E^*$), jeśli ponadto różniczka $L^*(h)$ funkcjonału Φ w każdym punkcie $f \in S_1^{RT}$ przedłuża się w sposób ciągły na klasę funkcji meromorficznych w U mających bieguny położone co najwyżej w E^*, wtedy równanie (0.3) zachodzi dla każdego $\zeta \in E$.

Definicja

Niech $\Psi(f)$ będzie funkcjonałem o wartościach zespolonych, określonym i ciągłym w S_1^{RT}, $H'(U)$ przestrzeń sprzężona do $H(U)$. Mówimy, że $\Psi(f)$ ma pochodną zespoloną w sensie Gâteaux w punkcie f, jeśli istnieje funkcjonał $\Lambda_f \in H'(U)$ taki, że

$$\Psi(\tilde{f}) = \Psi(f) + \varepsilon \Lambda_f(h) + o(\varepsilon),$$

gdzie $\varepsilon > 0$, $\tilde{f}$ - dowolna funkcja klasy S_1^{RT} taka, że $\tilde{f}(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon)$, $h(z) \in H(U)$ oraz $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U. Funkcjonał $\Lambda_f(h)$ nazywamy różniczką w sensie Gâteaux.

Zauważmy, że w twierdzeniu I warunek różniczkowalności w sensie Frécheta można zastąpić słabszym warunkiem różniczkowalności zespolonej w sensie Gâteaux. Istotnie, nierówność $L^*(V) \leqslant 0$ w [2] (str. 3) jest prawdziwa także, gdy L^* oznacza $\operatorname{Re}\Lambda_f$, gdzie Λ_f jest różniczką w sensie Gâteaux, a równanie (0.3) jest jedynie konsekwencją tej nierówności.

1. Określmy w klasie S_1^{RT}, $0 < T < 1$ funkcjonał

$$\Phi(f) = \operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\bar{\zeta})))\right\}, \tag{1}$$

gdzie $L \in H'(U)$, $L(1) = 0$, $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z,\bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\bar{\zeta}))})$, $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w $U \times U$.
Można łatwo zauważyć ze wzoru Caccioppoli-Köthego [6] na ogólną postać funkcjonału liniowego z $H'(U)$, że $\psi(\zeta) = L(\varphi(z,\zeta)) \in H(U)$. Stwierdzamy również łatwo, że funkcjonał (1) ma w dowolnym punkcie $f \in S_1^{RT}$ różniczkę w sensie Gâteaux. Różniczką tą jest funkcjonał:

$$\Lambda_f(h) = \operatorname{Re}\left\{L^2\left(\frac{h(z) - h(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)}\right) + |L|^2\left(\frac{h(z)\overline{f(\bar{\zeta})} + f(z)\overline{h(\bar{\zeta})}}{1 - f(z)\overline{f(\bar{\zeta})}}\right)\right\}, \tag{2}$$

gdzie $h = h(z) \in H(U)$. Zakładamy dodatkowo, że $\Lambda_f(h)$ nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie klasy S_1^{RT}. Na podstawie wspomnianego wzoru Caccicppoli-Köthego na ogólną postać funkcjonału liniowego z $H'(U)$ można stwierdzić, że $\Lambda_f(h)$ przedłuża się w sposób ciągły z S_1^{RT} na klasę funkcji symetrycznych i meromorficznych w U, mających bieguny położone co najwyżej w punktach pierścienia $E^* = \{z: r < |z| < 1\}$, $0 < r < 1$. I tak wiadomo, że funkcjonał Λ_f da się wyrazić wzorem:

$$\Lambda_f(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r'} h(z)g(z)dz, \tag{3}$$

gdzie $g(z)$ jest funkcją holomorficzną w zbiorze $\{z: |z| > r''$, $0 < r'' < 1$, a r' jest dowolną, ale ustaloną liczbą z przedziału $(r'',1)$. Jeżeli więc założymy dodatkowo, że $r > r'$, to wzór (3) określa funkcjonał również dla funkcji $h(z)$ holomorficznej w U i mającej bieguny położone co najwyżej w pierścieniu E^*.

Brzeg zbioru E^* zawiera okrąg $\{z: |z| = 1\}$ i oczywiście żaden punkt tego okręgu nie jest punktem skupienia punktów istotnych dopełnienia zbioru E^*.

Dla funkcjonału (1) możemy więc zastosować twierdzenie I. Aby lewa strona równania (0.3) była kwadratem pewnej funkcji, załóżmy dodatkowo, że

$$\overline{L(h)} = -L(\overline{h}) \text{ dla } h \in H(U), \quad \text{gdzie } \overline{h}(z) = \overline{h(\overline{z})}. \tag{4}$$

Biorąc pod uwagę (2), (0.4) i (4) otrzymamy, że funkcja $\mathfrak{M}(w)$ dla $|w| = 1$ przyjmie postać:

$$\mathfrak{M}(w) = 2L^2\Big[\frac{\overline{w}f(z)}{(1 - \overline{w}f(z))(1 - \overline{w}f(\zeta))} + \frac{\overline{w}f(\zeta) - w\overline{w}f(z)f(\zeta)}{(1 - wf(z))(1 - \overline{w}f(\zeta))} +$$

$$+ \frac{1}{(1 - wf(z))(1 - wf(\zeta))}\Big] +$$

$$+ 2|L|^2\Big[\frac{w\overline{w}f(z)f(\overline{\zeta})}{(1 - \overline{w}f(z))(1 - wf(\overline{\zeta}))} + \frac{w\overline{w}f(z)f(\overline{\zeta})}{(1 - wf(z))(1 - \overline{w}f(\overline{\zeta}))}\Big] - \mathfrak{P}. \tag{5}$$

Przy założeniu, że $L(1) = 0$, uzyskujemy:

$$\mathfrak{M}(w) = 2\Big[L\Big(\frac{w}{f(z) - w}\Big) - \overline{L\Big(\frac{1}{1 - \overline{w}f(z)}\Big)}\Big]^2 - \mathfrak{P}. \tag{6}$$

Na podstawie (0.6) obliczamy:

$$\mathfrak{P} = \operatorname*{Min}_{0 \leqslant y \leqslant 2\pi} 2\Big[L\Big(\frac{1}{1 - e^{iy}f(z)}\Big) - \overline{L\Big(\frac{1}{1 - e^{-iy}f(z)}\Big)}\Big]^2 =$$

$$= \operatorname*{Min}_{0 \leqslant y \leqslant 2\pi} 2\Big[L\Big(\frac{1}{1 - e^{iy}f(z)}\Big) + \overline{L\Big(\frac{1}{1 - e^{iy}f(z)}\Big)}\Big]^2 \geqslant 0. \tag{7}$$

Dla $y = 0$ i $y = \pi$ mamy $L\Big(\frac{1}{1 - e^{iy}f(z)}\Big) - \overline{L\Big(\frac{1}{1 - e^{-iy}f(z)}\Big)} = 0$, zatem

$$\mathfrak{P} = 0. \tag{8}$$

Korzystając z twierdzenia I, (4), (6) i (8) możemy stwierdzić, że funkcja f, dla której funkcjonał (1) osiąga maksymalną wartość w S_1^{RT}, spełnia w zbiorze $E^+ \cup C$ następującą równość:

$$2\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right]^2 \left[L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)}\right) - L\left(\overline{\frac{1}{1 - f(z)f(\bar{\zeta})}}\right)\right]^2 = \mathfrak{R}(\zeta). \tag{9}$$

Z (0.5), (2) i ze wspomnianego już twierdzenia Caccioppoli-Köthego wynika, że funkcja $\mathfrak{R}(\zeta)$ jest funkcją holomorficzną co najmniej w pierścieniu $E = \{\zeta : r < |\zeta| < \frac{1}{r}\}$, $0 < r < 1$. Wiadomo ponadto, że $\mathfrak{R}(\zeta)$ jest nieujemna dla $\zeta \in \partial U$. Wynika stąd między innymi, że wszystkie pierwiastki funkcji $\mathfrak{R}(\zeta)$ położone na ∂U są parzystokrotne. Ze związku (9), który zachodzi między innymi w pierścieniu $E^* = \{\zeta : r < |\zeta| < 1\}$, wynika, że lewa strona w równości (9), która jest funkcją holomorficzną w pierścieniu E^*, przedłuża się jako funkcja holomorficzna na pierścień E, jest nieujemna na ∂U oraz jest kwadratem funkcji:

$$\sqrt{2}\ \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \left[L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)}\right) - L\left(\overline{\frac{1}{1 - f(z)f(\bar{\zeta})}}\right)\right], \tag{10}$$

która jest także funkcją holomorficzną w pierścieniu E^*, a więc na mocy (9) w tym samym pierścieniu E^* jest ona gałęzią pierwiastka kwadratowego z $\mathfrak{R}(\zeta)$; połóżmy:

$$\mathfrak{R}^*(\zeta) = \sqrt{2}\ \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \left[L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)}\right) - L\left(\overline{\frac{1}{1 - f(z)f(\bar{\zeta})}}\right)\right].$$

Funkcja $\mathfrak{R}^*(\zeta)$ przedłuża się z pierścienia E^* jako funkcja ciągła, a nawet holomorficzna na pierścień $\{\zeta : r < |\zeta| \leqslant 1\}$. Istotnie, jeżeli $\zeta^* \in \partial U$ i $\mathfrak{R}(\zeta^*) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu punktu ζ^* istnieją dwie jednoznaczne gałęzie pierwiastka kwadratowego z $\mathfrak{R}(\zeta)$ i jedna z nich musi się pokrywać w części wspólnej koła U i tego otoczenia z $\mathfrak{R}^*(\zeta)$. Jeżeli natomiast $\mathfrak{R}(\zeta^*) = 0$, to ze względu na wspomnianą wyżej parzystokrotność tego pierwiastka musi być $\mathfrak{R}(\zeta) = (\zeta - \zeta^*)^{2k}\widetilde{\mathfrak{R}}(\zeta)$ w pewnym otoczeniu punktu ζ^*, przy czym $\widetilde{\mathfrak{R}}(\zeta^*) \neq 0$. W pewnym otoczeniu punktu ζ^* istnieją zatem dwie jednoznaczne gałęzie pierwiastka kwadratowego z $\mathfrak{R}(\zeta)$ i jedna z nich na wspólnej części tego otoczenia i koła U pokrywa się z $\mathfrak{R}^*(\zeta)$. Ponadto tak przedłużona funkcja $\mathfrak{R}^*(\zeta)$ jest na okręgu ∂U rzeczywista.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję:

$$\mathfrak{R}^{**}(\zeta) = -L\left(\frac{\zeta}{z - \zeta}\right) + L\left(\overline{\frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}}\right).$$

Jest ona holomorficzna w pierścieniu E i rzeczywista na okręgu ∂U. Funkcja:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{N}^{*}(\zeta)+\mathfrak{N}^{**}(\zeta)=L\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}\right)-$$

$$-\overline{L\left(\frac{\bar{\zeta}f(\bar{\zeta})}{f(\bar{\zeta})}\,\frac{1}{1-f(z)f(\bar{\zeta})}\right)}+\overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}$$

jest holomorficzna w kole U i przedłuża się w sposób ciągły na koło domknięte $\bar{U}$, pozostając rzeczywistą na okręgu ∂U. Stosując zasadę odbicia Schwarza, dochodzimy do wniosku, że funkcja $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{N}^{*}(\zeta)+\mathfrak{N}^{**}(\zeta)$ przedłuża się jako funkcja holomorficzna na płaszczyznę domkniętą $\bar{\mathbb{C}}$, a więc jest funkcją stałą, a ponieważ $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{N}^{*}(0)+\mathfrak{N}^{**}(0)=0$, otrzymujemy następujący związek:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left[L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right)-\overline{L\left(\frac{1}{1-f(z)f(\bar{\zeta})}\right)}\right]=$$

$$=L\left(\frac{\zeta}{z-\zeta}\right)-\overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}. \tag{11}$$

Zauważmy następnie, że zachodzą tożsamości:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}=-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta},$$

$$\frac{\bar{\zeta}f'(\bar{\zeta})}{f(\bar{\zeta})}\,\frac{1}{1-f(z)f(\bar{\zeta})}=\frac{\bar{\zeta}f(\bar{\zeta})}{f(\bar{\zeta})}-\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\log(1-f(z)f(\bar{\zeta})),$$

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=1-\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\log(1-\bar{\zeta}z). \tag{12}$$

Wstawiając związki (12) do równości (11) oraz biorąc pod uwagę, że ze względu na liniowość i ciągłość funkcjonału L, $L(\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi(z,\zeta))\neq\frac{d}{d\zeta}L(\psi(z,\zeta))$ oraz całkując tak otrzymane związki względem ζ, otrzymujemy:

$$L\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-L(\log(1-f(z)f(\bar{\zeta})))+L(\log(1-\zeta z))=\tilde{G}, \tag{13}$$

gdzie

$$\tilde{G}=L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right). \tag{14}$$

Udowodnimy, że

$$\mathrm{Re}\{\tilde{G}\} = 0. \tag{15}$$

W tym celu obliczamy $\tilde{G}$ ze związku (13) w punkcie ζ należącym do łuku C z twierdzenia I. Mamy zatem $|\zeta| = 1$ i $|f(\zeta)| = 1$. Bez trudu uzyskujemy, że zachodzi warunek (15).

Ze związku (13) otrzymujemy dalej:

$$L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\right) = -|L|^2\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right). \tag{16}$$

Połóżmy obecnie w równości (1) funkcjonał L spełniający warunki:

$$\overline{L(h)} = L(\bar{h}) \text{ i } L(1) = 0, \quad \text{gdzie } h \in H(U) \text{ i } \bar{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}. \tag{17}$$

Rozumując analogicznie dostajemy, że dla $\Phi(f)$ postaci (1), gdzie L spełnia warunek (17), funkcja $\mathfrak{M}(w)$ jest również postaci (6), przy czym:

$$\mathcal{P} = \min_{0\le y\le 2\pi} 2\left[L\left(\frac{1}{1-e^{iy}f(z)}\right) + L\left(\frac{1}{1-e^{-iy}f(z)}\right)\right]^2 =$$

$$= \min_{0\le y\le 2\pi} 2\left[L\left(\frac{1}{1-e^{iy}f(z)}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1-e^{iy}f(z)}\right)}\right]^2 \geqslant 0. \tag{18}$$

Weźmy pod uwagę funkcję $\varphi(y) = \frac{1}{i} L\left(\log\frac{1-e^{-iy}f(z)}{1-e^{iy}f(z)}\right)$. Z założenia (17) wynika, że $\varphi(y)$ jest funkcją rzeczywistą, ciągłą i okresową o okresie 2π, czyli jej pochodna

$$\varphi'(y) = L\left(\frac{1}{1-e^{iy}f(z)}\right) + L\left(\frac{1}{1-e^{-iy}f(z)}\right) \tag{19}$$

musi być równa zero dla pewnego $y_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Stąd wynika, że

$$\mathcal{P} = 0. \tag{20}$$

Dalszy tok rozumowania jest analogiczny jak dla funkcjonału L, spełniającego warunek (4) i $L(1) = 0$. Otrzymaliśmy zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Niech $\Phi(f)$ będzie funkcjonałem postaci (1), gdzie $L \in H'(U)$ spełnia warunek (4) i $L(1) = 0$ lub L spełnia warunek (17). Niech różniczka

Gâteaux funkcjonału (1), będąca postaci (2), nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie f klasy S_1^{RT}. Wtedy w klasie S_1^{RT} istnieją funkcje ekstremalne $f = f(\zeta)$, dla których funkcjonał (1) osiąga wartość największą.

1. Każda ekstremalna funkcja spełnia równanie:

$$L\left(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - \overline{L(\log(1 - f(z)f(\overline{\zeta})))} + \overline{L(\log(1 - \overline{\zeta} z))} =$$

$$= L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right), \tag{21}$$

przy czym $\operatorname{Re}\left\{L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right)\right\} = 0$.

2. Dla funkcji ekstremalnych wartość funkcjonału (1) wynosi:

$$\Phi(f) = -|L|^2(\log(1 - \overline{\zeta} z)). \tag{22}$$

3. Współczynnik b_1 rozwinięcia funkcji ekstremalnych jest równy T.

Możemy obecnie udowodnić równość (22) dla klasy S_1^{RT} przy każdym $T \in (0,1)$, a tym samym dla całej klasy S_1^R.

Z twierdzenia 1 oraz z faktu, że $S_1^R = \bigcup_{0<T<1} S_1^{RT}$ wynika, że każda funkcja $f \in S_1^{RT}$, dla której funkcjonał (1) osiąga maksymalną wartość w S_1^{RT}, jest funkcją, dla której ten funkcjonał osiąga maksymalną wartość w S_1^R.

Otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2

Dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\overline{\zeta})))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -|L|^2(\log(1 - \overline{\zeta} z)), \tag{23}$$

gdzie L spełnia warunek (4) i $L(1) = 0$ lub L spełnia warunek (17) oraz różniczka (2) nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie klasy S_1^R. Nierówność (23) jest dokładna oraz dla każdego $T \in (0,1)$ w klasie S_1^R istnieje funkcja f, której pierwszy współczynnik b_1 jest równy T i dla tej funkcji w nierówności (23) zachodzi równość. Funkcja ta spełnia równanie (21).

LITERATURA

[1] Charzyński Z.: Sur les fonctions univalentes bornées, Rozpr. Mat. 2 (1953), pp. 1-57.

[2] Charzyński Z., Śmiałówna H.: The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional, Bulletin de la Société des Scienes et des Lettres de Łódź, Vol. 12 (13),(1961), 1-7.

[3] Dziubiński I.: Équation générale de Löwner, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Vol. XI, 4, (1960).

[4] Nehari Z.: Some inequalities in the theorie of functions, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), pp. 256-286.

[5] Pederson R.N., Schiffer M.: Further generalizations of the Grunsky inequalities, J. Analyse Math. 23 (1970), pp. 353-380.

[6] Schober G.: Univalent functions-Selected Topics, Lecture Notes in Mathematios 478, Springer - Verlag, (1975), pp. 34-38.

[7] De Temple, D.W.: Generalizations of the Grunsky-Nehari inequalities, Arch. Rational Mech. Anal. 44, (1971), pp. 93-120.

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО ГРУНСКИ - НЕХАРИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА S_1^{RT} S_1^R

Р е з ю м е

В настоящей работе показано, что в наравенствах Грунски - Нехари при вещественных или чисто мнимых параметрах, возможно равенство в классе однолистных ограниченных и симметричных функций в единичном круге.

Главным результатом работы является следущая теорема:

Пусть S_1^R будет классом однолистных ограниченных и симметрических функций в единичном круге $U = \{z: |z| < 1\}$, пусть L обозначает непрерывный, линейный функционал определённый в классе $H(U)$ всех аналитических функций в круге U такой, что $L(1) = 0$, $\overline{L(h)} = L(\bar{h})$ или $\overline{L(h)} = -L(\bar{h})$, где $h \in H(U)$, $\bar{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}$ и кроме этого $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z,\bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\bar{\zeta}))})$ для каждой функции $\varphi(z,\zeta)$ аналитической в $U \times U$. Тогда для каждой функции $f \in S_1^R$ имеет мемто, точное в классе, неравенство

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\zeta)))\right\} \leqslant$$

$$- |L|^2(\log(1 - \bar{\zeta} z)).$$

THE GENERALIZED GRUNSKY - NEHARI INEQUALITY IN THE CLASS S_1^{RT} AND S_1^R

S u m m a r y

In the above paper there has been proved that in the generalized Grunsky-Nehari inequality the equality is always possible for all parameters real or pure imaginary in the class of univalent, bounded and symmetric functions in the unit disk.

The main result of the paper is the following theorem:
Let S_1^R be a class of univalent, bounded and symmetric functions in the unit disk $U = \{z: |z| < 1\}$, and let L denotes a continuous and linear functional defined in the space $H(U)$ of all analytic functions in U, such that $L(1) = 0$, $\overline{L(h)} = L(\bar{h})$ or $\overline{L(h)} = -L(\bar{h})$ where $h \in H(U)$, $\bar{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}$ and $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z,\bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\bar{\zeta}))})$ for each function $\varphi(z,\zeta)$ analytic in $U \times U$. Then for each $f \in S_1^R$ we have the sharp inequality

$$\mathrm{Re}\left\{ L^2\left(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\zeta)))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant - |L|^2(\log(1 - \bar{\zeta} z)).$$