ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Jolanta ŚMIGIELSKA

PEWNE SZCZEGÓLNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI GRUNSKY'EGO-NEHARIEGO dla funkcji klasy S_1^{RT} I S_1^R

Streszczenie. W pracy zastosowano uogólnioną nierówność Grunsky'ego-Nehariego do oszacowania pewnych funkcjonałów w klasie funkcji jednolistnych, symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym U. Rozważono problem maksimum funkcjonału

$\mathrm{Re}\left\{L^2(\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\bar{\zeta}))\right\}$, $f \in S_1^R$, przy

czym funkcjonał L wybrano w sposób następujący:

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m(h(z_m) - h(0)),$$

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m h'(z_m),$$

gdzie $h \in H(U)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in R$ i $z_1, \ldots, z_N \in (-1,1)$.

Niech S_1^R oznacza klasę funkcji f holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym $U = \{z: |z| < 1\}$ postaci:

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = b_1(z + a_2 z^2 + \ldots), \qquad b_1 > 0, \tag{1}$$

spełniających warunki:

$$|f(z)| < 1 \quad \text{dla} \quad z \in U \tag{i}$$

oraz

$$\mathrm{Im}\, b_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots \tag{ii}$$

Niech dalej S_1^{RT}, $0 < T < 1$, oznacza podklasę klasy S_1^R funkcji spełniających dodatkowo warunek:

$$b_1 \geqslant T. \tag{iii}$$

Celem niniejszej pracy jest oszacowanie pewnych funkcjonałów określonych w klasach S_1^{RT} i S_1^{R}, przy wykorzystaniu uogólnionej nierówności Grunsky'ego-Nehariego, uzyskanej przez autorkę w [1]. Przytoczymy zatem twierdzenia, z których będziemy korzystać.

Twierdzenie 1

Niech $\Phi(f)$ będzie funkcjonałem postaci:

$$\Phi(f) = \mathrm{Re}\left\{L^2(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) - |L|^2(\log(1 - f(z)\overline{f(\zeta)}))\right\}, \tag{2}$$

gdzie $f \in S_1^{RT}$, $0<T<1$, $L \in H'(U)$ ($H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w kole U, ze zbieżnością jednostajną w zbiorach zwartych, natomiast $H'(U)$ przestrzeń do niej sprzężoną), $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $L^2(\varphi(z,\overline{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\overline{\zeta}))})$, $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w $U \times U$. Niech $L(1) = 0$ i dodatkowo funkcjonał L spełnia warunek:

$$\overline{L(h)} = -L(\overline{h}) \tag{3}$$

lub:

$$\overline{L(h)} = L(\overline{h}), \tag{4}$$

dla $h \in H(U)$, gdzie $\overline{h}(z) = \overline{h(\overline{z})}$.

Załóżmy, że różniczka Gâteaux funkcjonału (2), będąca postaci

$$\Lambda_f(h) = \mathrm{Re}\left\{L^2(\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}) + |L|^2(\frac{h(z)\overline{f(\zeta)} + f(z)\overline{h(\zeta)}}{1 - f(z)\overline{f(\zeta)}})\right\}, \tag{5}$$

gdzie $h \in H(U)$, nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie f klasy S_1^{RT}. Wtedy w klasie S_1^{RT} istnieją funkcje ekstremalne $f = f(\zeta)$, dla których funkcjonał (2) osiąga największą wartość.

Każda funkcja ekstremalna spełnia równanie:

$$L(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) - \overline{L(\log(1 - f(z)f(\overline{\zeta}))} + \overline{L(\log(1 - \overline{\zeta} z))} =$$

$$= L(\log \frac{f(z)}{z}), \tag{6}$$

przy czym $\mathrm{Re}\left\{L(\log \frac{f(z)}{z})\right\} = 0$.

Dla funkcji ekstremalnych wartość funkcjonału (2) wynosi:

$$\Phi(f) = -|L|^2(\log(1 - \overline{\zeta} z)). \tag{7}$$

Współczynnik b_1 rozwinięcia funkcji ekstremalnych jest równy T.

Twierdzenie 2

Dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2(\log(1-f(z)f(\bar{\zeta})))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)), \tag{8}$$

gdzie L spełnia warunek (3) lub (4) i $L(1) = 0$ oraz różniczka (5) nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie klasy S_1^R.

Nierówność (8) jest dokładna oraz dla każdego $T \in (0,1)$ w klasie S_1^R istnieje funkcja f, której pierwszy współczynnik b_1 jest równy T i dla tej funkcji w nierówności (8) zachodzi równość. Funkcja ta spełnia równanie (6).

Przejdźmy obecnie do zastosowania podanych wyżej twierdzeń do oszacowania pewnych funkcjonałów w klasie S_1^R.

1. Połóżmy

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m(h(z_m) - h(0)), \tag{9}$$

gdzie $h \in H(U)$, λ_m, $m = 1,\dots,N$ - dowolne liczby rzeczywiste, z_m, $m = 1,\dots,N$ - dowolne liczby z przedziału $(-1,1)$, $\sum_{m=1}^{N} z_m^2 > 0$. Niech dodatkowo λ_m i z_m, $m = 1,\dots,N$ będą takie, aby różniczka (5) nie znikała tożsamościowo w żadnym punkcie klasy S_1^R. Z twierdzenia 2 wynika, że dla dowolnej funkcji $f \in S_1^R$ zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \log\left[f'(0)\,\frac{z_m z_n(f(z_m)-f(z_n))}{f(z_m)f(z_n)(z_m-z_n)}\,(1-f(z_m)f(z_n))\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \log(1-z_m z_n). \tag{10}$$

W przypadku, gdy $m = n$, przyjmujemy jako wartość ilorazu

$$\frac{f(z_m)-f(z_n)}{z_m-z_n}$$

wartość $f'(z_m)$. Nierówność (10) jest dokładna oraz istnieją funkcje $f \in S_1^R$, które realizują w niej znak równości.

Dla funkcji tych zachodzi związek:

$$- \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log \frac{f(\zeta)}{\zeta f'(0)} + \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \Big[\log \frac{z_m(f(z_m) - f(\zeta))}{f(z_m)(z_m - \zeta)} +$$

$$+ \log(1 - f(z_m) f(\zeta)) \Big] = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log(1 - \zeta z_m). \tag{11}$$

W nierówności (10) możemy położyć np. $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z$, ponieważ wtedy różniczka (5) nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie $f \in S_1^R$ np. nie zeruje się dla $h = f$. Zatem dla z rzeczywistego, $0 < |z| < 1$, otrzymujemy nierówność:

$$|f'(z)| f'(0) \geqslant \frac{f^2(z)}{z^2} \frac{1 - z^2}{1 - f^2(z)},$$

która jest w klasie S_1^R nierównością dokładną, a funkcja ekstremalna $f(\zeta)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$\frac{f'(0)}{f(z) f(\zeta)} (f(z) - f(\zeta))(1 - f(z) f(\zeta)) = \frac{(z - \zeta)(1 - \zeta z)}{z \zeta}.$$

2. Połóżmy teraz w nierówności (8)

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (h(z_m) - h(0)), \tag{12}$$

gdzie λ_m i z_m dla $m = 1, 2, \ldots, N$ są takie, jak dla funkcjonału (9). Funkcjonał (12) spełnia oczywiście warunek (4) i $L(1) = 0$, zatem stosując twierdzenie 2 dostajemy, że dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re} \left\{ \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \log \left[\frac{z_m z_n f'(0)}{f(z_m) f(z_n)} \frac{(f(z_m) - f(z_n))}{(z_m - z_n)(1 - f(z_m) f(z_n))} \right] \right. \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \log(1 - z_m z_n). \tag{13}$$

Funkcje ekstremalne $f(\zeta)$ spełniają równanie:

$$- \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log \frac{f(\zeta)}{\zeta f'(0)} + \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \Big[\log \frac{z_m}{f(z_m)} \frac{(f(z_m) - f(\zeta))}{(z_m - \zeta)} -$$

$$- \log(1 - f(z_m)f(\zeta))\Big] = - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log(1 - z_m\zeta). \tag{14}$$

Przyjmując w szczególności $N = 1$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z \neq 0$ dostajemy, że dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ prawdziwa jest nierówność:

$$|f'(z)|\, f'(0) \leqslant \frac{f^2(z)}{z^2} \frac{1 - f^2(z)}{1 - z^2},$$

gdzie $z \in (-1,1)$ i $z \neq 0$. Nierówność ta jest dokładna, a funkcja ekstremalna $f(\zeta)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{1 - f(z)f(\zeta)} \frac{f'(0)}{f(z)f(\zeta)} = \frac{z - \zeta}{(1 - \zeta z)z}.$$

2. Przyjmijmy w nierówności (8)

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\, \lambda_m h'(z_m), \tag{15}$$

gdzie: λ_m - dowolne liczby rzeczywiste, z_m - dowolne punkty przedziału $(-1,1)$. Funkcjonał (15) spełnia oczywiście warunek (3) i $L(1) = 0$. Zakładamy dodatkowo, że λ_m i z_m, $m = 1,\dots,N$, są takie, aby różniczka (5) nie znikała tożsamościowo w żadnym punkcie $f \in S_1^R$. Wstawiając (15) do (8) otrzymujemy:

$$- \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \left[\frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m) - f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m - z_n)^2}\right] +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(1 - f(z_m)f(z_n))^2} \leqslant \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \frac{1}{(1 - z_m z_n)^2} \tag{16}$$

przy czym w wypadku m = n przyjmujemy:

$$\frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m) - f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m - z_n)^2} = \lim_{z \to z_m} \left[\frac{f'(z_m)f'(z)}{(f(z_m) - f(z))^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(z_m - z)^2} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{d}{dz} \left. \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|_{z=z_m} - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z_m)}{f'(z_m)} \right)^2 \right] = \frac{1}{6} \left\{ f(z_m), z_m \right\}, \tag{17}$$

gdzie $\{f(z),z\}$ oznacza operator Schwarza w punkcie z. Nierówność (16) jest dokładna w S_1^R i funkcja ekstremalna $f(\zeta)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left[\frac{f'(z_m)}{f(z_m) - f(\zeta)} - \frac{1}{z_m - \zeta} - \frac{f'(z_m)f(\zeta)}{1 - f(z_m)f(\zeta)} + \frac{\zeta}{1 - \zeta z_m} \right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)} - \frac{1}{z_m} \right).$$

Dla $N = 1$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z$ dostajemy, że różniczka (5) jest różna od zera dla h = f, zatem wstawiając te dane do (16) i mając na uwadze (17), otrzymujemy nierówność:

$$- \{f(z),z\} \leqslant \frac{6}{(1 - z^2)^2} - \frac{6(f'(z))^2}{(1 - f^2(z))^2}$$

dla $z \in (-1,1)$. Nierówność ta jest dokładna w S_1^R i funkcje ekstremalne $f(\zeta)$ spełniają równanie funkcyjne:

$$\frac{f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{1}{z - \zeta} - \frac{f'(z)f(\zeta)}{1 - f(z)f(\zeta)} + \frac{\zeta}{1 - \zeta z} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z}.$$

3. Zastosujemy obecnie twierdzenie 2 do funkcjonału (-i)L, gdzie L jest postaci (15). Funkcjonał ten spełnia założenia twierdzenia 2, zatem zachodzi nierówność:

$$\sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \left[\frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m) - f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m - z_n)^2} \right] +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(1 - f(z_m)f(z_n))^2} \leqslant \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \frac{1}{(1 - z_m z_n)^2}, \tag{18}$$

przy czym w przypadku $m = n$ przyjmujemy (17). Nierówność (18) jest dokładna w S_1^R i każda funkcja ekstremalna $f(\zeta)$ spełnia równanie:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left[\frac{f'(z_m)}{f(z_m) - f(\zeta)} - \frac{1}{z_m - \zeta} + \frac{f'(z_m)f(\zeta)}{1 - f(z_m)f(\zeta)} - \frac{\zeta}{1 - \zeta z_m}\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)} - \frac{1}{z_m}\right).$$

W nierówności (18) możemy przyjąć $N = 1$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z$, gdyż wtedy różniczka (5) nie zeruje się dla $h = f$, zatem pamiętając o (17), otrzymujemy nierówność:

$$\{f(z), z\} \leqslant \frac{6}{(1 - z^2)^2} - \frac{6(f'(z))^2}{(1 - f^2(z))^2}$$

dla $z \in (-1,1)$. Nierówność ta jest dokładna w S_1^R i funkcje ekstremalne $f(\zeta)$ spełniają następujące równanie funkcyjne:

$$\frac{f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{f'(z)f(\zeta)}{1 - f(z)f(\zeta)} - \frac{1}{z - \zeta} - \frac{\zeta}{1 - \zeta z} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z}.$$

4. Niech $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że

$$\limsup_{n \to \infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} < 1. \tag{19}$$

Na mocy twierdzenia Töplitza [2] istnieje funkcjonał $L \in H'(U)$ taki, że $L(z^n) = i\lambda_n$, $n = 1,2,\ldots$, $L(1) = 0$ oraz różniczka (5) nie zeruje się dla $h = f$. Przyjmując oznaczenia

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n,$$

$$- \log(1 - f(z)\overline{f(\zeta)}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n,$$

wnioskujemy z twierdzenia 2, że dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_m \lambda_n (-a_{mn} + b_{mn}) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{m}. \tag{20}$$

Nierówność ta jest dokładna i dla każdego $T \in (0,1)$ istnieje funkcja ekstremalna, której pierwszy współczynnik b_1 jest równy T i funkcja ta spełnia następujące związki:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (a_{mn} - b_{mn}) = -\frac{\lambda_n}{n}, \qquad n = 1,\ldots$$

oraz

$$\operatorname{Im}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mo}\right\} = 0.$$

Biorąc zamiast L funkcjonał $(-i)L$ możemy zastosować twierdzenie 2. Wobec tego dla każdej funkcji $f \in S_1^R$ ma miejsce nierówność:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_m \lambda_n (a_{mn} + b_{mn}) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{m}. \tag{21}$$

Nierówność ta jest dokładna i dla każdego $T \in (0,1)$ istnieje funkcja ekstremalna, której pierwszy współczynnik wynosi T i funkcja ta spełnia związki:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (a_{mn} + b_{mn}) = \frac{\lambda_n}{n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

oraz

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mo}\right\} = 0.$$

Nierówności (20) i (21) są odpowiednikami nierówności Grunsky'ego-Nehariego dla funkcji klasy S_1^R.

Zauważmy na koniec, że spełnienie nierówności (20) i (21) dla każdego ciągu $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniającego warunek (19) jest równoważne spełnieniu nierówności (8) dla każdego funkcjonału L oraz $(-i)L \in H(U)$, gdzie L spełnia warunek (3) i $L(1) = 0$. Wynika to także z twierdzenia Töplitza o ogólnej postaci funkcjonału z $H'(U)$. Nierówność (8), mimo pozorów, nie jest więc mocniejsza od nierówności (20) i (21) i dlatego można ją nazwać nierównością Grunsky'ego-Nehariego dla funkcji klasy S_1^R.

Połóżmy w nierówności (20) $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_n = 0$ dla $n \geqslant 2$. Ponieważ $a_{11} = a_3 - a_2^2$, $b_{11} = b_1^2$, więc otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$- (a_3 - a_2^2) \leqslant 1 - b_1^2. \tag{22}$$

Równość zachodzi dla jednoparametrowej rodziny funkcji, których pierwszy współczynnik wynosi T i funkcje te spełniają równanie:

$$- T\left(\frac{1}{f(z)} + f(z)\right) + \frac{1}{z} + z = a_2, \tag{23}$$

czyli

$$f(z) = Tz + a_2z^2 + (a_2^2 + T^2 - 1)z^2 + (a_2^3 + 3a_2T^2 - 2a_2)z^4 + \ldots$$

LITERATURA

[1] Śmigielska J.: Uogólniona nierówność typu Grunsky'ego-Nehariego dla funkcji klasy S_1^{RT} i S_1^R (w druku).

[2] Töplitz O.: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionstheorie, Comment. Math. Helv, 23 (1949), pp. 222-242.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННЫЕ СЛУЧАИ НЕРАВЕНСТВА ГРУНСКИ-НЕХАРИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА S_1^{RT} и S_1^R

Р е з ю м е

В работе применено неравенство Грунски-Нехари для оценки некоторых функционалов в классе однолистных ограниченных и симметричных функций в единичном круге U. Обсуждена проблема максимума функционала

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2(\log(1 - f(z)f(\overline{\zeta})))\right\}, \quad f \in S_1^R$$

где функционал L выбран следущим образом:

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m(h(z_m)-h(0)),$$

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m h(z_m),$$

где: $h \in H(U)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_N \in R$ и $z_1,\ldots,z_N \in (-1,1)$.

SOME PARTICULAR CASES OF THE GRUNSKY-NEHARI INEQUALITY IN THE CLASS S_1^{RT} AND S_1^R

S u m m a r y

In this paper the generalized Grunsky-Nehari inequality has been applied to estimate some functionals in the class S_1^R of univalent, bounded and symmetric functions in the unit disk U. We have been considered the problem of the maximum of

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\}, \quad f \in S_1^R$$

where the functional L has been chosen as follows:

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m(h(z_m) - h(0)),$$

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} i\lambda_m h'(z_m),$$

where $h \in H(U)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_N \in \mathbb{R}$ and $z_1,\ldots,z_N \leftarrow (-1,1)$.