ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Mieczysław KUCHARZEWSKI

PEWNA METODA OKREŚLENIA FUNKCJI W SPOSÓB UWIKŁANY

Streszczenie. Praca ma charakter dydaktyczny. Jej celem jest sprecyzowanie pojęcia funkcji określonej w sposób uwikłany, wyjaśnienie jego własności oraz uproszczenie rozważań z tym pojęciem związanych. Oznaczmy przez P i Q dwa niepuste zbiory i niech D będzie również niepustym podzbiorem P. Praca zawiera możliwie proste określenie funkcji $\varphi : D \to Q$ w sposób uwikłany przez równanie $F(x,y) = q_o$, gdzie F jest odwzorowaniem określonym w pewnym podzbiorze $\Omega \subset P \times Q$, o wartościach w Q. Pokazane są proste warunki wystarczające i konieczne na to, aby takie równanie określało funkcję w sposób uwikłany. W przestrzeniach topologicznych sprecyzowano pojęcie funkcji określonej w sposób uwikłany lokalnie w ustalonym punkcie (x_o, y_o). Omówiono twierdzenie klasyczne o odwzorowaniach uwikłanych, uzasadniono jego założenia na podstawie podanych własności i przytoczonych przykładów. Jako zastosowanie udowodniono globalne twierdzenie o przedstawieniu uwikłanym m-wymiarowej hiperpowierzchni regularnej, klasy C_s w przestrzeni R^n. Wszystkie rozważani są możliwie proste, a jednocześnie bardzo ogólne, ilustrowane licznymi przykładami, które uzasadniają celowość wprowadzonych definicji i przyjętych założeń. Proponowane ujęcie tematu powinno znacznie ułatwić zapamiętanie twierdzeń i ich stosowanie.

Pojęcie funkcji odgrywa podstawową rolę we wszystkich dziedzinach matematyki, a także w jej zastosowaniach. Znane są różne sposoby określania funkcji. Najlepiej jest, jeżeli wartości funkcji są określone przez wyrażenie analityczne od zmiennej niezależnej. Niestety, takie określenie można podać tylko dla stosunkowo nielicznych funkcji. Wiele ważnych funkcji jest zadanych za pomocą pewnych równań, w których wartości zmiennej niezależnej wyznaczają wartości funkcji. Nie zawsze takie wyznaczenie jest łatwe, a często wręcz niemożliwe. Wtedy ograniczamy się do stwierdzenia, że taka funkcja istnieje. W wielu przypadkach, szczególnie teoretycznych, takie stwierdzenie w zupełności wystarcza. Mówimy wtedy, że funkcja jest określona w sposób uwikłany. Takim właśnie określeniem funkcji zajmiemy się w tej pracy. Sprecyzowana zostanie odpowiedź na pytanie co to znaczy, że funkcja jest określona przez równanie w sposób uwikłany oraz podane zostaną pewne proste warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane równanie przedstawiało funkcje w sposób uwikłany. Dalej wprowadzone zostanie pojęcie funkcji określonej w sposób uwikłany lokalnie w jakimś punkcie, a następnie przytoczymy bez dowodu warunek wystarczający na to, aby równanie przedstawiało lokalnie w danym punkcie pewną funkcję w sposób uwikłany. Na zakończenie pokazano pewne zastosowanie do dowodu twierdzenia o przedstawieniu uwikłanym hiperpowierzchni w R^n. Praca ma charakter dydaktyczny i dlatego nie zawiera dowodów. Rozważania podane tutaj mają umotywować i uzasadnić znaczenie warunków występujących w definicjach i twierdzeniach. Dlatego praca zawiera stosunkowo dużą liczbę przykładów.

Funkcję można określić również przez działania nieskończone jako granicę pewnych ciągów, sumę szeregów lub produkt iloczynów nieskończonych względnie wartość ułamów łańcuchowych, ale tymi sposobami przedstawiania funkcji nie będziemy się tutaj zajmować.

1. Określenie funkcji w sposób uwikłany

Rozważania będziemy prowadzić najpierw bardzo ogólnie, aby można je było zastosować do wszelkich możliwych przypadków przez odpowiednią specjalizację. Z drugiej strony rozważania ogólne będą stosunkowo proste, bo nie zaciemniają ich specjalne własności występujących tam pojęć.

Oznaczmy przez $P \times Q$ produkt kartezjański dwóch niepustych zbiorów P i Q. Niech Ω będzie również niepustym podzbiorem tego produktu

$$\Omega \subset P \times Q, \quad \Omega \neq \emptyset.$$

Zakładamy, że dane jest odwzorowanie, (funkcja),

$$F : \Omega \to Q$$

i pewien element $q_o \in Q$.

Zanim przejdziemy do określenia odwzorowania (funkcji) w sposób uwikłany, przypomnimy najpierw pojęcie wykresu odwzorowania (funkcji).

Niech φ będzie odwzorowaniem podzbioru $D \subset P$ w Q, tzn.

$$\varphi : D \to Q, \quad D \subset P. \tag{1.1}$$

Def. 1.1. Wykresem odwzorowania φ nazywamy następujący podzbiór produktu $P \times Q$

$$\text{Wykres } \varphi := \{(x,\varphi(x));\ x \in D\}. \tag{1.2}$$

Podamy teraz definicję funkcji określonej w sposób uwikłany.

Def. 1.2. Mówimy, że równanie

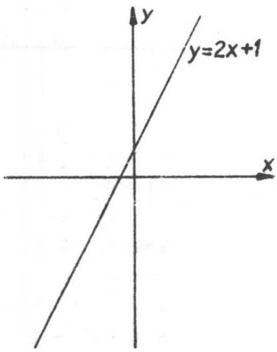
$$F(x,y) = q_o, \quad (x,y) \in \Omega \tag{1.3}$$

określa funkcję (1.1) w sposób uwikłany, gdy zbiór rozwiązań równania (1.3) jest identyczny z wykresem odwzorowania (1.1), tzn. gdy zachodzi równość

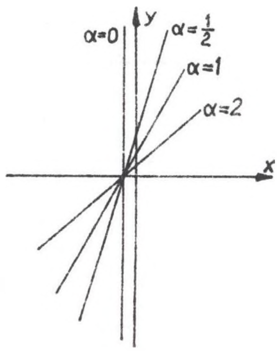
$$\{(x,y);\ F(x,y) = q_o\} = \{(x,\varphi(x));\ x\in D\}\ . \tag{1.4}$$

Dla zilustrowania tej definicji podamy szereg przykładów. W tych przykładach wykorzystujemy fakt, że zbiór rozwiązań równania $F(x,y) = q_o$ nie zmieni się, gdy równanie to zastąpimy przez równanie równoważne.

Przykład 1. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R\times R$, $q_o = 0$ oraz $F(x,y) := 2x-y+1$. Korzystając z powyższej uwagi możemy napisać ciąg równości: $\{(x,y)\in R^2;\ 2x-y+1 = 0\} = \{(x,y)\in R^2;\ y = 2x+1\} = \{(x,2x+1),\ x\in R\}$. A więc równanie $2x-y+1 = 0$ dla $(x,y)\in R^2$ przedstawia w sposób uwikłany funkcję $\varphi: R\to R$ określoną wzorem $\varphi(x) = 2x+1$, (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

Przykład 2. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R\times R$, $F(x,y) := 2x-\alpha y+1$ oraz $q_o = 0$. Rozważmy dwa przypadki $\alpha\neq 0$ i $\alpha = 0$.

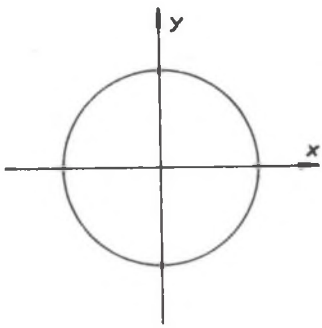
Jeżeli $\alpha\neq 0$, to otrzymujemy wówczas ciąg równości: $\{(x,y)\in R^2;\ 2x-\alpha y+1 = 0\} = \{(x,y)\in R^2;\ y = \frac{2}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}\} = \{(x,\ \frac{2}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha});\ x\in R\}$. Wnioskujemy stąd, na mocy definicji 1.2, że równanie $2x-\alpha y+1 = 0$ dla $(x,y)\in R^2$ przedstawia w sposób uwikłany funkcję $\varphi: R\to R$ określoną wzorem $\varphi(x) = \frac{2}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}$, (rys. 2).

Jeżeli $\alpha = 0$, to równanie $2x - 0y + 1 = 0$ dla $(x,y)\in R^2$ nie przedstawia w sposób uwikłany żadnej funkcji. Innymi słowami, nie istnieje funkcja $\varphi: D\to R$, $D\neq\emptyset$, $D\subset R$, dla której zachodziłaby równość:

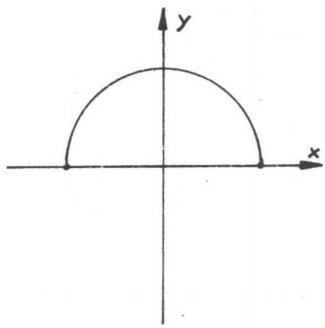
$$\{(x,y)\in R^2;\ 2x + 0y + 1 = 0\} = \{(x,\varphi(x));\ x\in D\neq\emptyset\}. \tag{1.5}$$

Istotnie, gdyby taka funkcja istniała, to, ponieważ punkty $(-\frac{1}{2}, 1)$ i $(-\frac{1}{2}, 2)$ należą do lewej strony równania (1.5), musiałyby one należeć także do strony prawej, tzn. musiałoby być $\varphi(-\frac{1}{2}) = 1$ i jednocześnie $\varphi(-\frac{1}{2}) = 2$, co jest oczywiście niemożliwe (rys. 2).

Przykład 3. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R^2$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ oraz $q_o = 0$. Zbiór $\{(x,y)\in R^2;\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ przedstawia okrąg o promieniu 1 i o środku w początku układu współrzędnych. Równanie to nie przedstawia jednak żadnej funkcji w sposób uwikłany. Gdyby bowiem taka funkcja φ istniała, to, ponieważ punkty (0,1) i (0,-1) leżą na danym okręgu, funkcja ta musiałaby przyjmować wartości $\varphi(0) = 1$ i jednocześnie $\varphi(0) = -1$, co jest niemożliwe (rys. 3).



Rys. 3



Rys. 4

Przykład 4. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R\times\langle 0,\infty)$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ oraz $q_o = 0$. Mamy wtedy ciąg równości: $\{(x,y)\in R\times\langle 0,\infty);\ x^2 + y^2 - 1 = 0\} = \{(x,y)\in R\times\langle 0,\infty);\ y = \sqrt{1-x^2}\} = \{(x,\sqrt{1-x^2});\ x\in\langle -1, 1\rangle\}$. A więc równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ przedstawia w zbiorze $R\times\langle 0,\infty)$ w sposób uwikłany funkcję $\varphi : \langle -1,1\rangle \to R$ określoną wzorem $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, (rys. 4).

Przykład 5. Zbiór rozwiązań równania $x^2 + y^2 + 1 = 0$ dla $(x,y)\in R^2$ jest pusty, a więc równanie to nie przedstawia żadnej funkcji w sposób uwikłany, rozważamy bowiem tylko funkcje o niepustych dziedzinach.

Przykład 6. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R^2$, $F(x,y) := x^2 + y^2$ oraz $q_o = 0$. Zbiór rozwiązań równania $x^2 + y^2 = 0$ dla $(x,y)\in R^2$ składa się z jednego punktu (0,0), a więc równanie przedstawia funkcję określoną tylko w punkcie $x = 0$ i przyjmującą wartość $\varphi(0) = 0$. Mamy bowiem ciąg równości: $\{(x,y)\in R^2;\ x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\} = \{(0,\varphi(0));\ \varphi(0) = 0\}$.

2. Warunki na to, aby równanie określało funkcję w sposób uwikłany

Z podanych wyżej przykładów widać, że problem czy dane równanie określa funkcję, czy nie określa funkcji w sposób uwikłany, nie zależy od regularności odwzorowania, które wyznacza to równanie. Zauważmy, że wszystkie funkcje występujące w podanych wyżej przykładach są analityczne, a mimo to odpowiednie równania w pewnych przypadkach określają, w innych nie określają funkcji w sposób uwikłany. Również dziedziny tych funkcji są bardzo różne. Okazuje się, że równanie określa funkcję w sposób uwikłany wtedy, gdy jego zbiór rozwiązań ma pewne specjalne własności, które w dalszym ciągu podamy. Najpierw omówimy kilka pojęć, które będą potrzebne.

Def. 2.1. Zbiór $Z \subset P \times Q$ nazywamy zbiorem jednolistnym względem P (pierwszego czynnika), gdy dla każdego $x \in P$ istnieje co najwyżej jedna wartość $y \in Q$ tak, że $(x,y) \in Z$.

Uwaga 2.1. Podzbiór pusty lub jednoelementowy produktu $P \times Q$ jest jednolistny względem P.

Uwaga 2.2. Wykres każdego odwzorowania $\varphi : D \to Q$, gdzie $D \subset P$, jest jednolistny względem P.

Def. 2.2. Rzutem podzbioru $Z \subset P \times Q$ na pierwszy czynnik, czyli na P, nazywamy przyporządkowanie każdej parze $(x,y) \in Z$ pierwszego elementu tej pary, tzn. odwzorowanie $\pi_1 : Z \to P$ określone wzorem $\pi_1(x,y) = x$.

Rzut ma następujące własności.

Uwaga 2.3. Rzut zbioru $Z \subset P \times Q$ jest wtedy i tylko wtedy zbiorem pustym, gdy sam zbiór Z jest pusty, tzn.

$$\pi_1(Z) = \emptyset \iff Z = \emptyset.$$

Uwaga 2.4. Rzut wykresu odwzorowania $\varphi : D \to Q$, gdzie $D \subset P$, jest identyczny z dziedziną odwzorowania, tzn.

$$\text{Rzut} \left\{(x,\varphi(x));\ x \in D\right\} = D.$$

Na podstawie definicji 2.1 możemy teraz sformułować następujący warunek konieczny i wystarczający na to, aby równanie określało w sposób uwikłany pewną funkcję.

Wniosek 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby równanie (1.3) określało w sposób uwikłany pewną funkcję jest, aby zbiór rozwiązań tego równaia był niepusty i jednolistny względem zbioru P.

D. Konieczność wynika natychmiast z faktu, że wykres funkcji jest zbiorem jednolistnym względem P, (uwaga 2.2), i niepustym, (rozważamy tylko funkcje o niepustej dziedzinie).

Niech teraz zbiór rozwiązań równania (1.3), tzn. zbiór

$$\{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y)=q_o\} \tag{2.1}$$

będzie niepusty i jednolistny względem P. Oznaczny przez D rzut tego zbioru na P. Zgodnie z uwagą 2.3 zbiór ten jest również niepusty. Możemy teraz określić funkcję φ w zbiorze D następująco: dla każdego $x\in D$ niech $\varphi(x)$ oznacza jedyną wartość y taką, że (x,y) spełnia równanie $F(x,y)=q_o$. Z jednolistości zbioru (2.1) wynika, że taka wartość istnieje co najwyżej jedna. Istnienie takiego elementu wynika z tego, że x należy do rzutu zbioru (2.1) na P. Z określenia funkcji wynika dalej, że wykres φ zawiera się w zbiorze rozwiązań, tzn. zachodzi inkluzja

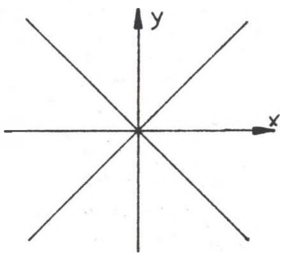
$$\{(x,\varphi(x));\ x\in D\}\subset\{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y)=0\}. \tag{2.2}$$

Dla pokazania inkluzji przeciwnej niech $(\tilde{x},\tilde{y})$ należy do (2.1). Wtedy rzut $(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{x}\in D$. Gdyby $\varphi(\tilde{x})\neq\tilde{y}$, wtedy zbiór rozwiązań (2.1) nie byłby jednolistny względem P, a więc musi być $\tilde{y}=\varphi(\tilde{x})$ i $(\tilde{x},\tilde{y})$ należy do wykresu odwzorowania φ. Mamy więc inkluzję przeciwną, czyli zachodzi równość (1,4). Oznacza to, że $\varphi : D\to Q$ jest określona w sposób uwikłany przez równanie (1.3).

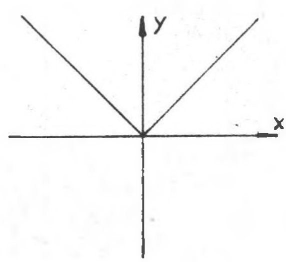
Uwaga 2.5. Ponieważ odpowiedniość między odwzorowaniami a ich wykresami jest wzajemnie jednoznacza, przeto funkcja określona w sposób uwikłany przez dane równanie jest jedyna.

Podamy jeszcze kilka przykładów, które ilustrują dalsze własności funkcji określonych przez równania w sposób uwikłany.

<u>Przykład 7</u>. Niech $P=Q=R$, $\Omega=R^2$, $F(x,y):=x^2-y^2$ oraz $q_o=0$. Równanie $x^2-y^2=0$, $(x,y)\in R^2$ nie określa żadnej funkcji w sposób uwikłany, bo zbiór rozwiązań tego równania przedstawia dwie proste przecinające się w punkcie (0,0), nie jest więc zbiorem jednolistnym względem oxi X, (rys. 5).



Rys. 5



Rys. 6

Przykład 8. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R\times\langle 0,\infty)$, $F(x,y) := x^2 - y^2$ oraz $q_0 = 0$. W tym przypadku zbiór rozwiązań równania $x^2 - y^2 = 0$, gdzie $(x,y)\in R\times\langle 0,\infty)$, jest niepusty i jednolistny względem osi X, a więc na pewno przedstawia jakąś funkcję w sposób uwikłany.

Ponieważ rzut zbioru rozwiązań danego równania pokrywa całą oś X, (R), funkcja taka jest określona dla wszystkich x. Dla jej wyznaczenia rozważmy zbiór rozwiązań podanego równania. Mamy ciąg równości: $\{(x,y);\ R\times\langle 0,\infty);\ x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,y)\in R\times\langle 0,\infty);\ y = \sqrt{x^2}\} = \{(x,y)\in R\times\langle 0,\infty);\ y = |x|\} = \{(x,|x|);\ x\in R\}$. A więc równanie $x^2 - y^2 = 0$ dla $(x,y)\in R\times\langle 0,\infty)$ określa w sposób uwikłany funkcję $\varphi : R\to R$ podaną wzorem $\varphi(x) = |x|$, (rys. 6).

Przykład 8 pokazuje, że chociaż odwzorowanie F jest analityczne, funkcja określona przez odpowiednie równanie może nie mieć nawet pierwszej pochodnej w jakimś punkcie.

Podamy teraz warunek wystarczający i konieczny na to, aby równanie (1.3) określało zadaną funkcję $\varphi : D\to Q$, $D\subset P$ i $D\neq\emptyset$ w sposób uwikłany.

Wniosek 2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby równanie (1.3) określało w sposób uwikłany funkcję $\varphi : D\to Q$, gdzie $D\subset P$ i $D\neq\emptyset$, jest, aby spełnione były następujące warunki:

$$\text{Rzut } \{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y) = q_0\} = D = \text{dziedzina } \varphi\ , \tag{2.3}$$

$$\text{dla każdego } x\in D\ \ F(x,\varphi(x)) = q_0, \tag{2.4}$$

funkcja φ spełniająca (2.3) i (2.4) jest jedyna. (2.5)

Warunek (2.5) można zastąpić innym warunkiem (2.6).

Zbiór rozwiązań równania (1.3), tzn. zbiór

$$\{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y) = q_0\} \tag{2.6}$$

jest jednolistny względem P.

D. Pokażemy najpierw konieczność podanych wyżej warunków. Jeżeli φ jest określona przez równanie $F(x,y) = q_0$, wtedy na podstawie definicji 1.2 zachodzi równość zbiorów:

$$\{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y) = q_0\} = \{(x,\varphi(x));\ x\in D\}. \tag{2.7}$$

Z równości zbiorów wynika równość ich rzutów, a rzutem wykresu odwzorowania jest jego dziedzina, (uwaga 2.4). Wynika stąd, że musi zachodzić warunek (2.3). Warunek (2.4) jest konsekwencją zawierania się prawej strony równości (2.7) w lewej. Jedyność funkcji φ wynika z uwagi 2.5, że każda funkcja określona w sposób uwikłany jest jedyna. Zbiór rozwiązań jest jednolistny względem P, bo taki jest wykres odwzorowania, (uwaga 2.2).

Pokażemy teraz, że warunki (2.3), (2.4) i (2.5), względnie (2.3), (2.4) i (2.6) są wystarczające.

Z (2.4) wynika inkluzja:

$$\{(x,\varphi(x));\ x\in D\} \subset \{(x,y)\in\Omega\ ;\ F(x,y) = q_0\}. \tag{2.8}$$

Dla dowodu wystarczy pokazać inkluzję przeciwną. Niech $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \{(x,y) \in \Omega ;\ F(x,y) = q_0\}$. Ze względu na (2.3), $\tilde{x} \in D$ oraz

$$F(\tilde{x},\tilde{y}) = q_0. \tag{2.9}$$

Gdyby $\tilde{y} \neq \varphi(\tilde{x})$, wtedy funkcja φ spełniająca (2.3) i (2.4) nie byłaby funkcją jedyną, a to jest sprzeczne z (2.5). A więc $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$ i punkt $(\tilde{x},\tilde{y})$ należą do strony lewej (2.8), tzn. że inkluzja przeciwna do (2.8) jest pokazana. Stąd wynika równość (2.7), co oznacza, że funkcja φ jest określona w sposób uwikłany przez równanie (1.3).

Dowód przebiega zupełnie analogicznie, gdy zamiast jedyności funkcji φ założymy jednolistność zbioru rozwiązań względem P, tzn. założenie (2.6).

Zauważmy jeszcze, że warunki (2.3) i (2.4) nie są wystarczające na to, aby równanie (1.3) określało w sposób uwikłany funkcję φ. Pokazuje to przykład 3, w którym zbiór rozwiązań równania jest okręgiem. Rzut tego okręgu na oś X jest równy $\langle -1,1 \rangle$. Funkcja $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ jest określona w tym przedziale i spełnia związek (2.4). Funkcja φ nie jest jedyna, funkcja $\tilde{\varphi}(x) = -\sqrt{1-x^2}$ też te warunki spełnia. Zatem funkcja φ nie jest określona w sposób uwikłany przez równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0, (x,y) \in R^2$, bo to równanie żadnej funkcji nie określa. Oczywiście, nie jest wtedy spełniony również warunek (2.6).

3. Funkcje określone w sposób uwikłany w przestrzeniach topologicznych

Dotychczasowe rozważania odnosiły się do dowolnych zbiorów P, Q, dowolnych równań i dowolnych odwzorowań, w szczególności do najważniejszych odwzorowań $\varphi : D \to R^n$, gdzie $D \subset R^m$, a n i m są dowolnymi liczbami naturalnymi. Wprowadzona tutaj ogólność rozważań pozwala uniknąć rozpatrywania prostych ale kłopotliwych przypadków dla różnych wartości n i m. Dla badania odwzorowań ciągłych musimy ograniczyć się do przestrzeni topologicznych. W takich przestrzeniach możemy określić pojęcie funkcji ciągłej oraz pojęcie funkcji określonej w sposób uwikłany w pewnym otoczeniu jakiegoś punktu, tzn. funkcji określonej w sposób uwikłany lokalnie.

Niech P i Q będą przestrzeniami topologicznymi, a w produkcie P x Q niech będzie określona topologia produktowa. Dla dowolnego punktu $(x_0,y_0) \in P \times Q$ oznaczmy przez $U(x_0)$ otoczenie punktu x_0 w przestrzeni P, a przez $V(y_0)$ otoczenie punktu y_0 w przestrzeni Q. Wtedy produkt $U(x_0) \times V(y_0)$ stanowi pewne otoczenie punktu (x_0,y_0) w przestrzeni P x Q. Załóżmy ponadto, że $F(x_0,y_0) = q_0$.

Def. 3.1. Mówimy, że równanie

$$F(x,y) = q_0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{3.1}$$

określa lokalnie w punkcie (x_0, y_0), w sposób uwikłany funkcję $\varphi: U(x_0) \to \Omega$ gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0) \times V(y_0)$ tego punktu, w którym zbiór rozwiązań równania (3.1) jest identyczny z wykresem odwzorowania φ w otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0, tzn., gdy zachodzi równość

$$\left\{(x,y) \in U(x_0) \times V(y_0);\ F(x,y) = q_0\right\} = \left\{(x,\ (x));\ x \in U(x_0)\right\}. \tag{3.2}$$

Nie ma jakiegoś prostego związku między przedstawieniem i lokalnym przedstawieniem funkcji w postaci uwikłanej. Jeżeli jakieś równanie określa lokalnie jakąś funkcję w postaci uwikłanej nawet w każdym punkcie, to stąd nie wynika, że określa ono również jakąś funkcję globalnie, (przykład 9). Nie zachodzi również związek odwrotny, tzn. może się zdarzyć, że równanie określa w sposób uwikłany pewną funkcję globalnie, a jednocześnie nie przedstawia lokalnie żadnej funkcji w pewnym punkcie, (przykład 10).

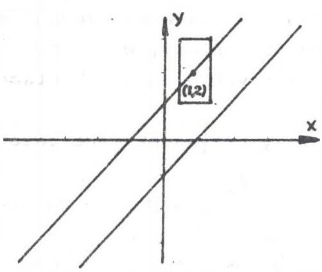
Podamy teraz przykłady, które ilustrują podane wyżej sytuacje.

Przykład 9. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R^2$, $q_0 = 0$. Zakładamy, że P i Q mają zwykłe topologie. Niech $F: R^2 \to R$ będzie określona następująco: $F(x,y) := (x-y-1) \cdot (x-y+1)$.

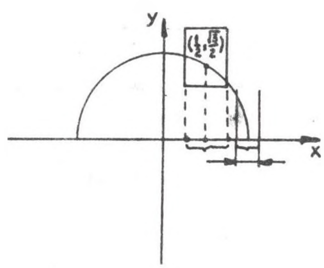
Równanie $F(x,y) = 0$, $(x,y) \in R^2$ nie przedstawia żadnej funkcji w sposób uwikłany, bo zbiór rozwiązań

$$\left\{(x,y) \in R^2;\ (x-y-1) \cdot (x-y+1) = 0\right\}$$

tworzy proste równoległe, a więc nie jest jednolistny względem P.



Rys. 7



Rys. 8

Natomiast w każdym punkcie na tych prostych równanie to określa lokalnie pewną funkcję w sposób uwikłany. Na przykład w punkcie (1,2) istnieje otoczenie $U(1) = (1 - \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2})$ punktu 1 w R i otoczenie $V(2) = (2-1, 2+1)$

punktu 2 w R i istnieje funkcja $\varphi : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \to R$ równa $\varphi(x) = x+1$, która jest przedstawiona w sposób uwikłany, lokalnie w punkcie (1,2), równaniem $(x-y-1) \cdot (x-y+1) = 0$ dla $(x,y) \in U(1) \times V(2)$. Zachodzi bowiem równość: $\{(x,y) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times (1,3);\ (x-y-1)(x-y+1) = 0\} = \{(x,x+1);\ x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$.

Przykład 10. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R \times \langle 0,\infty)$, $q_0 = 0$ oraz $F(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Jak wiemy, (przykład 4, rys. 4), równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ dla $(x,y) \in R \times \langle 0,\infty)$ przedstawia półokrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1. Równanie to przedstawia w sposób uwikłany funkcję $\varphi : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0,\infty)$ określoną wzorem $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Natomiast rozważane równanie nie przedstawia w punkcie (1,0) żadnej funkcji lokalnie, bo żadna taka funkcja nie jest określona w pewnym otoczeniu liczby 1. Wynika to stąd, że rzut wykresu odwzorowania φ nie pokrywa żadnego otoczenia liczby 1, (rys. 8). Natomiast, jeżeli funkcja $\varphi : D \to R$ jest określona w sposób uwikłany przez równanie (1.3) w zbiorze otwartym Ω i ma dziedzinę otwartą D, to w każdym punkcie $(x_0,y_0) \in \Omega$ spełniającym związek $F(x_0,y_0) = q_0$ istnieją otoczenie $U(x_0)$ i $V(y_0)$ i funkcja $\varphi : U(x_0) \to V(y_0)$ określona lokalnie w punkcie (x_0,y_0) w sposób uwikłany przez to równanie.

4. Podstawowe twierdzenia o lokalnym przedstawieniu funkcji w sposób uwikłany

W wielu rozważaniach trzeba stwierdzić czy istnieje funkcja określona w sposób uwikłany przez równanie (1.3) i ewentualnie obliczyć jej pochodne o ile istnieją. Dla lokalnego przedstawienia funkcji w sposób uwikłany istnieją warunki na to, aby stwierdzić istnienie takiej funkcji i ewentualnie jej różniczkowalność. Jest to bardzo ważna własność funkcji przedstawionych lokalnie w sposób uwikłany, bo dla funkcji określonych globalnie w sposób uwikłany takie warunki nie są znane. Ponieważ wzmiankowane warunki zawierają pochodne cząstkowe występujących odwzorowań, więc mogą być zastosowane tylko w przypadku odwzorowań określonych w zbiorach otwartych R^n i wartościach w R^m, n i $m \in N$.

Najpierw podamy pewien specjalny, najprostszy przypadek tego twierdzenia, ważny dla płaszczyzny, tzn. gdy $P = Q = R$.

Niech $P = Q = R$ i niech $F : \Omega \to R$ będzie klasy C_s $(s \geqslant 1)$ w zbiorze otwartym $\Omega \subset R^2$ i $\Omega \neq \emptyset$.

Tw. 1 (szczególne o odwzorowaniach określonych w sposób uwikłany lokalnie).

Jeżeli w punkcie $(x_0,y_0) \in \Omega$ zachodzą związki:

$$F(x_0,y_0) = q_0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0, \tag{4.2}$$

to istnieją przedziały otwarte $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ i odwzorowanie

$\varphi: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ klasy C_s, określone w punkcie (x_0, y_0) przez równanie $F(x,y) = q_0$ w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Dowodu nie będziemy podawać, bo znajduje się on w literaturze, [1] ss. 202-203. Pokażemy jedynie, że warunki (4.1) i (4.2) są istotne, tzn. żadnego z nich nie można usunąć. Pokażemy również, że warunek (4.2) nie jest konieczny, tzn. funkcja może być określona w sposób uwikłany przez jakieś równanie, choć nie jest spełniony warunek (4.2).

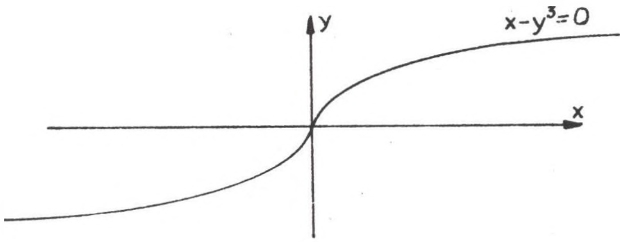
Podamy teraz odpowiednie przykłady.

1^o. Jak wiemy, (przykład 5), równanie $F(x,y) := x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie przedstawia w sposób uwikłany żadnej funkcji, chociaż warunek (4.2) jest spełniony w punkcie (0,1). Mamy bowiem $F_y(0,1) = 2y|_{(0,1)} = 2 \neq 0$. Natomiast warunek (4.1) nie zachodzi, a więc jest on istotny.

2^o. Weźmy teraz funkcję $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ i punkt (1,0). W tym punkcie zachodzi warunek (4.1), bo $F(1,0) = 0$, ale $F_y(1,0) = 2.0 = 0$, tzn. nie zachodzi warunek (4.2). Równanie, jak wiemy (przykład 10), nie przedstawia lokalnie żadnej funkcji w punkcie (1,0), (rys. 8). W tym przypadku nie pomoże nawet zacieśnienie funkcji F do jakiegokolwiek podzbioru R^2. Oznacza to, że warunek (4.2) jest istotny.

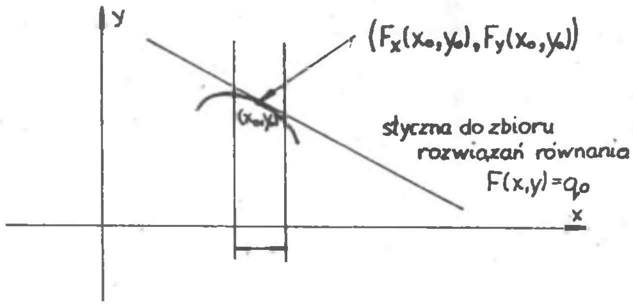
3^o. Zauważmy jeszcze, że warunek (4.1) jest konieczny, bo zbiór, który przedstawia wykres funkcji nie może być pusty, tzn. muszą istnieć punkty, które spełniają dane równanie. Natomiast warunek (4.2) nie jest konieczny, jak pokazuje następujący przykład.

Przykład 11. Niech $P = Q = R$, $\Omega = R^2$, $q_0 = 0$ oraz $F(x,y) = x-y^3$. Równanie $x-y^3 = 0$ przedstawia lokalnie w punkcie (0,0) funkcję $\varphi: R \to R$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ w sposób uwikłany, ale warunek (4.2) nie jest spełniony, $F_y(0,0) = 3y^2|_{(0,0)} = 0$, (rys. 9). Warunek (4.2) nie jest więc konieczny.



Rys. 9

Zauważmy, że warunek (4.1) oznacza niepustość zbioru rozwiązań, warunek (4.2) gwarantuje jednolistność zbioru rozwiązań w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0). Istotnie, wektor $(F_x(x_0,y_0), F_y(x_0,y_0))$ jest wektorem prostopadłym w punkcie (x_o, y_o) do krzywej przedstawiającej zbiór rozwiązań. Jeżeli $F_y(x_o, y_o) \neq 0$, tzn. że styczna nie jest prostopadła do osi X, a więc jest zbiorem jednolistnym względem tej osi. Lokalnie w otoczeniu punktu (x_o, y_o) styczna aproksymuje krzywą (zbiór rozwiązań), a więc i ten zbiór rozwiązań jest, co najmniej lokalnie, jednolistny względem osi X, a jego rzut pokrywa, również co najmniej lokalnie, pewne otoczenie x_o. Zbiór rozwiązań przedstawia lokalnie wykres pewnej funkcji. Równanie przedstawia lokalnie w sposób uwikłany pewną krzywą (rys. 10).



Rys. 10

Zanim sformułujemy twierdzenie ogólne o odwzorowaniach określonych w sposób uwikłany, rozpatrzmy inny szczególny przypadek krzywej w trójwymiarowej przestrzeni.

Przykład 12. Niech $P = R$, $Q = R^2$, $q_o = (0,0) \in R^2$, $\Omega = R^3$, $F: \Omega \to R^2$, $F = (F^1, F^2)$, gdzie

$$F^1(x,y,z) = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, \quad (A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2 > 0,$$

$$F^2(x,y,z) = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2, \quad (A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2 > 0.$$

Jeżeli rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

równa się 2, to zbiór rozwiązań układu równań $F(x,y,z) = 0$

$$\{(x,y,z) \in R^3;\ F(x,y,z) = 0\}$$

przedstawia prostą równoległą do wektora

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Jeżeli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

to prosta ta nie jest prostopadła do osi X, bo wtedy wektor do niej równoległy nie jest prostopadły do tej osi, a więc jest jednolistna względem osi X i układ równań $F(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in R^3$ określa w sposób uwikłany funkcję $\varphi : R \to R^2$ $\varphi(\varphi^1(x), \varphi^2(x))$ otrzymaną przez obliczenie z tego układu y i z w zależności od x.

Przykład 12 można uogólnić biorąc zamiast płaszczyzn dwie powierzchnie

$$\left.\begin{aligned} F^1(x,y,z) &= q_o^1 \\ F^2(x,y,z) &= q_o^2 \end{aligned}\right\} = F(x,y,z) = q_o \qquad (**)$$

klasy $C_s (s \geqslant 1)$ w pewnym zbiorze otwartym $\Omega \subset R^3$.

Niech (x_o, y_o, z_o) będzie wspólnym rozwiązaniem tego układu. Wektory

$$(F^1_x(x_o,y_o,z_o),\ F^1_y(x_o,y_o,z_o),\ F^1_z(x_o,y_o,z_o))$$
$$(F^2_x(x_o,y_o,z_o),\ F^2_y(x_o,y_o,z_o),\ F^2_z(x_o,y_o,z_o))$$

przedstawiają wektory prostopadłe do płaszczyzn stycznych do tych powierzchni w punkcie (x_o, y_o, z_o). Ich iloczyn wektorowy, tzn. wektor

$$\left(\begin{vmatrix} F^1_y, & F^1_z \\ F^2_y, & F^2_z \end{vmatrix} (x_o,y_o,z_o)\ \begin{vmatrix} F^1_z, & F^1_x \\ F^2_z, & F^2_x \end{vmatrix} (x_o,y_o,z_o)\ \begin{vmatrix} F^1_x, & F^1_y \\ F^2_x, & F^2_y \end{vmatrix} (x_o,y_o,z_o) \right)$$

jest wektorem stycznym do krzywej określającej rozwiązanie układu (**). Jeżeli pierwsza współrzędna wektora stycznego jest różna od zera, tzn.

$$\begin{vmatrix} F^1_y, & F^1_z \\ F^2_y, & F^2_z \end{vmatrix} (x_o,y_u,z_o) \neq 0,$$

to wektor ten, a więc cała prosta styczna nie jest prostopadła do osi X. Jest więc zbiorem jednolistnym względem tej osi. Ponieważ styczna lokalnie aproksymuje zbiór, więc zbiór rozwiązań będzie również jednolistny względem osi X w pewnym otoczeniu (x_o, y_o, z_o), a jego rzut będzie pokrywał pewne otoczenie (x_o). Wtedy, w myśl wniosku 2, układ (**) przedstawia lokalnie pewną funkcję w sposób uwikłany. Powyższe rozważania wskazują, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 2. Niech $P = R$, $Q = R^2$, $q_o \in R^2$ oraz odwzorowanie $F : \Omega \to R^2$ klasy $C_s (s \geqslant 1)$ w zbiorze otwartym $\Omega \subset R^3$.

Jeżeli w punkcie $(x_o,y_o,z_o)\in\Omega$ spełnione są warunki:

$$F(x_o,y_o,z_o) = q_o, \tag{4.3}$$

$$\begin{vmatrix} F^1_y, & F^1_z \\ F^2_y, & F^2_z \end{vmatrix}_{(x_o,y_o,z_o)} \neq 0, \tag{4.4}$$

to istnieje otoczenie $U(x_o)\subset R$ i otoczenie $V(y_o,z_o)\subset R^2$ oraz odwzorowanie $\varphi: U(x_o)\to V(y_o,z_o)$ klasy C_s określone lokalnie w sposób uwikłany przez równanie $F(x,y,z) = q_o$ w otoczeniu $U(x_o)\times V(y_o,z_o)$.

Teraz możemy podać twierdzenie lokalne o odwzorowaniu uwikłanym w całej ogólności.

Niech $P = R^p$, $Q = R^q$, $q_o\in Q$ oraz $F:\Omega\to R^q$ będzie klasy C_s $(s\geqslant 1)$ w zbiorze otwartym $\Omega\subset R^p\times R^q$.

Tw. 3. Jeżeli w punkcie $(x_o,y_o)\in\Omega$ spełnione są warunki:

$$F(x_o,y_o) = q_o \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial y^\beta}(x_o,y_o)\right) \neq 0 \quad \alpha,\beta = 1,2,\dots,q, \tag{4.6}$$

to istnieją przedziały otwarte $U(x_o,\delta) = (x_o-\delta,x_o+\delta)$, $V(y_o,\varepsilon)=(y_o-\varepsilon,y_o+\varepsilon)$ i odwzorowanie $\varphi: U(x_o,\delta)\to V(y_o,\varepsilon)$ klasy C_s określone lokalnie w punkcie (x_o,y_o) w sposób uwikłany przez równanie

$$F(x,y) = q_o$$

w otoczeniu $U(x_o,\delta)\times V(y_o,\varepsilon)$ punktu (x_o,y_o).

Dowód znajduje się w [1] ss. 202-203.

Uwaga. Odpowiednie twierdzenie o odwzorowaniach określonych w sposób uwikłany podane w [1] ma, przy naszych oznaczeniach, postać następującą.

Tw. Niech F będzie ciągłym odwzorowaniem określonym w podzbiorze otwartym $\Omega\subset R^p\times R^q$ w R^q klasy C_1 względem zmiennych $y^1,y^2,\dots,y^q$.

$$F:\Omega \to R^q$$

Niech $(x_o,y_o)\in\Omega$. Jeżeli

$$F(x_o,y_o) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Det}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial y^\beta}(x_o,y_o)\right) \neq 0 \quad \alpha,\beta = 1,2,\dots,q,$$

to istnieją takie liczby $\delta>0$ i $\varepsilon>0$, że

(a) $K(x_o,\delta)\times K(y_o,\varepsilon)\subset\Omega$

i (b) istnieje ciągłe odwzorowanie $\varphi: K(x_o,\delta)\to K(y_o,\varepsilon)$ o własnościach:

$$\bigwedge_{x\in K(p_o,\delta)} \quad F(x,\varphi(x)) = 0$$

(c) $\bigwedge x \in K(p_o,\delta)$ punkt $\varphi y = \varphi(x)$ jest jedynym punktem w $K(p_o,\delta)$ spełniającym równość $F(x,y) = 0$.

Ponadto

$$\varphi(x_o) = y_o.$$

Jeżeli F jest klasy C_s $s \geqslant 1$, to również φ jest klasy C_s.

Przesłanki (b) i (c) oznaczają, że spełnione są warunki (2.3), (2.4) i (2.6) w otoczeniu $K(x_o,\delta) \times K(y_o,\varepsilon)$ punktu (x_o,y_o), a więc w myśl wniosku (2) odwzorowanie φ jest określone w sposób uwikłany przez równanie $F(x,y) = 0$, tzn. zachodzi twierdzenie 3.

5. Zastosowanie

Jako zastosowanie przedstawionych rozważań podamy określenie hiperpowierzchni w sposób uwikłany. W tym celu musimy podać najpierw kilka definicji, w szczególności definicję hiperpowierzchni.

Def. 5.1. Hiperpowierzchnią m-wymiarową H^m w przestrzeni n-wymiarowej R^n $(0 \leqslant m < n)$ nazywamy podzbiór R^n taki, że każdy punkt $x_o \in H^m$ posiada otoczenie $U(x_o)$ na H^m homeomorficzne ze zbiorem otwartym w R^m. Hemeomorfizm $H:U(x_o) \to R^m$ nazywamy także lokalnym układem współrzędnych na H^m, a odwzorowanie do niego odwrotne h^{-1} $(h(U(x_o)) \to U(x_o)$ - lokalnym przedstawieniem parametrycznym hiperpowierzchni lub lokalną parametryzacją

Określimy teraz pojęcie odzworowania regularnego w punkcie oraz wartości regularnej.

Niech $f:D \to R^2$, $D \subset R^p$, D otwarty, będzie odwzorowaniem podzbioru otwartego D w przestrzeń R^q klasy C_s. Odzworowanie daje się przedstawić jako ciąg q-składowych od p-zmiennych, $\bigwedge x(x,\dots,x^p) \in D$

$$f(x) = F(x^1,\dots,x^p) = (f^1(x,\dots,x^p),\dots,f^q(x^1,\dots,x^p)) =$$
$$= (f^{\alpha}(x^i)) \quad i = 1,2,\dots,p, \ \alpha = 1,2,\dots,q.$$

Dla odwzorowania f możemy utworzyć w każdym punkcie macierz złożoną z pochodnych cząstkowych funkcji składowych. Nazywamy ją macierzą Jacobiego odwzorowania f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i}\right) \quad \alpha = 1,2,\dots,q, \quad i = 1,2,\dots,p. \tag{5.1}$$

Macierz Jacobiego ma q-wierszy i p-kolumn. W ustalonym punkcie $x_o \in D$ jest to macierz liczbowa.

Def. 5.2. Mówimy, że x_o jest punktem regularnym odwzorowania f, gdy rząd macierzy Jacobiego w tym punkcie jest maksymalny, tzn. równa się min (p,q).

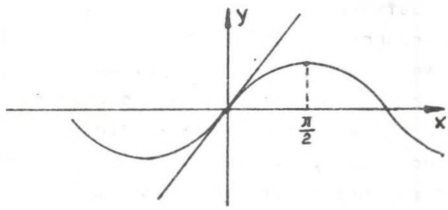
$$rz\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o)\right) = \min(p,q). \tag{5.2}$$

Def. 5.3. Hiperpłaszczyznę H^m nazywamy klasy C_s, jeżeli każdy punkt należy do obrazu jakiegoś przedstawienia klasy C_s.

Def. 5.4. Hiperpłaszczyznę H^m nazywamy regularną, jeżeli każdy punkt należy do obrazu jakiegoś przedstawienia parametrycznego regularnego.

Def. 5.5. Element $a \in R^q$ nazywamy wartością regularną odwzorowania f, gdy każdy punkt przeciwobrazu a jest punktem regularnym lub dokładniej przeciwobraz nie zawiera punktów nieregularnych. W szczególności, gdy $a \notin f(D)$, to zbiór $f^{-1}(a)$ jest pusty i a jest wartością regularną.

Przykład 13. $f: R \to R$ $f(x) = \sin x$. Punktami regularnymi są wszystkie punkty różne od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, tzw. punkty, w których pochodna znika. Wartościami regularnymi są wszystkie liczby różne od 1 i -1. W tym przypadku macierz Jacobiego składa się z jednego elementu $(\frac{\partial f}{\partial x})$. Jej rząd maksymalny oznacza, że ta pochodna jest różna od zera. Wartość regularna to taka wartość, której przeciwobraz nie zawiera żadnego punktu, w którym pochodna się zeruje.



Rys. 11

Przykład 14. Niech $F: R^3 \to R$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Macierz Jacobiego ma postać $(2x,2y,2z)$ i ma rząd maksymalny w każdym punkcie różnym od $(0,0,0)$. Każda wartość różna od 0 jest wartością regularną, bo $a \neq 0$ $F^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a\}$ jest zbiorem pustym, gdy $a < 0$. Składa się tylko z punktów różnych od $(0,0,0)$, gdy $a > 0$, a wszystkie takie punkty są punktami regularnymi.

Udowodnimy teraz twierdzenie globalne o przedstawieniu hiperpowierzchni m-wymiarowej H^m w przestrzeni R^n w sposób uwikłany.

Tw. 4. Jeżeli $F: \Omega \to R^{n-m}$ jest klasy $C_s (s \geq 1)$ w zbiorze otwartym $\Omega \subset R^n$, to przeciwobraz każdej wartości regularnej jest zbiorem pustym lub jest m-wymiarową hiperpowierzchnią regularną klasy C_s.

D. Jeżeli $F^{-1}(a)$ jest zbiorem pustym, to twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że tak nie jest i niech $x_0 \in F^{-1}(a)$. Wtedy

$$F(x_0) = a \tag{5.3}$$

F jest klasy C_s w Ω i x_0 jest punktem regularnym odwzorowania F, wynika stąd, że

$$rz\left(\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{i}}(x_0)\right) = n-m \qquad \alpha = 1,2,\dots,n-m, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{5.4}$$

Istnieje więc wyznacznik stopnia $(n-m)$ wyjęty z tej macierzy różny od zera. Bez szkody dla ogólności rozważań (wystarczy ewentualnie przenumerować zmienne) możemy założyć, że wyznacznik utworzony z $n-m$ ostatnich kolumn jest różny od zera. Oznaczając zmienne $x^1=x^1, x^2=x^2, \dots, x^m=x^m$ $x^{m+1}=y^1, \dots, x^{m+n-m}=x^n=y^{n-m}$ związki (5.3) i (5.4) możemy przepisać w postaci:

$$F(x_0, y_0) = a \tag{5.5}$$

$$rz\left(\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}(x_0, y_0)\right) \neq 0 \qquad \alpha, \beta = 1,2,\dots,n-m. \tag{5.6}$$

W ten sposób spełnione są założenia twierdzenia o odwzorowaniach określonych lokalnie w sposób uwikłany, (tw. 3), gdzie $p = m$ i $q = n-m$. Na podstawie tego twierdzenia istnieją przedziały otwarte $U(x_0,\delta)$ i $V(y_0,\varepsilon)$ i odwzorowanie $\varphi: U(x_0,\delta) \to V(y_0,\varepsilon)$ klasy C_s określone lokalnie w sposób uwikłany w punkcie (x_0,y_0) przez równanie $F(x,y) = q_0$ dla $(x,y) \in U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon)$, tzn. zachodzi równość

$$\{(x,y) \in U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon);\ F(x,y) = a\} = \{(x,\varphi(x));\ x \in U(x_0,\delta)\},$$

która oznacza, że

$$F^{-1}(a) \cap (U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon)) = \text{wykresowi odwzorowania } \varphi .$$

A więc istnieje otoczenie punktu (x_0,y_0), $U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon)$ takie, że przeciwobraz $F^{-1}(a)$ w tym otoczeniu jest identyczny z wykresem odwzorowania. Ale wykres odwzorowania φ jest homeomorficzny z dziedziną $U(x_0,\delta)$ i odwzorowanie $x \in U(x_0\delta) \to (x,\varphi(x)) \in U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon)$ jest parametyzacją regularną klasy C_s, wyznacznik m pierwszych wierszy i m pierwszych kolumn równa się 1. W ten sposób pokazaliśmy, że każdy punkt $z_0 = (x_0,y_0)$ przeciwobrazu posiada otoczenie $F^{-1}(a) \cap (U(x_0,\delta) \times V(y_0,\varepsilon))$ homeomorficzne ze zbiorem otwartym $U(x_0,\delta) \subset R^m$ i należy do obrazu regularnej parametryzacji klasy C_s, a więc w myśl definicji $F^{-1}(a)$ jest m-wymiarową hiperpłaszczyzną regularną klasy C_s.

Na zakończenie podamy jeszcze kilka przykładów zastosowania twierdzenia 4.

Przykład 15. Niech $\Omega = R^3$. Oznaczmy przez F odzworowanie $R^3 \to R^2$ określone następująco:

$$F(x,y,z) := (A_1x+B_1y+C_1z+D_1,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$

i załóżmy, że rząd macierzy

$$rz\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} = 2.$$

wtedy $(0,0) \in R^2$ jest wartością regularną, bo każdy punkt przeciwobrazu $F^{-1}(\{0,0\})$ jest punktem regularnym.

Istotnie, rząd macierzy jakobianowej

$$\operatorname{rz}\begin{Vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial z} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial z} \end{Vmatrix} = 2 = \operatorname{rz}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, zbiór $F^{-1}(\{0,0\})$ jest niepusty, a więc $F^{-1}(\{0,0\})$ jest 1-wymiarową hiperpowierzchnią analityczną zawartą w R^3. Dobrze wiadomo, że jest to prosta.

Przykład 16. Niech $\Omega = R^3$. Oznaczmy przez F odwzorowanie $F: R^3 \to R$ określone wzorem:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Niech $a \in R$ będzie większa od zera. Liczba a jest wtedy wartością regularną, bo $F^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in R^3;\ x^2+y^2+z^2 = a\}$ składa się tylko z punktów regularnych. Istotnie w takim punkcie

$$\operatorname{rz}\left\| \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\| = \operatorname{rz}\left\| 2x, 2y, 2z \right\| = 1,$$

ponieważ ze względu na warunek $x^2 + y^2 + z^2 = a$ nie mogą wszystkie liczby $2x$, $2y$, $2z$ jednocześnie znikać. Zbiór $F^{-1}(\{a\})$ jest niepusty, a więc w myśl twierdzenia 4 przedstawia on 2-wymiarową hiperpowierzchnię analityczną w R^3. Wiadomo, że jest to powierzchnia kuli o środku w początku układu i promieniu $\sqrt{a}$.

Zauważmy, że 0 nie jest wartością regularną, bo przeciwobraz zawiera punkt $(0,0,0)$, w którym odwzorowanie F nie jest regularne. Zbiór rozwiązań równania $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ jest punktem $(0,0,0)$ i nie przedstawia hiperpowierzchni. Natomiast każda liczba $a < 0$ jest wprawdzie wartością regularną, ale jej przeciwobraz jest pusty, więc nic nie określa.

Często musimy wiedzieć, jak wielkie jest otoczenie punktu (x_0, y_0), w którym jest określona funkcja zadana w sposób uwikłany przez równanie $F(x,y) = q_0$ lokalnie w tym punkcie. Twierdzenie 1 nic o wielkości tego otoczenia nie mówi. Pewne oszacowanie tego otoczenia podane jest w pracy [2].

LITERATURA

[1] Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych. PWN, Warszawa 1978.

[2] Kucharzewski M.: Elementarny dowód na oszacowanie obszaru istnienia transformacji odwrotnej i funkcji uwikłanej. ZN Uniwersytetu Jagiellońskiego, Mat. 3 (1957), ss. 25-39.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В НЕЯВНОМ ВИДЕ

Р е з ю м е

Работа имеет дидактический характер. Её целью является уточнение понятия функции определённой в неявном виде, объяснение его свойств и упрощение связанных с ним рассуждений.

Пусть P и Q обозначают два непустых множества и D - подмножество P. В работе рассматривается возможно простое определение функции $\varphi: D \to Q$, заданной уравнением $F(x,y) = 0$, где F есть отображение определённое на $\Omega \subset P \times Q$, принимающие значения в Q. В работе представлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы вышеупомянутое уравнение определяло функцию в неявном виде. В топологии используется понятие функции определённой в неявном виде в точке (x_0,y_0). В этой работе рассматривается классическая теорема об отображениях заданных в неяном виде, её предположения обсуждаются при помощи рассмотрения примеров. В качестве приложения доказывается глобальная теорема о неявном представлении m - мерной поверхности, регулярной класса C_s в пространстве R^n. Приведённые рассуждения сравнительно просты и одновременно довольно общие, снабжены многочисленными примерами, оправдывающими целесообразность принятых предположений и определений.

Представленная трактовка вопроса должна облегчить запоминание рассмотренных теорем и их правильное использование.

A METHOD OF IMPLICIT DEFINING OF FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper has a didactical character. Its main purpose is to precise the notion of an implicitly defined function, to explain te properties of this notion and to simplify the related arguments. Let P, Q be two non-empty sets and let D be an, (also non-empty) subset of P. The paper contains relatively simple implicit definition of function $\varphi: P \to Q$ by the equation $F(x,y) = q_0$, F being a map of certain $\Omega \subset P \times Q$ into Q. Simple necessery and sufficient conditions are given under which the equation really defines implicitly a function. For the case, when P, Q are topological spaces, we precise the notion of a function, which is implicitly defined locally at the given point (x_0,y_0). The classical implicit function theorem and its hypothesis are discussed in connection with the theorem und examples presented in the paper. Further, we apply the presented method to prove a theorem on implicit representation of m-dimensional C_s - surface of R^n. The arguments are simple and general, the examples are intended to illustrate the argumments and to give motivations for the definitions introduced in the paper and the assumptions made in it. The approach, that we propose, shoud make the understanding of the theorem in question and using them essentially more easy.