ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 53 Nr kol. 1001

Józef WOJNAROWSKI
Stanisław ZAWIŚLAK

UKŁAD MECHANICZNY JAKO UOGÓLNIONA SIEĆ

Streszczenie. Traktując dyskretny liniowy układ mechaniczny jako uogólnioną sieć w sensie J. Bruno i L. Weinberga, opisaną matroidem, przedstawiono metodę wyznaczania jego odpowiedzi pod wpływem przyłożonego wzbudzenia. Uzyskane zależności przedstawiono w funkcji macierzy odcięć i współczynników równań biegunowych grafu układu mechanicznego. Uzyskano je wykorzystując własności uogólnionej sieci oraz uogólnione zasady Kirchhoffa ujęte w reprezentacji macierzowej.

1. Wprowadzenie

Zastosowanie matroidów w opisie układów fizycznych znajduje coraz większe zainteresowanie. Wynika to z faktu, że pojęcia teorii matroidów ułatwiają opracowanie algorytmów i przygotowanie programów dla automatycznej realizacji zadań analizy i syntezy układów fizycznych. Świadczą o tym liczne publikacje, w szczególności na temat zastosowań matroidów w modelowaniu układów elektrycznych [1],[2],[5],[6], [10]-[13], [17], a ostatnio także w analizie układów mechanicznych [24],[25].

Matematyczne podstawy teorii matroidów sformułował H. Whitney w 1935 roku [19]. Pod koniec lat pięćdziesiątych ponownie tematyką tą zajął się W.T. Tutte, ogłaszając ważne dla tej teorii wyniki, między innymi kryterium graficzności matroidów [15], [16]. Zastosowanie matroidów do analizy sieci elektrycznych wprowadził M. Iri [4], a ostatnio rozwija te zagadnienia Recski [12], [13].

W latach siedemdziesiątych ukazały się również monografie na ten temat [7], [15], [18].

W Polsce teorią i zastosowaniem matroidów zajmują się L. Szamkołowicz [13], M. Borowiecki i M. Zmyślony [1], W. Lipski [7] oraz autorzy [24], [25].

W niniejszej pracy wykażemy, że uogólnioną sieć w sensie Bruno i Weinberga, opisaną matroidem [2], można przyporządkować dyskretnemu układowi mechanicznemu. Stosując twierdzenia dotyczące uogólnionej sieci otrzymujemy nową metodę analizy układu mechanicznego bazującą na macierzy odcięć i macierzy współczynników biegunowych grafu układu mechanicznego [21], [22], [23].

Bruno i Weinberg w pracy [2] badali szczegółowo własności pewnych macierzy o elementach rzeczywistych przyporządkowanych układom elektrycznym. Przeprowadzenie analogicznych badań dla macierzy układów mechanicznych o elementach będących wielomianami o współczynnikach rzeczywistych zmiennej zespolonej przyniesie może nowe wyniki istotne w zastosowaniu teorii matroidów do algorytmizacji zadania syntezy układów mechanicznych.

2. Pojęcie matroidu i wybrane definicje

Istnieje kilka równoważnych definicji matroidu [2],[18]. W różnych rozważaniach używa się tej, która najlepiej oddaje sens rozważań.

Poniżej, dla ustalenia oznaczeń do tej pory różnych w różnych publikacjach, podajemy dwie definicje wykorzystywane w dalszej części pracy.

Definicja 1. Matroidem nazywamy parę (E,C), gdzie C jest rodziną podzbiorów zbioru skończonego E, zwanych cyklami, spełniającą aksjomaty:

(C1) Jeżeli $X, Y \in C$ oraz $X \neq Y$ wtedy $X \not\subseteq Y$

(C2) Jeżeli X, Y są różnymi elementami rodziny C oraz $a \in X \cap Y$, to istnieje $Z \in C$ takie, że $Z \subseteq (X \cup Y) \setminus \{a\}$.

Definicja 2. Matroidem nazywamy parę $(E, \mathbb{B})$, gdzie $\mathbb{B}$ jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru E, nazywanych bazami, spełniającą warunek:

(B1) Dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ oraz $e \in B_1 \setminus B_2$ istnieje $F_1 \in B_2 \setminus B_1$ taki, że $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\} \in \mathbb{B}$.

Przykłady matroidów

Rozpatrzmy graf $X = ({}_1X, {}_2X, {}_3X)$, ${}_1X$ - zbiór wierzchołków grafu, X_2 - zbiór krawędzi, ${}_3X \subset {}_1X \times {}_2X \times {}_1X$. Jako elementy rodziny C rozpatrzmy podzbiory krawędzi grafu X tworzące cykle proste. Rodzina ta spełnia warunki (C1) oraz (C2), więc para $({}_2X, C)$ tworzy matroid oznaczany przez $P(X)$ i nazywany matroidem cyklicznym grafu X.

Matroidem jest również para $({}_2X, V)$, gdzie V - rodzina minimalnych zbiorów rozspajających grafu X. Matroid ten oznaczamy $Q(X)$ i nazywamy matroidem kocyklicznym grafu X.

Definicja 3. Jeżeli $\mathbb{B} = \{B_i : i \in I\}$ jest zbiorem baz matroidu $M = (E, \mathbb{B})$, wtedy $\mathbb{B}^* = \{E \setminus B_i : i \in I\}$ jest zbiorem baz matroidu M^* określonego na zbiorze E. Matroid M^* nazywamy matroidem dualnym do matroidu M.

Rozpatrzmy przestrzeń wektorową $(V, +, \cdot)$ nad ciałem F, gdzie V jest klasą funkcji $f : E \to F$, E jest zbiorem skończonym.

Definicja 4. Wektor $f \in V$ nazywamy wektorem elementarnym, jeżeli jest niezerowy i nie istnieje wektor $g \in V$ taki, że $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} f$, gdzie $\operatorname{supp} f = \{e_i : e_i \in E, f(e_i) \neq 0\}$ nazywamy nośnikiem wektora f.

Twierdzenie 1. Para $M_V = (E, C_V)$ jest matroidem, przez C_V oznaczamy klasę nośników wektorów elementarnych przestrzeni V. M_V nazywamy matroidem stowarzyszonym z przestrzenią V. Dowód [2].

Twierdzenie 2. $M_V = M^*_{\perp V}$, gdzie $\perp V$ oznacza przestrzeń ortogonalną do V i iloczyn skalarny (f, g) wektorpw f i g zadany jest wzorem $(f, g) = \sum_{e \in E} f(e)g(e)$.

Dowód [15].

Definicja 5. Wektor $f \in V$ nazywamy wektorem podstawowym, jeżeli jego współrzędne mają wartości ± 1 lub 0.

Definicja 6. Przestrzeń V nazywamy regularną, jeżeli dla każdego wektora $f \in V$ istnieje wektor podstawowy $g \in V$ taki, że $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} g$.

Jeżeli przestrzeń V jest regularna, to matroid $M_V = (E, C_V)$ nazywamy matroidem regularnym.

Definicja 7. Macierz R nazywamy macierzą reprezentatywną dla przestrzeni V, gdy spełnione są warunki:

1) wiersze macierzy R są liniowo niezależne,
2) każdy niezerowy wektor $f \in V$ da się przedstawić jako kombinacja liniowa wierszy macierzy R.

Niech $X = ({}_1X, {}_2X, {}_3X, \eta)$ będzie grafem zorientowanym.

Funkcja η zdefiniowana jest następująco:

$$\eta({}_2x_i, {}_1x_j) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli wierzchołek } {}_1x_j \text{ nie jest incydentny krawędzi } {}_2x_i \\ 1, & \text{jeżeli wierzchołek } {}_1x_j \text{ jest początkiem krawędzi } {}_2x_i \\ -1, & \text{jeżeli wierzchołek } {}_1x_j \text{ jest końcem krawędzi } {}_2x_i \end{cases}$$

Definicja 8. Wektor f na zbiorze ${}_2X$ nad ciałem F nazywamy hipercyklem [1, 2] grafu X nad ciałem F, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta({}_2x_i, {}_1x_j) f({}_2x_i) = 0 \quad \text{dla każdego } {}_1x_j \in {}_1X. \tag{1}$$

Przez I oznaczamy przestrzeń hipercykli grafu X nad ciałem F.

Definicja 9. Dwa wektory g, f określone na zbiorze E nad ciałem F nazywamy wektorami ortogonalnymi, jeżeli zachodzi warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} g(e_i) f(e_i) = 0. \tag{2}$$

Definicja 10. Niech g jest wektorem określonym na zbiorze ${}_1X$ grafu zorientowanego X, gdzie ${}_1X = \{{}_1x_1, {}_1x_2, \ldots, {}_1x_m\}$.
Definiujemy wektor f na ${}_2X$ nad ciałem F wzorem:

$$f({}_2x_i) = \sum_{j=1}^{m} \eta({}_2x_i, {}_1x_j) g({}_1x_j) \text{ dla każdego } {}_2x_i \in {}_2X.$$

Wektor f nazywamy hiperprzekrojem na zbiorze ${}_2X$ nad ciałem F. Przez V oznaczamy rodzinę hiperprzekrojów dla wszystkich g określonych na ${}_1X$; rodzina ta jest przestrzenią wektorową na ${}_2X$ i nazywa się przestrzenią hiperprzekrojów.

Twierdzenie 3. Przestrzenie I oraz V są ortogonalne [2].

Twierdzenie 4. Niech X jest zorientowanym grafem, I - przestrzenią hipercykli, V - przestrzenią hiperprzekrojów. Zachodzą wtedy warunki:

$$({}_2X, C_V) = Q(X) \tag{3}$$

$$({}_2X, C_I) = P(X) \tag{4}$$

Dowód [2].

Zależności (3) i (4) wyrażają równoważność matroidów kocyklicznego i cyklicznego grafu X z matroidami stowarzyszonymi z przestrzeniami wektorowymi hipercykli i hiperprzekrojów grafu X.

3. Określenie uogólnionej sieci

Obecnie sformułujemy pojęcie uogólnionej sieci w sensie Bruno i Weinberga. Podkreślamy, że pojęcie to ma charakter abstrakcyjny, na razie nie związany z układem fizycznym.

Uogólnioną sieć określa się na zbiorze skończonym E. W zbiorze E wyodrębniamy dwa podzbiory $E = E_b \cup E_c$, $E_b \cap E_c = \emptyset$,

$$|E| = n, \ |E_c| = r, \ E_b = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}\}, \ E_c = \{e_{n-r+1}, \ldots, e_n\}.$$

Każdemu elementowi E przyporządkowujemy dwie wielkości u_i [x)] oraz v_i [xx)] dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

---

x) W układach fizycznych są to zmienne przepływowe.

xx) W układach fizycznych są to zmienne biegunowe.

Możemy więc zdefiniować dwa wektory:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_b \\ \hline \bar{u}_c \end{bmatrix}, \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_b \\ \hline \bar{v}_c \end{bmatrix},$$

gdzie współrzędne wektorów $\bar{u}_b$, $\bar{v}_b$ odpowiadają elementom zbioru E_b, a współrzędne wektorów $\bar{u}_c$, $\bar{v}_c$ odpowiadają elementom zbioru E_c.

Każdemu elementowi zbioru E_b przyporządkowujemy wagę d_i, $i = 1,2,\ldots,n-r$ tak, aby zachodził warunek:

$$v_i = d_i u_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n-r, \tag{5}$$

$d_i \in F$, F - ciało przemienne. W pracy Bruno, Weinberga rozważano wagi będące liczbami rzeczywistymi.

<u>Definicja 11</u>. Czwórkę $(M_V, V, \mathbf{D}, E)$ nazywamy uogólnioną siecią, gdy spełnione są tzw. równania sieciowe:

$$\bar{u} \in V \tag{6}$$

$$\bar{v} \in {}_{\perp}V \tag{7}$$

$$\bar{v}_b = \mathbf{D}\,\bar{u}_b, \tag{8}$$

gdzie:

V - jest przestrzenią regularną na zbiorze E nad ciałem F,

M_V - jest matroidem regularnym stowarzyszonym z przestrzenią V,

$\mathbf{D}$ - macierz diagonalna współczynników d_i.

Elementy zbioru E_c nazywamy elementami czynnymi sieci, elementy zbioru E_b - elementami biernymi.

<u>Definicja 12</u>. Sieć $(M_V, V, \mathbf{D}, E)$ nazywamy siecią niezdegenerowaną, jeżeli można w dowolny sposób przyjąć wartości wektora $\bar{u}_c$ i to określenie wraz z równaniami sieciowymi jednoznacznie determinuje wektory $\bar{u}$ oraz $\bar{v}$.

<u>Twierdzenie 5</u>. Uogólniona sieć jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór E_c nie zawiera żadnego cyklu z matroidu M_V.

Dowodząc twierdzenie 5 Bruno i Weinberg otrzymali następujące wzory analizy uogólnionych niezdegenerowanych sieci:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_b \\ \hline \bar{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}^{-1} \cdot R_b^t R_b \mathbf{D}^{-1} (R_b^t)^{-1} R_c \\ \hline \mathbf{1}_{vv} \end{bmatrix} \bar{u}_c \tag{9}$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_b \\ \hline \bar{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_b^t R_b D^{-1} R_b^{t^{-1}} R_c \\ \hline -R_c^t R_b D^{-1} R_b^{t^{-1}} R_c \end{bmatrix} \bar{u}_c, \tag{10}$$

gdzie $R^* = \left[R_b^* \mid R_c^* \right]$ jest macierzą reprezentatywną przestrzeni $_{\perp}V$.

Na podstawie uzyskanych wzorów łatwo zauważyć, że dowolne określenie wartości wektora $\bar{u}_c$ jednoznacznie determinuje wszystkie pozostałe współrzędne wektorów $\bar{u}_b$, $\bar{v}_b$, $\bar{v}_c$.

4. Uogólniona sieć przyporządkowana układom mechanicznym

Układy mechaniczne można przez analogię elektromechaniczną [3] traktować jako układy sieciowe lub przepływowe [22],[23], a ze względu na sposób połączeń dwójników jako układy o strukturze równoległej i szeregowej [23]. W rozdziale niniejszym wykażemy, jak układom mechanicznym przyporządkować uogólnioną sieć.

Rozważać będziemy dyskretne układy mechaniczne o skończonej liczbie stopni swobody. Przyjmujemy, że parametry układu są niezmienne w czasie oraz że na układ nałożono dwustronne więzy holonomiczne. Na układ mogą działać wymuszenia kinematyczne lub dynamiczne. Układy, o których przyjmuje się powyższe założenia, można opisywać następującą piątką wielkości:

$$u = ({}_1X, {}_2X, {}_3X, {}_1f, {}_2f),$$

gdzie:

$X = ({}_1X, {}_2X, {}_3X)$ jest grafem abstrakcyjnym,

${}_2X = {}_2X_b \cup {}_2X_c, \quad {}_2X_b \cap {}_2X_c = \emptyset,$

${}_2X_v$ jest zbiorem krawędzi biernych,

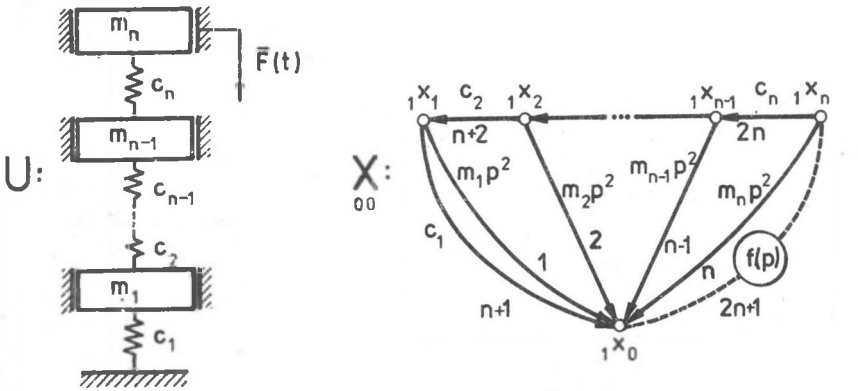
${}_1f : {}_2X \longrightarrow {}_1S, {}_2S$

${}_1S, {}_2S$ - współrzędne i siły uogólnione,

${}_2f : {}_2X_b \longrightarrow K$ - zbiór wag.

Wagi można przypisywać różnie w zależności od przyjętych zmiennych [22]. W tej pracy przyjmujemy wagi ze zbioru sztywności dynamicznych $\{mp^2, bp, c\}$, gdzie $p \in Z$ (Z - ciało liczb zespolonych).

Na rys. 1 przedstawiono układ mechaniczny U oraz przyporządkowany mu graf biegunowy $\underset{\circ\circ}{X}$, wartościami funkcji ${}_2f$ opisano krawędzie grafu X.



Rys. 1. Model układu mechanicznego U i jego graf biegunowy X

Chcąc przyporządkować tak opisanemu układowi uogólnioną sieć określamy przestrzenie wektorowe, do których należeć mają zmienne $_2\bar{S}$ oraz $_1\bar{S}$, przy czym przez $_i\bar{S}$ oznaczamy wektor kolumnowy

$$\begin{bmatrix} {}_iS_1 \\ {}_iS_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}_iS_n \end{bmatrix}, \quad i = 1,2.$$

Przez Q oznaczamy zbiór ilorazów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych zmiennej zespolonej p.
Mamy

$$Q \ni A = \frac{\omega_i(p)}{\omega_k(p)}, \quad \omega_k(p) \neq 0. \tag{11}$$

W zbiorze Q wprowadzamy relację ϱ. Mówimy, że elementy $A = \frac{\omega_i(p)}{\omega_k(p)}$, $B = \frac{\omega_j(p)}{\omega_l(p)}$ są w relacji ϱ, co zapisujemy $A \varrho B$, jeżeli zachodzi warunek:

$$\omega_i(p)\omega_l(p) = \omega_j(p)\omega_k(p). \tag{12}$$

Relacja ϱ jest relacją równoważności. Zbiór Q/ϱ z działaniami $\oplus$, $\odot$, wprowadzonymi w sposób standardowy, tworzy ciało, które oznaczamy przez H. Przez Y oznaczamy przestrzeń wektorową $(H^n, +, \cdot)$ nad ciałem H. Działanie $\cdot$ jest mnożeniem przez elementy ciała H poszczególnych współrzędnych elementów należących do wektora H^n, działanie + jest sumowaniem po współrzędnych.

Wektory ${}_2\bar{S}$ spełniają zasadę wierzołkową [22], czyli

$$ {}_2B \cdot {}_2\bar{S} = 0, \tag{13} $$

gdzie ${}_2B$ jest macierzą odcięć grafu X układu mechanicznego.

Zbiór takich ${}_2\bar{S} \in Y$, które są rozwiązaniami równania (13), tworzą przestrzeń wektorową oznaczoną w dalszym ciągu przez T. Można wykazać, że równanie (13) w interpretacji mechanichnej wyraża zasadę d'Alemberta. Warunek (13) jest równoważny zależności:

$$ {}_1B \cdot {}_2\bar{S} = 0, \tag{14} $$

gdzie ${}_1B$ - macierz incydencji grafu X;
oznacza to, że spełnione są warunki (1), a więc wektor ${}_2\bar{S}$ jest hipercyklem.

Równanie więzów nałożonych na układ w postaci macierzowej wyraża się wzorem:

$$ {}_3B \cdot {}_1\bar{S} = 0, \tag{15} $$

gdzie ${}_3B$ jest macierzą cyklomatyczną grafu X.

Macierz ${}_3B$ jest macierzą, w wierszach której są wektory bazowe przestrzeni T.

Zależność (15) oznacza, że wektory ${}_1\bar{S}$ są ortogonalne do przestrzeni T.

Układowi mechanicznemu U możemy więc przypisać uogólnioną sieć $(M_T, T, W, {}_2X)$, przy czym równania sieciowe mają postać:

$$ {}_2\bar{S} \in T \tag{16} $$

$$ {}_1\bar{S} \in \perp T \tag{17} $$

$$ {}_1\bar{S}_b = W \, {}_2\bar{S}_b, \tag{18} $$

gdzie: $W = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{k \; p^{\alpha_i}}\right]$, α_i dla k_i reprezentującego masę wynosi 2, dla tłumienia 1, a sprężyny 0.

Z twierdzenia 4 wynika, że matroid M_T jest izomorficzny z matroidem P(X).

Macierzą reprezentatywną dla przestrzeni T jest macierz ${}_2B$ grafu X.

Zależności analizy mają więc postać:

$$ {}_1\bar{S} = \begin{bmatrix} {}_1\bar{S}_b \\ \hline {}_1\bar{S}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}_2B_b^t \; {}_2B_b W^{-1} \left({}_2B_b^t\right)^{-1} {}_2B_c \\ \hline -{}_2B_c^t \; {}_2B_b W^{-1} \, {}_2B_b^{t^{-1}} \; {}_2B_c \end{bmatrix} {}_2\bar{S}_c, \tag{19} $$

$$ {}_2\bar{S} = \begin{bmatrix} {}_2\bar{S}_b \\ \hline {}_2\bar{S}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W^{-1}\,{}_2B_b^t \\ \hline {}_2B_b W^{-1}\,{}_2B_b^t{}^{-1}\,{}_2B_c \end{bmatrix} {}_2\bar{S}_c \qquad (20) $$

Dla układów, o których mowa w niniejszym artykule, współrzędnymi wektora ${}_2\bar{S}$ są takie ilorazy wielomianów zmiennej p, gdzie stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika. Tylko takie ilorazy wielomianów są transformatami Laplace'a pewnych funkcji ([9], rozdział 4.1.1). Ograniczamy się więc do klasy F funkcji, które są kombinacjami liniowymi funkcji typu wielomianów, funkcji wykładniczych $e^{\alpha t}$, $\alpha \in R$, funkcji trygonometrycznych $\cos\beta t$, $\sin\beta t$, $\beta \in R$ lub ich iloczynów.

Wzory analizy, w których stosuje się liczby strukturalne [22], [23], są ważne bez ograniczeń na typ funkcji, które mogą być wymuszeniami. Należałoby przeprowadzić dowód słuszności zależności (19) i (20) w każdym możliwym przypadku.

Zauważmy jeszcze, że warunek z twierdzenia 5 oznacza, że krawędzie reprezentujące wymuszenia, czyli ze zbioru ${}_2x_b$, nie mogą tworzyć cyklu w matroidzie $Q(X)$, bo $Q(X) = M_T = M^*_T$, a więc nie mogą tworzyć odcięć w grafie X.

Jeżeli układowi przyporządkować matroid dualny do M_T, to warunek z twierdzenia 5 oznacza, że krawędzie wymuszeń nie mogą tworzyć cyklu w grafie X.

Przykład

Dla ilustracji przedstawionych rozważań przeprowadzimy analizę układu mechanicznego przedstawionego na rys. 1 dla przypadku, gdy liczba stopni swobody wynosi 2. Przyporządkowujemy układowi uogólnioną sieć (M_T, T, W, ${}_2X$), gdzie macierz W ma postać:

$$ W = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1p^2} & & & 0 \\ & \frac{1}{m_2p^2} & & \\ & & \frac{1}{c_2} & \\ 0 & & & \frac{1}{c_1} \end{bmatrix} $$

Macierz odcięć grafu X ma postać:

$$ {}_2B = \left[{}_2B_b \;\vdots\; {}_2B_c \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] . $$

Zależność (20) przyjmuje postać:

$$
{}_2\bar{S}_b = \begin{bmatrix} {}_2s_1 \\ {}_2s_2 \\ {}_2s_3 \\ {}_2s_4 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{m_1 m_2 p^4 + m_1 c_1 p^2 + m_2 c_1 p^2 + m_2 c_2 p^2 + c_1 c_2} \begin{bmatrix} m_1 c_1 p^2 \\ m_2 p^2 m_1 p^2 + c_1 + c_2 \\ c_1 \cdot c_2 \\ c_1 m_1 p^2 + c_1 \end{bmatrix} \cdot {}_2s_5 \cdot
$$

Macierz sztywności dynamicznych $Z = {}_2B_b \, W^{-1} \, {}_2B_b^t$ ma postać:

$$
Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 p^2 & & & \\ & m_2 p^2 & & \\ & & c_2 & \\ & & & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 p^2 + c_2 + c_1, & -c_1 \\ -c_1 & m_2 p^2 + c_1 \end{bmatrix}
$$

5. Uwagi końcowe

W pracy wykazano, że układowi mechanicznemu można przyporządkować uogólnioną sieć. Korzystając z własności uogólnionej sieci sformułowano metodę analizy układów mechanicznych, w której odpowiedź układu określona jest przez macierz cyklomatyczną lub macierz odcięć i macierz współczynników biegunowych grafu układu mechanicznego. Podkreślamy, że otrzymane wzory określają odpowiedzi układu reprezentowane przez wszystkie krawędzie bierne, niezależnie od tego czy działa jedno czy więcej wymuszeń, gdy tymczasem wzory analizy otrzymane przez zastosowanie liczb strukturalnych [22], [23] dotyczą poszczególnych odpowiedzi układu na pojedyncze wymuszenia.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że do chwili obecnej nie zbadano dokładnie klasy grafów reprezentujących układy mechaniczne; wiadomo, że są to grafy mocno spójne i o strukturze trójnikowej [22], [23].

Po zbadaniu własności tej klasy grafów, a szczególnie zależności o cyklach i odcięciach tych grafów, można narzucić te warunki na matroid przyporządkowany układowi. Powinno to prowadzić do nowych rezultatów,

szczególnie interesujących w zakresie zastosowania teorii matroidów w syntezie układów mechanicznych.

LITERATURA

[1] Borowiecki M., Zmyślony M.: Matroidy i ich zastosowania do opisu obwodów elektrycznych. Materiały VIII Ogólnopolskiego Sympozjonu "Metody matematyczne w elektrotechnice", Pokrzywna k.Głuchołaz, maj 1979.

[2] Bruno J., Weinberg L.: Generalized Networsk: Networks Embedded on a Matroid, Part I, Part II, Networks 6 (1976), 53-94, ss. 231-272.

[3] Gutenmacher L.J.: Elektriczeskije modeli, Izdat.-Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1963.

[4] Iri M.: Comparison of Matroid Theory with Algebraic Topology with Special Reference to Applications of Network Theory, R.A.A.G. Research Notes, University of Tokoy, 83 (1964), published by R.A.A.G.

[5] Iri M.: Applications of Matroid Theory, XI th International Symposiom of Mathematical Programming, University of Boun, August 23-27 (1982), 158-201.

[6] Iri M., Fujishige S.: Use of matroid theory in operations research, circuits and systems theory, Int. J. Systems. Sci. Vol. 12, No 1 (1981) 27-54.

[7] Lawler E.L.: Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[8] Lipski W.: Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa 1982.

[9] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1981.

[10] Peterson B.: Investigating solvability and compexity of linear active networks, IEEE Transactions on circuits and Systems, Vol. CAS-25, No 5, (1979) 330-342.

[11] Petersen B.: Topological Investigation of Linear Active Networks, Report, Department of Mathematics and Institute of Circuit Theory and Telecommunication Technical Universite of Denmark, 1980.

[12] Recski A.: Engineering Applications of Matroids - A Survey, Research Institute for Telecommunication, Budapest, Hungary (pracę otrzymano od autora w 1982 r.).

[13] Recski A., Iri M.: Network theory and transversal matroids, Discrete Applied Mathematics 2 (1980), 311-326.

[14] Szamkołowicz L.: Podstawy teorii modeli sieciowych. Elementy ogólnej i strukturalnej teorii hipergrafów. Raport nr 191, Instytut Matematyki Polit. Wrocławskiej, 1975.

[15] Tutte W.T.: Introduction to the Theory of Matroids. Amer. Elsevier Publ. Co., New York, 1971.

[16] Tutte W.T.: Lectures on Matroids, J. Res. Not. Bur. Std. Vol. 69B, No 12 (1965) 1-47.

[17] Weinberg L.: Matroids, Generalized Networks and Electric Network Sythesis, J. Comb. Theory, Ser. B 23 (1977) 106-126.

[18] Welsh D.J.A.: Matroid Theory, Academic Press, London, New York, San Francisco 1976.

[19] Whitney H.: On abstract properties of linear independence, Amer. J. Math., 57 (1935) 509-533.

[20] Wilson R.: An Introduction to Matroid Theory, Amer. Math. Monthly, Vol. 80, No 5 (1973) 500-525.

[21] Wojnarowski J.: Analiza dyskretnych liniowych układów o skończonej liczbie stopni swobody metodą grafów. Proc. Polish-Czechoslovak Conf. on Machine Dynamics, 2 (1971) ss. 567-581.

[22] Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. IPKM Polit. Śląska - PTMTS Oddz. Gliwice, Nr 38, Gliwice 1977.

[23] Wojnarowski J.: Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych. PWN, Wrocław-Warszawa 1981.

[24] Wojnarowski J., Zawiślak S.: Wprowadzenie do modelowania układów mechanicznych za pomocą matroidów. Prace IMiPKM, Gliwice (1982), Zeszyt 75.

[25] Wojnarowski J., Zawiślak S.: O możliwości zastosowania matroidów w analizie drgających dyskretnych układów mechanicznych. Zbiór referatów XXII Sympozjonu "Modelowanie w mechanice", PTMTS Oddz. Gliwice, nr 48 (1983) ss. 413-423.

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАК ОБОБЩЁННАЯ СЕТЬ

Р е з ю м е

В работе, трактуя дискретную линейную систему как обобщённую сеть в смысле Я. Бруно и Л. Вейнберга, описанную матроидом, дан метод определения отклика на действие приложенного возмущения. Полученные зависимости представлены как функции от матриц и коэффициентов полярных уравнений графа механической системы. Результаты получены, используя свойства обобщенной сети а также обобщённый принцип Киргоффа в матричном представлении.

MECHANICAL SYSTEM AS THE GENERALIZED NETWORK

S u m m a r y

In the paper the generalized network conception has been formulated after equivalent definition of matroid and theorems related to space hypercycles and hyperco-cycles were quoted.

Mechanical system has been analyzed as the generalized network - in a sense of J. Bruno and L. Weinberg - described as matroid. The method of calculation of responses of the system for given excitations has beem presented.

Obtained formulae were presented in a function of co-cycles matrix and terminal equation of the graph of mechanical system. The formulae were found making the use of generalized network properties and generalized Kirchhoff's principles in the matrix representation.

The resultant formulae determine responses of a system represented by all graph passive branches despite of the fact whether on the system acts one or more excitations.

To illustrate presented considerations two-degree of freedom mechanical system was analysed.