

Krzysztof DOBOSZ  
Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

## ZASTOSOWANIE METOD WYKREŚLANIA DRZEW BINARNYCH DO PREZENTACJI STRUKTURY SYSTEMU EWOLUCYJNEGO

**Streszczenie.** W publikacji omówiono, jak wykreślać drzewa binarne w dwuwymiarowej przestrzeni przy użyciu różnych metod. Obliczono długości charakterystycznych krawędzi oraz efektywność wykorzystania obszaru wykreślenia. Wybrano jedną z metod i wskazano jej ograniczenia. Porównano również szybkość przyrostu węzłów struktury drzewiastej i komórek struktury systemu ewolucyjnego.

## APPLICATION OF BINARY TREE DRAWING METHODS TO PRESENTATION OF THE STRUCTURE OF EVOLUTIVE SYSTEM

**Summary.** The paper shows how to draw binary trees in two-dimensional space using different methods. The length of characteristic edges and efficiency in utilization of drawing area is calculated. One of the methods is chosen and its limits are presented. Growth rate of evolutive systems and binary trees are compared.

### 1. Wstęp

System ewolucyjny to uporządkowany zbiór elementów tworzących pewną strukturę i ulegających stale rozwojowi, czyli takim przekształceniom, jak np. podział elementu lub transformacja elementu pewnego typu na element innego typu [1]. Na skutek tych ilościowych i jakościowych zmian poszczególnych elementów zbioru zmienia się też całkowita ilość elementów zbioru i jego struktura na każdym etapie rozwoju. Na podstawie znajomości reguł transformacji elementów systemu ewolucyjnego można przewidywać liczbę elementów oraz własności struktury na dowolnym etapie jej rozwoju. System ewolucyjny może reprezentować organizm żywy, a jego struktura - strukturę komórkową takiego organizmu.

System ewolucyjny opisany jest słowem genetycznym zawierającym zakodowany sposób rozwoju struktury tego systemu [2]. Słowo genetyczne może mieć strukturę liniową lub kołową. Słowo genetyczne o strukturze kołowej tym różni się od słowa genetycznego o strukturze liniowej, że zawiera pętle, przez co m.in. umożliwia regenerację uszkodzonego systemu ewolucyjnego.

System rozwijający się może również być opisany słowem genetycznym z bardzo prostym systemem operacyjnym, który pozwala na wyeliminowanie nieograniczonego rozrostu struktury przez wprowadzenie uzależnień od całkowitej liczby transformacji w zbiorze oraz od czasu przebywania pojedynczej komórki w zbiorze. Można dzięki temu uzyskać zjawisko przemijania, odrastania i rozsiewania.

W oparciu o sformalizowane metody opisujące reguły transformacji elementów uporządkowanego zbioru dynamicznego możliwe jest sporządzenie jego wizualizacji, której podstawą jest statyczna prezentacja struktury systemu ewolucyjnego, będącego na pewnym etapie rozwoju. Istotną cechą systemów ewolucyjnych jest to, że ich struktura jest drzewem binarnym, czyli takim, w którym węzeł nadrzędny może mieć co najwyżej dwa węzły podrzędne [3]. Cecha ta ma istotne znaczenie przy ocenie zapotrzebowania na obszar potrzebny do wykreślenia struktury. Pozwala nam bowiem przewidzieć przypadek pesymistyczny, dla którego struktura drzewa binarnego będzie w pełni wypełniona. Istnieje kilka metod wykreślenia takich struktur (piramidowa, koncentryczna, ortogonalna, blokowa, kształtu H, ogrodowa), spośród których należy wybrać odpowiednią i dostosować ją do potrzeb wizualizacji. Głównym problemem podczas wykreślenia jest zachowanie podstawowych kryteriów estetycznych dotyczących krawędzi, jak:

- unikanie przecinania się krawędzi;
- wykreślanie krawędzi w postaci odcinków prostych;
- przestrzeganie jednolitych długości krawędzi, zbliżonych do założonego minimum.

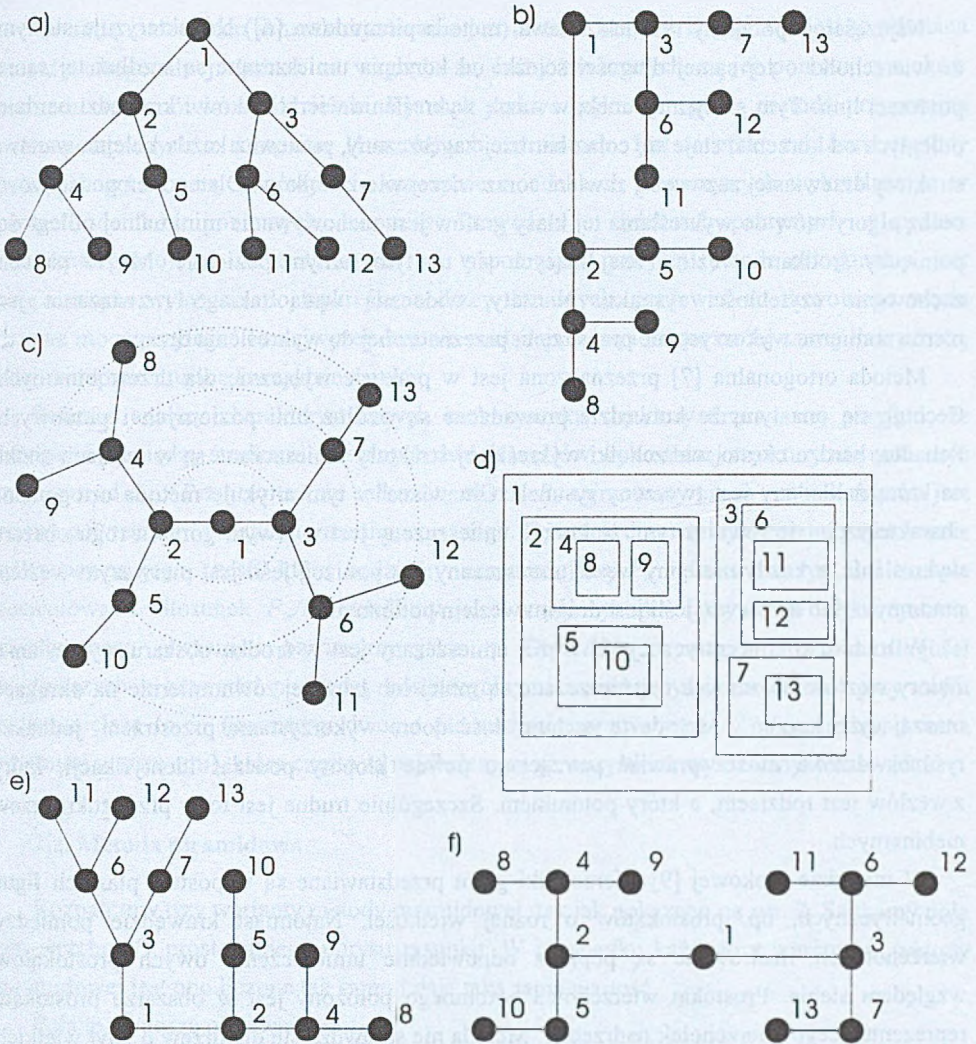
Ponadto należy zwrócić uwagę na jak najlepsze wykorzystanie przestrzeni przeznaczonej na wykreślenie struktury systemu.

## 2. Wykreślanie w przestrzeni 2D

### 2.1. Przegląd metod

Drzewa są grafami acyklicznymi, czyli takimi, w których dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka zbudowana z krawędzi grafu [4][5].





Rys. 1. Wykreślanie drzew: a) metoda piramidowa, b) metoda ortogonalna, c) metoda koncentryczna, d) metoda blokowa, e) metoda ogrodowa, f) metoda kształtu H

Fig. 1. Drawing trees: a) pyramid method, b) orthogonal method, c) concentric method, d) block method, e) garden method, f) H-shape method

Strukturę drzewa przedstawia się najczęściej za pomocą jednej z poniżej opisanych metod: piramidowa, ortogonalna, koncentryczna, blokowa, ogrodowa, kształtu H. Na rys. 1 przedstawiono tę samą strukturę drzewiastą wykreśloną na sześć różnych sposobów.



Najczęściej spotykany rysunek drzewa (metoda piramidowa [6]) charakteryzuje się tym, że wierzchołki o tej samej długości ścieżki od korzenia umieszczane są wzdłuż tej samej poziomej linii. Tym samym rysunek, w miarę wykreślania wierzchołków i krawędzi bardziej odległych od korzenia, staje się coraz bardziej zagęszczony, ponieważ każda kolejna warstwa struktury drzewiastej zazwyczaj zawiera coraz więcej wierzchołków. Dlatego też podstawową cechą algorytmów do wykreślania tej klasy grafów jest zachowywanie minimalnej odległości pomiędzy środkami węzłów znajdujących się na tym samym poziomie. Ma to na celu zachowanie czytelności rysunku. Niestety, widoczną wadą takiego rozwiązania jest nierównomierne wykorzystanie przestrzeni, przeznaczonej do wykreślenia drzewa.

Metoda ortogonalna [7] przeznaczona jest w praktyce wyłącznie dla drzew binarnych. Cechuje się ona tym, że krawędzie prowadzone są wzdłuż linii poziomych i pionowych. Ponadto, bardzo często wierzchołki wykreślonej struktury umieszczane są w węzłach siatki, na którą nakładany jest tworzony rysunek. Omawiana w tym artykule metoda ortogonalna charakteryzuje się również tym, że korzeń umieszczony jest w lewym górnym rogu obszaru wykreślania, a każdy następny węzeł umieszczany jest poniżej, jeśli jest pierwszym węzłem potomnym, lub na prawo, jeśli jest drugim węzłem potomnym.

W metodzie koncentrycznej [8] węzeł umieszczany jest w środku obszaru wykreślania. Zbiory węzłów potomnych rozmieszczane są mniej lub bardziej równomiernie na okręgach otaczających korzeń. Metodę tę cechuje dość dobre wykorzystanie przestrzeni, jednakże rysunek drzewa może sprawiać patrzącemu pewne kłopoty podczas identyfikacji, który z węzłów jest rodzicem, a który potomkiem. Szczególnie trudne jest to w przypadku drzew niebinarnych.

W metodzie blokowej [9] wierzchołki grafu przedstawiane są w postaci płaskich figur geometrycznych, np. prostokątów o różnej wielkości. Natomiast krawędzie pomiędzy wierzchołkami ilustrowane są poprzez odpowiednie umieszczenie owych prostokątów względem siebie. Prostokąt wierzchołka potomnego położony jest w obszarze prostokąta reprezentującego wierzchołek nadrzędny. Metoda nie sprawdza się dla drzew o zbyt wielkich odległościach liści od korzenia, ponieważ powoduje brak czytelności obiektów graficznych symbolizujących odległe liście. Metodę blokową pominięto podczas dalszych rozważań. Nastąpiło to z tego względu, iż metoda ta nie jest ekspansywna. W metodzie blokowej nie ma zjawiska ekspansji, polegającego na zajmowaniu przez rozwijającą się dynamicznie strukturę coraz to nowej przestrzeni.

Kolejną z metod wykreślania struktur drzewiastych jest metoda ogrodowa [6] przedstawiona na rys. 1e. Nazwa metody pochodzi od skojarzenia rysunku struktury z prostym rysunkiem ogrodu. Podstawę rysunku ogrodu tworzy gałąź struktury drzewiastej łącząca korzeń z jednym z liści. Pozostałe gałęzie struktury wykreślane są od podstawy ku górze na podobieństwo roślin wyrastających z ziemi.

Ostatnią z metod do scharakteryzowania jest metoda kształtu H [8][10]. Jest to odmiana metody ortogonalnej. Jednak ze względu na cechy tworzonych za jej pomocą rysunków zostanie ona omówiona oddzielnie. Rysunek drzewa wykreślonego tą metodą przypomina wiele połączonych z sobą liter H o różnych rozmiarach. Jest to efekt założenia metody polegającego na tym, że wszystkie krawędzie o indeksach nieparzystych wykreślane są w postaci odcinków poziomych, natomiast krawędzie o indeksach parzystych w postaci odcinków pionowych. Metoda ta, tak jak wspomniana powyżej metoda ortogonalna, jest przeznaczona wyłącznie do wykreślania drzew binarnych, ponieważ do dowolnego węzła drzewa mogą przylegać co najwyżej dwa nie nakładające się i leżące na tej samej linii prostej odcinki reprezentujące krawędzie drzewa.

Podczas analizy charakterystycznych cech rysunku struktury drzewiastej przyjęto, że odległość pomiędzy środkami dowolnych dwóch węzłów wykreślonej struktury nie może być mniejsza od  $d_{min}$ . Przyjęto też, że całkowity obszar  $P_c$  zajmowany przez rysunek drzewa jest równy powierzchni prostokąta na nim opisanego. Rysunek drzewa wykorzystuje efektywnie tylko pewną jego część, którą będziemy oznaczać jako  $P_w$  i która na rys. 2-6 została zacieniowana. Stosunek  $P_w/P_c$  określimy jako współczynnik efektywnego wykorzystania zajmowanego obszaru i oznaczymy jako  $\eta$ . Obliczenia wymagają również długości najdłuższych z krawędzi pomiędzy poszczególnymi sąsiadującymi warstwami, przy czym najistotniejsze to  $x_l$  (pomiędzy dwoma pierwszymi warstwami) i  $x_{n-1}$  (pomiędzy dwoma ostatnimi warstwami), które często są najdłuższymi ze wszystkich wykreślanych krawędzi.

## 2.2. Metoda piramidowa

Rozpatrzmy trzy warianty metody piramidowej, tak jak pokazano na rys. 2. Szukamy pola powierzchni  $P_c$  prostokątnego obrysu rysunku. W przypadku każdego z wariantów metody piramidowej jest ono liczone tak samo i daje taką samą wartość.

Pola te wynoszą odpowiednio:

$$\text{dla dwóch warstw: } d_{min} * d_{min}$$

$$\text{dla trzech warstw: } 2d_{min} * 3d_{min} = 6d_{min}^2$$

$$\text{dla czterech warstw: } 3d_{min} * 7d_{min} = 21d_{min}^2$$

$$\text{dla pięciu warstw: } 4d_{min} * 15d_{min} = 60d_{min}^2$$

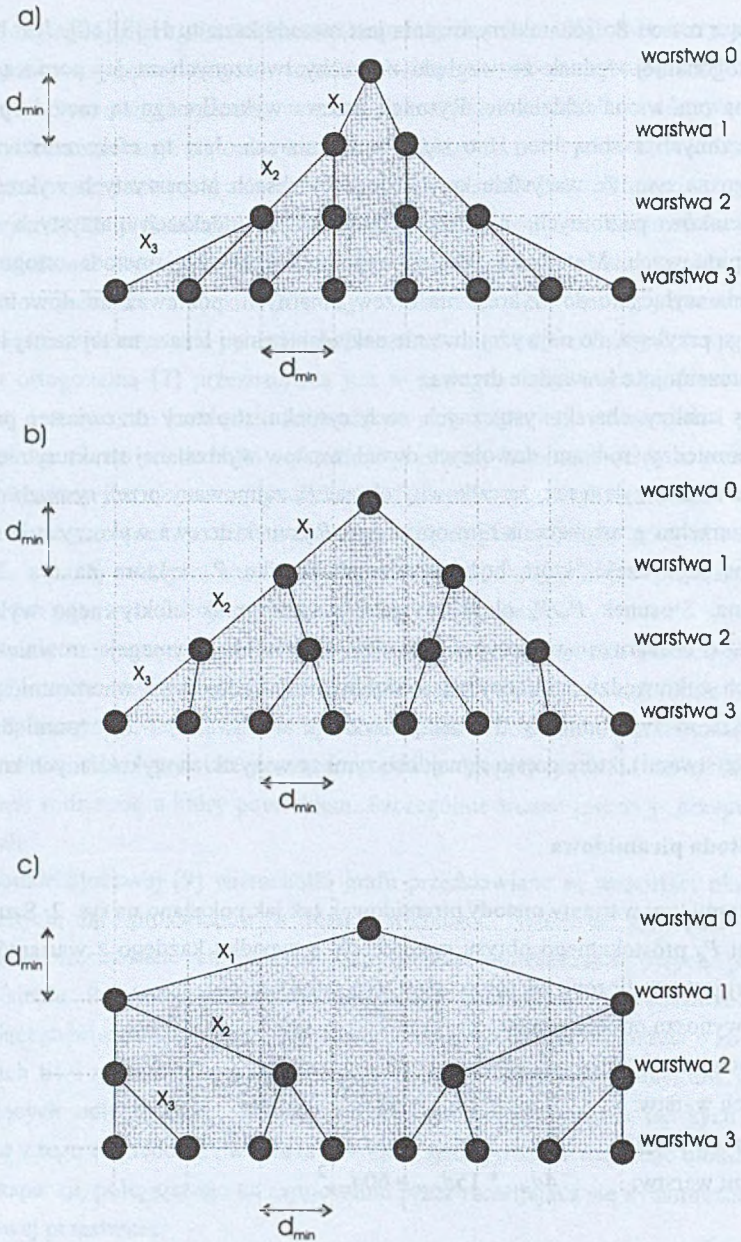
...

$$\text{dla } n \text{ warstw: } (n-1) d_{min} * (2^{n-1} - 1) d_{min}$$

czyli

$$P_c = (n-1)(2^{n-1} - 1)d_{min}^2 \quad (1)$$





Rys. 2. Pełne drzewo binarne, metoda piramidowa: a) wariant I, b) wariant II, c) wariant III  
 Fig. 2. Full binary tree, pyramid method: a) variant I, b) variant II, c) variant III

Teraz dla każdego wariantu oddzielnie określimy, jaki obszar  $P_w$  z pola  $P_c$  danego wzorem (1) jest faktycznie wykorzystywany przez rysunek drzewa.

### 2.2.1. Wariant I

W wariantcie tym obszar  $P_w$  wynosi odpowiednio:

dla dwóch warstw:  $0.5d_{min} * d_{min}$

dla trzech warstw:  $0.5d_{min}^2 + (1 + 2 * 0.5)d_{min}^2 = 2.5d_{min}^2$

dla czterech warstw:  $2.5d_{min}^2 + (3 + 2 * 1)d_{min}^2 = 7.5d_{min}^2$

dla pięciu warstw:  $7.5d_{min}^2 + (7 + 2 * 2)d_{min}^2 = 18.5d_{min}^2$

...

dla  $n$  warstw:  $0.5d_{min}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (2^i - 1 + 2^{i-1})d_{min}^2$

czyli:  $\sum_{i=0}^{n-2} (2^i - 1 + 2^{i-1})d_{min}^2$

Zatem współczynnik wykorzystania przestrzeni określony jako:  $\eta = \frac{P_w}{P_c}$ , wynosi:

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{n-2} (2^i - 1 + 2^{i-1})}{(n-1)(2^{n-1} - 1)} \quad (2)$$

Pozostają do obliczenia długości krawędzi. Ich wartość jest niezależna od ilości warstw wykreślonej struktury drzewiastej. Wynoszą one odpowiednio:

$$x_1 = \sqrt{d_{min}^2 + \left(\frac{d_{min}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} d_{min} \quad (3)$$

$$x_2 = \sqrt{d_{min}^2 + d_{min}^2} = \sqrt{2} d_{min}$$

$$x_3 = \sqrt{d_{min}^2 + (2d_{min})^2} = \sqrt{5} d_{min}$$

$$x_4 = \sqrt{d_{min}^2 + (4d_{min})^2} = \sqrt{17} d_{min}$$

...

$$x_{n-1} = \sqrt{d_{min}^2 + (2^{n-2} d_{min})^2} = \sqrt{1 + 2^{2n-4}} d_{min} \quad (4)$$

### 2.2.2. Wariant II

W wariantcie II powierzchnia wykorzystana  $P_w$  stanowi połowę zajętego obszaru  $P_c$  dla dowolnej liczby warstw węzłów. Jest to bezpośrednio widoczne na rys.2b.



$$\text{Zatem } \eta = \frac{(n-1)(2^{n-1}-1)}{(n-1)(2^{n-1}-1)} = 0.5 \quad (5)$$

Badane długości krawędzi w tym wariancie metody mają zawsze taką samą wartość, tzn.:

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1}$ . Wartość ta jest zależna od liczby warstw wykreślonej struktury.

Dla dwóch warstw:  $x_1 = \sqrt{1^2 + 0.5^2} \approx 1.12d_{\min}$

dla trzech:  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2^2 + 1.5^2}}{2} = 1.25d_{\min}$

dla czterech:  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{3^2 + 3.5^2}}{2} = 1.54d_{\min}$

...

dla  $n$  warstw:  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2 + \left(\frac{2^{n-1}-1}{2}\right)^2}}{n-1} d_{\min} \quad (6)$

### 2.2.3. Wariant III

W wariancie III niewykorzystany obszar znajduje się tylko pomiędzy warstwami nr 0 i 1.

Dla dwóch warstw (0 i 1) wynosi on:  $0.5d_{\min}^2$

dla trzech:  $3.5d_{\min}^2$

dla czterech:  $7.5d_{\min}^2$

.....

dla  $n$  warstw (0, 1, 2, ...,  $n-1$ ):  $\frac{2^n - 1}{2} d_{\min}^2$

Tak więc powierzchnia wykorzystana przez rysunek drzewa wynosi:

$$P_w = (n-1)(2^{n-1}-1)d_{\min}^2 - \frac{2^{n-1}-1}{2}d_{\min}^2 = P_c - \frac{2^{n-1}-1}{2}d_{\min}^2$$

$$\text{a wsp. } \eta = \frac{P_w}{P_c} = \frac{(n-1)(2^{n-1}-1) - \frac{2^{n-1}-1}{2}}{(n-1)(2^{n-1}-1)} = 1 - \frac{\frac{2^{n-1}-1}{2}}{(n-1)(2^{n-1}-1)} = 1 - \frac{1}{2(n-1)} \quad (7)$$

Natomiast długości krawędzi pomiędzy poszczególnymi warstwami wynoszą odpowiednio:

dla dwóch warstw:  $x_1 = \sqrt{1^2 + 0.5^2} \approx 1.12d_{\min}$

dla trzech warstw:  $x_1 = \sqrt{1^2 + 1.5^2} \approx 1.8d_{\min}$

$x_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \approx 1.41d_{\min}$

dla czterech:  $x_1 = \sqrt{1^2 + 3.5^2} \approx 3.64d_{\min}$



$$x_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2.24d_{\min}$$

$$x_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} \approx 1.41d_{\min}$$

...

dla  $n$  warstw: 
$$x_1 = \sqrt{1^2 + (2^{n-2} - 0.5)^2} d_{\min} = \sqrt{2^{2n-4} - 2^{n-2} + 1.25} d_{\min} \quad (8)$$

$$x_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2^{n-1} - 1}{3}\right)^2} d_{\min}$$

$$x_3 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2^{n-1} - 1}{7}\right)^2} d_{\min}$$

...

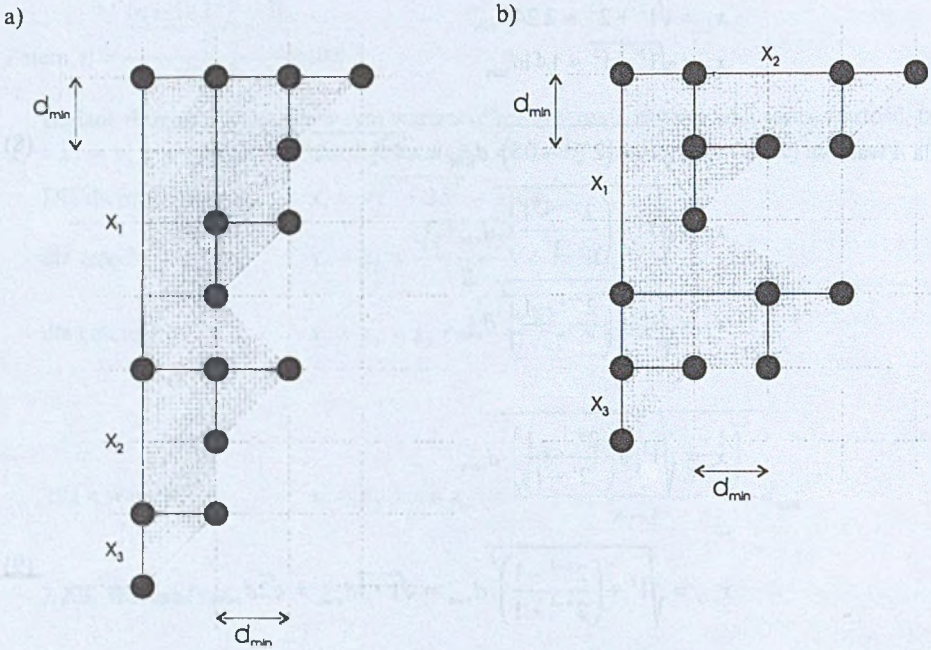
$$x_i = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2^{n-1} - 1}{2^i - 1}\right)^2} d_{\min}$$

...

$$x_{n-1} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} - 1}\right)^2} d_{\min} = \sqrt{1 + 1} d_{\min} = \sqrt{2} d_{\min} \quad (9)$$

### 2.3. Metoda ortogonalna

Na rys. 3 przedstawiono dwa warianty metody ortogonalnej. W wariantcie I przestrzegana jest zasada, że wszystkie węzły podrzędne znajdujące się na prawo umieszczane są w odległości równej  $d_{\min}$  od węzła nadrzędnego. Efektem jest powstawanie bardzo wąskich w poziomie i długich w pionie rysunków struktury. Modyfikacja dokonana w wariantcie II polega na tym, że węzły leżące na warstwach o indeksach parzystych, a znajdujące się poniżej swego węzła nadrzędnego umieszczane są w odległości  $d_{\min}$  od niego. Powoduje to rozsuniecie w poziomie pozostałych węzłów tych warstw, czyli węzłów leżących na prawo od swych węzłów nadrzędnych. Na skutek tego najdłuższe krawędzie pomiędzy poszczególnymi warstwami wykreślane są na przemian: raz w pionie, raz w poziomie. Uzyskany przez to prostokątny obrys struktury jest bardziej zbliżony do kwadratu. Uzyskujemy wtedy skrócenie długości najdłuższej krawędzi oraz dodatkowo zmniejszenie zajętości obszaru przez strukturę drzewa.



Rys. 3. Pełne drzewo binarne, metoda ortogonalna: a) wariant I, b) wariant II  
 Fig. 3. Full binary tree, orthogonal method: a) variant I, b) variant II

### 2.3.1. Wariant I

Tak samo jak dla wszystkich wariantów metody piramidowej, zakładamy nieograniczoną przestrzeń dostępną do wykreślenia drzewa binarnego oraz minimalną odległość  $d_{min}$  pomiędzy dwoma dowolnymi wierzchołkami tej struktury. Szukamy pola powierzchni, jaką zajmie prostokątny obrys rysunku. Wynik jest taki sam, jak w przypadku metody piramidowej, czyli  $P_c$  dane jest zależnością (1).

Zbadajmy, w jakim stopniu powierzchnia ta jest efektywnie wykorzystana przez rysunek drzewa.

$$\text{Dla dwóch warstw: } \eta = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$\text{dla trzech: } \eta = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\text{dla czterech: } \eta = \frac{10.5}{21} = 0.5$$

...



$$\text{analogicznie dla } n \text{ warstw: } \eta = \frac{(n-1)(2^{n-1} - 1)}{(n-1)(2^{n-1} - 1)} = 0.5 \quad (10)$$

Wynik ten jest identyczny z zależnością (5) otrzymaną dla wariantu II metody piramidowej.

Teraz sprawdzimy długości odcinków symbolizujących krawędzie pomiędzy przyległymi węzłami. Najdłuższą krawędzią jest zawsze krawędź przyległa do korzenia drzewa. Długość ta wynosi odpowiednio:

$$\text{dla dwóch warstw: } d_{min}$$

$$\text{dla trzech warstw: } 2d_{min}$$

$$\text{dla czterech warstw: } 4d_{min}$$

...

$$\text{dla } n \text{ warstw: } x_l = 2^{n-2}d_{min} \quad (11)$$

Natomiast długość krawędzi  $x_{n-1}$  pomiędzy węzłami znajdującymi się na dwóch ostatnich warstwach jest zawsze taka sama i jest równa wartości  $d_{min}$ .

### 2.3.2. Wariant II

W tym wariacie obliczenie wartości pola powierzchni  $P_c$  dla wykreślonego rysunku jest nieco bardziej skomplikowane niż poprzednio. Dla dwóch warstw struktury drzewiastej jest ono równe iloczynowi  $1*1$ , dla trzech warstw -  $2*3$ , dla następnych:  $5*4$ ,  $6*9$ ,  $13*10$ ,  $14*21$ ,  $29*22$  itd.

Po analizie powyższych iloczynów można stwierdzić, że

$$P_c(n) = x(n) * y(n), \quad (12)$$

gdzie:

$$x(n) = \sum_{i=2}^n \begin{cases} 2^{\frac{i}{2}} - 1, & \text{dla } i \text{ parzystego;} \\ \text{lub} \\ 1, & \text{dla } i \text{ nieparzystego;} \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{i=2}^n \begin{cases} 1, & \text{dla } i \text{ parzystego;} \\ \text{lub} \\ 2^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + 2^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1}, & \text{dla } i \text{ nieparzystego;} \end{cases}$$

Następnie badamy współczynnik efektywnego wykorzystania powierzchni  $P_c$  przez rysunek drzewa.

$$\text{Dla dwóch warstw: } \eta = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$\text{dla trzech: } \eta = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\text{dla czterech: } \eta = \frac{10}{20} = 0.5$$

...

$$\text{analogicznie dla } n \text{ warstw: } \eta = \frac{P_c}{2} = 0.5 \quad (13)$$

Jak można zauważyć, powyższy wynik jest identyczny jak dla wariantu I (zależność (10)), przy jednoczesnym zmniejszeniu wartości  $P_c$  dla  $n > 3$ .

Pozostaje sprawdzenie długości odcinków symbolizujących krawędzie pomiędzy przyległymi węzłami. Tak jak w wariancie I, najdłuższą krawędzią jest zawsze krawędź przyległa do korzenia drzewa. Jej wartości kształtują się następująco:

$$\text{dla dwóch warstw: } d_{min}$$

$$\text{dla trzech warstw: } 2d_{min}$$

$$\text{dla kolejnych: } 3d_{min}, 5d_{min}, 7d_{min}, 11d_{min}, 15d_{min}, 23d_{min}, \dots$$

...

$$\text{dla } n \text{ warstw: } x_i = 1 + \sum_{j=1}^n 2^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 2} d_{min} \quad (14)$$

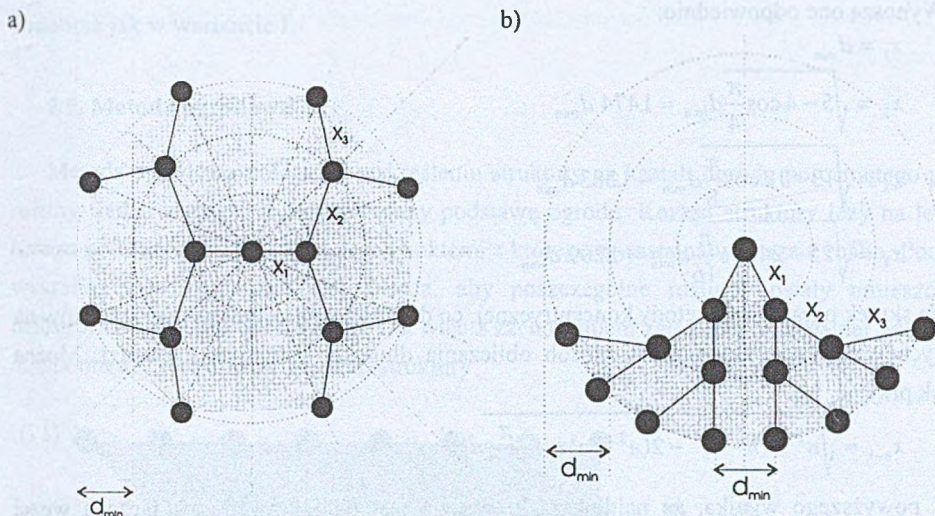
#### 2.4. Metoda koncentryczna

Metoda ta charakteryzuje się tym, że przy przyjętych założeniach (patrz rozdział 2.1) nie pozwala na wykreślenie kompletnego drzewa binarnego o zbyt dużej liczbie warstw, w odróżnieniu od innych omawianych w artykule metod. Przy założeniu że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami nie może być mniejsza od  $d_{min}$ , począwszy od szóstej warstwy nie mieszczą się na niej wszystkie wierzchołki struktury pełnego drzewa binarnego. Dlatego dla liczby warstw  $n > 5$  liczba wierzchołków na każdej warstwie  $i$  musi zostać ograniczona do  $\lfloor 2\pi i \rfloor$  dla każdego  $5 < i < n-1$ , co zostanie uwzględnione w obliczeniach wykonanych w tym podrozdziale.

Na rys. 4 przedstawiono dwa warianty metody koncentrycznej. W wariancie I węzły leżące na tej samej warstwie rozmieszczane są równomiernie na odpowiednim okręgu, którego środkiem jest korzeń struktury drzewiastej. Równomierne rozmieszczenie węzłów polega na tym, że okrąg dzielony jest na tyle części, ile węzłów ma się na nim znaleźć, a następnie węzły te umieszczane są w środku każdej z wydzielonych części. Dzięki odpowiedniemu ustawieniu poszczególnych warstw względem siebie można otrzymać rysunek kompletnego drzewa binarnego symetryczny względem jego korzenia oraz względem osi poziomej i pionowej.



W wariacie II metody koncentrycznej zrezygnowano z równomiernego wykorzystania całej długości okręgu na rzecz ciasnego (w odległości  $d_{min}$  od siebie) upakowania węzłów leżących na tej samej warstwie. Na rysunku drzewa poprowadzono pionowo oś symetrii przechodzącą przez korzeń. Jest to jedyna oś symetrii na tym rysunku. Wariant ten charakteryzuje się małą zajętością powierzchni dla małej liczby warstw. Ze względu na skomplikowany kształt tego obszaru obliczenie jego powierzchni jest bardzo czasochłonne. Zostanie więc pominięte ze względu na fakt, iż dotyczy tylko liczby warstw mniejszej od 5.



Rys. 4. Pełne drzewo binarne, metoda koncentryczna: a) wariant I, b) wariant II  
 Fig. 4. Full binary tree, concentric method: a) variant I, b) variant II

Zakładając minimalne odległości (równe  $d_{min}$ ) pomiędzy warstwami, wyznaczamy pole powierzchni  $P_w$  zajmowane przez rysunek drzewa. Jak łatwo można zauważyć, w obu wariantach metody powierzchnia ta zbliża się kształtem do powierzchni koła wraz z wykreślaniem struktur o większej liczbie warstw. Dla wariantu I jest to powierzchnia wieloboku foremnego o coraz to większej liczbie wierzchołków, a w przypadku wariantu II jest to stałe powiększający się wycinek powierzchni koła. Dlatego też można zapisać:  $P_w = \pi(n-1)^2 d_{min}^2$ , dla bardzo dużych  $n$ .

Przy założeniu że  $P_w$  jest równe powierzchni koła, pole prostokątnego obrysu rysunku drzewa będzie równe:

$$P_c = 4(n-1)^2 d_{min}^2 \quad (15)$$

Zatem dla  $n$  warstw współczynnik wykorzystania powierzchni wynosi:

$$\eta = \frac{P_w}{P_c} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \quad (16)$$

### 2.4.1. Wariant I

Wariant ten polega na równomiernym rozmieszczeniu węzłów w warstwie tak, aby odległości pomiędzy sąsiadującymi węzłami w danej warstwie były takie same. Na rys.4a) pokazano przykład kompletnego drzewa binarnego o czterech warstwach struktury.

Ponieważ  $P_c$  i  $\eta$  zostały już określone, pozostają jeszcze do policzenia wartości długości krawędzi łączących węzły rozmieszczone na kolejnych warstwach struktury. Wielkości te są niezależne od liczby warstw struktury.

Wynoszą one odpowiednio:

$$x_1 = d_{\min}$$

$$x_2 = \sqrt{5 - 4 \cos \frac{\pi}{4}} d_{\min} \approx 1.474 d_{\min}$$

$$x_3 = \sqrt{13 - 12 \cos \frac{\pi}{8}} d_{\min} \approx 1.383 d_{\min}$$

$$x_4 = \sqrt{25 - 24 \cos \frac{\pi}{16}} d_{\min} \approx 1.209 d_{\min}$$

Na skutek ograniczeń metody koncentrycznej, co do ilości wykreślanych wierzchołków na dalszych warstwach, zmienia się sposób obliczania długości kolejnych krawędzi. Można jednak przyjąć, że:

$$x_{n-1} = \sqrt{n^2 + (n-1)^2 - 2(n^2 - n) \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} d_{\min} \quad (17)$$

Z powyższego wynika, że najdłuższą krawędzią jest tutaj krawędź  $x_2$ , łącząca węzeł położony w pierwszej warstwie struktury z węzłem położonym w warstwie drugiej.

Kolejne krawędzie są coraz krótsze, zdrażając do wartości  $d_{\min}$ , co można udowodnić licząc:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}$

### 2.4.2. Wariant II

Wariant ten różni się od metody piramidowej w wariacie I w zasadzie tylko tym, że poszczególne warstwy, na których rozłożone są wierzchołki struktury o tych samych odległościach od korzenia, nie są liniami prostymi, lecz okręgami. Dlatego też, podobnie jak we wspomnianej metodzie, również tutaj krawędzie zwiększają swoją długość począwszy od  $x_1$  aż do  $x_2$ .

$$x_1 = d_{\min}$$

$$x_2 = \sqrt{5 - 4 \cos \left( 3 \arcsin \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6} \right)} d_{\min} \approx 1.053 d_{\min}$$



$$x_3 = \sqrt{13 - 12 \cos\left(7 \arcsin \frac{1}{6} - 3 \arcsin \frac{1}{4}\right)} d_{\min} \approx 1.419 d_{\min}$$

$$x_4 = \sqrt{25 - 24 \cos\left(15 \arcsin \frac{1}{8} - 7 \arcsin \frac{1}{6}\right)} d_{\min} \approx 2.601 d_{\min}$$

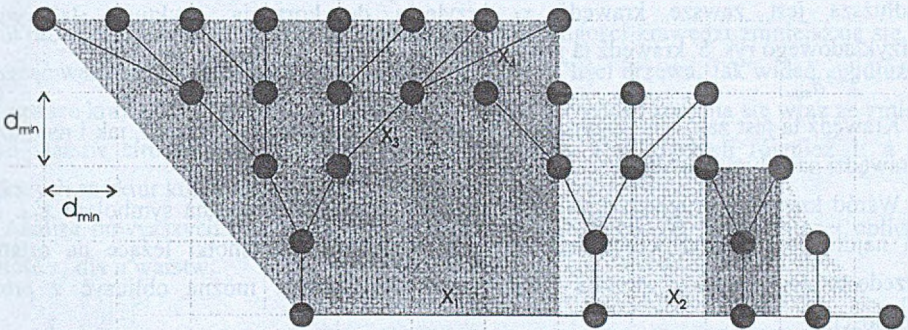
Kolejne krawędzie począwszy od  $x_5$  na skutek ograniczeń dotyczących metody stają się coraz krótsze. Obliczanie ich długości nie wnosi jednak nic interesującego do analizy rysunku drzewa. Z rys.4b można jednak zauważyć, że:

$$x_{n-1} \approx d_{\min} \tag{18}$$

podobnie jak w wariancie I.

### 2.5. Metoda ogrodowa

Metoda ogrodowa polega na wykreśleniu struktury na kształt ogrodu porośniętego przez rośliny. Jedną z gałęzi struktury tworzy podstawę ogrodu. Korzeń struktury leży na lewym brzegu podstawy i jest jednocześnie punktem, z którego wyrasta największa z roślin. Podczas wykreślania przestrzegana jest zasada, aby poszczególne rośliny zostały umieszczone najbliżej siebie, jak to tylko możliwe, a więc z zachowaniem założonej minimalnej odległości  $d_{\min}$  pomiędzy dowolnymi węzłami struktury.



Rys. 5. Pełne drzewo binarne, metoda ogrodowa  
 Fig. 5. Full binary tree, garden method

Na rys. 5 wykonanym za pomocą metody ogrodowej można spostrzec, że wysokość prostokątnego obrysu wykreślonej figury zależna jest liniowo od ilości warstw struktury i wynosi  $n-1$ . Natomiast szerokość tego obrysu jest zależnością bardziej złożoną, ponieważ równa jest sumie szeregu następujących wartości:  $2^{n-2}-1, 2^{n-4}, 2^{n-5}, 2^{n-6}, \dots, 2^1, 2^0, 1.5$ .

Tak więc zależność, dzięki której można policzyć pole  $P_c$ , ma postać:

$$P_c = (n-1) * (2^{n-2}-1 + 2^{n-4} + 2^{n-5} + \dots + 4 + 2 + 1 + 1.5) d_{\min}^2 \tag{19}$$

Efektywnie wykorzystana jest tylko część tego obszaru, równa wartościom: 0.5 (dla rysunku struktury drzewa zbudowanego z dwóch warstw), 2.75 (dla trzech warstw), 10 (dla czterech warstw) itd. Dla uproszczenia obliczeń przyjęto, że w skład obszaru efektywnie wykorzystanego wchodzi cała powierzchnia znajdująca się w cieniu rośliny po jej prawej stronie, a nie tylko część wykorzystana przez roślinę sąsiednią. W trakcie rozważań nad obliczeniem powierzchni  $P_w$  zauważono, że powierzchnia ta składa się z trzech charakterystycznych elementów: trapezowego obrysu najwyższej rośliny, szeregu obszarów prostokątnych obejmujących rośliny w środku ogrodu, oraz czworobocznego obszaru zajmowanego przez prawą, krańcową część ogrodu. Suma tych obszarów dla  $n > 2$  dana jest zależnością:

$$P_w = \frac{3}{4}(n-1)(2^{n-2}-1)d_{\min}^2 + \sum_{i=0}^{n-4} 2^i(i+2)d_{\min}^2 + 1.25d_{\min}^2$$

Tak więc współczynnik  $\eta$  określa zależność:

$$\eta = \frac{P_w}{P_c} = \frac{\frac{3}{4}(n-1)(2^{n-2}-1) + \sum_{i=0}^{n-4} 2^i(i+2) + 1.25}{(n-1) * (2^{n-2} + 2^{n-4} + 2^{n-5} + \dots + 2^1 + 2^0 + 0.5)} \quad (20)$$

Na rysunku struktury drzewiastej, wykonanym za pomocą metody ogrodowej, wyróżniamy dwa typy krawędzi: krawędzie tworzące podstawę rysunku ogrodu oraz krawędzie, z których zbudowane są kontury roślin. Wśród krawędzi pierwszego typu najdłuższa jest zawsze krawędź  $x_1$  przyległa do korzenia struktury. Jak widać z przykładowego rys. 5, krawędź ta jest równa wartości:

$$2^{n-3}d_{\min} \quad (21)$$

Krawędź ta jest zarówno najdłuższą z krawędzi przyległych do korzenia, jak i najdłuższą z krawędzi na całym rysunku.

Wśród krawędzi drugiego typu najdłuższa jest krawędź oznaczana symbolem  $x_{n-1}$ . Jest ona najdłuższą spośród wszystkich krawędzi łączących wierzchołki leżące na ostatniej i przedostatniej warstwie struktury drzewiastej. Jej wartość można obliczyć z prostej zależności:

$$x_{n-1} = \sqrt{1 + (2^{n-4})^2} d_{\min} \quad (22)$$

## 2.6. Metoda kształtu H

Jak widać na rys. 6, w metodzie kształtu H struktura drzewiasta zajmuje w całości obszar prostokątny przeznaczony na jej wykreślenie, a więc  $P_w = P_c$ . Wynika z tego, że współczynnik  $\eta = 1$ . Postaramy się jeszcze określić, jak zmienia się wartość  $P_c$  w zależności od liczby warstw wykreślonej struktury.



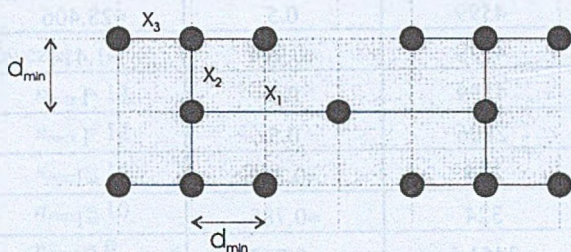
Dla trzech warstw jest równa iloczynowi  $2*2$ , dla czterech -  $6*2$ , a dla większych struktur kolejno:  $6*6$ ,  $14*6$ ,  $14*14$ ,  $30*14$ ,  $30*30$ ...

Analiza powyższych iloczynów pozwala na zapisanie zależności pozwalającej obliczyć wartość  $P_c$  dla  $n$  warstw:

$$P_c(n) = x(n) * y(n),$$

gdzie:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^i, \quad y(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2^i \tag{23}$$



Rys. 6. Pełne drzewo binarne, metoda kształtu H

Fig. 6. Full binary tree, H-shape method

Wraz ze wzrostem odległości od korzenia drzewa, długości krawędzi zmniejszają się, by osiągnąć wartość równą  $d_{min}$  dla krawędzi przyległych do liści drzewa. Jak widać, najdłuższa jest zawsze krawędź  $x_1$  przyległa do korzenia drzewa. Jej wartość zmienia się wraz ze zmianą ilości warstw struktury. Dla dwóch warstw jest równa 1, dla trzech również 1, a dla większych struktur kolejno: 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16.....

Analiza powyższych iloczynów pozwala na zapisanie zależności pozwalającej obliczyć wartość  $x_1$  dla  $n$  warstw:

$$x_1 = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \tag{24}$$

### 2.7. Podsumowanie

Dla porównania policzono cechy charakterystyczne rysunków kompletnych drzew binarnych o dziesięciu warstwach wierzchołków, wykreślonych omawianymi wcześniej metodami. Dla  $n = 10$  policzono  $P_c$  z zależności: (1), (12), (15), (19) i (23); współczynnik  $\eta$  z zależności: (2), (5), (7), (10), (13), (16) i (20); długość krawędzi  $x_1$  na podstawie (4), (6), (9), (17), (18) i (22). W ostatniej kolumnie tabeli 1 wypisano wartości najdłuższych krawędzi w całym wykreślonym rysunku drzewa, korzystając ze wzorów (9), (6), (8), (11), (14), (17),

(21), (24). Jak można zauważyć, największym problemem podczas wykreślenia jest generowanie zbyt długich krawędzi. Spełnienia kryterium o przestrzeganiu jednolitych długości krawędzi najbliższe są obie metody koncentryczne, dla których wartości długości najdłuższych krawędzi są niezależne od liczby wykreślanych warstw struktury drzewiastej.

Tabela I  
Charakterystyczne cechy rysunków pełnych drzew binarnych dla  $n = 10$

metoda	pole $P_c$ [ $d_{min}^2$ ]	$\eta$	krawędź $x_g$ [ $d_{min}$ ]	najdłuższa krawędź [ $d_{min}$ ]
piramidowa I	4599	$\approx 0.165$	$\approx 256.002$	$x_g \approx 256.002$
piramidowa II	4599	0.5	$\approx 28.406$	$x_1 \dots x_g \approx 28.406$
piramidowa III	4599	$\approx 0.944$	$\approx 1.414$	$x_1 \approx 255.502$
ortogonalna I	4599	0.5	1	$x_1 = 256$
ortogonalna II	2806	0.5	1	$x_1 = 31$
koncentryczna I	324	$\approx 0.785$	$\approx 1$	$x_2 \approx 1.474$
koncentryczna II	324	$\approx 0.785$	$\approx 1$	$x_f \approx 2.601$
ogrodowa	3451.5	$\approx 0.759$	$\approx 64.009$	$x_1 = 128$
kształtu H	1860	1.0	1	$x_1 = 16$

Natomiast metoda kształtu H generuje rysunek drzewa, który optymalnie wykorzystuje przeznaczony do wykreślenia obszar powierzchni. Świadczy o tym współczynnik  $\eta$  równy wartości 1.

Bardzo małą zajętością powierzchni, ponad 14-krotnie mniejszą od obszaru zajmowanego przez rysunek wykonany metodą piramidową, charakteryzują się rysunki generowane za pomocy obu metod koncentrycznych. Efekt ten jest jednak wynikiem ograniczenia metod koncentrycznych dotyczącego ilości wykreślanych węzłów. Ponieważ mimo swych ograniczeń metoda koncentryczna w powyższej statystyce wypadła zdecydowanie najlepiej, warto więc dokładniej przyjrzeć się tym ograniczeniom.

Zakładamy wariant pesymistyczny pełnego drzewa binarnego, w którym w każdej warstwie znajduje się  $2^{n-1}$  węzłów, gdzie  $n$  oznacza liczbę wszystkich warstw drzewa. Aby rysunek mógł być wykreślony zgodnie z założeniem, musi zająć zależność:

$$2^{n-1} d_{min} \leq 2\pi(n-1)d_{min}$$

Jest to oczywiście uproszczenie, gdyż odległość pomiędzy węzłami sąsiadującymi w tej samej warstwie nie jest równa odcinkowi łuku, na którym te węzły są rozmieszczane. Jednak w miarę oddalania się od korzenia drzewa różnica ta jest coraz mniejsza i dąży do zera.

Powyższą zależność można uprościć do warunku:



$$\frac{2^{n-1}}{(n-1)} \leq 2\pi \quad (25)$$

Jak łatwo można sprawdzić, warunkowi tego nie spełnia już struktura o sześciu warstwach, która nie jest w stanie pomieścić na ostatnim okręgu 32 węzły.

Pamiętajmy jednak, że rysunek reprezentować będzie strukturę systemu ewolucyjnego, która bardzo rzadko jest pełnym drzewem binarnym. Przeanalizujmy jeszcze raz maksymalną ilość możliwych do wykreślenia warstw, wprowadzając do zależności (25) współczynnik  $k$ , określający procentową ilość elementów na każdej warstwie.

$$\frac{\frac{k}{100} 2^{n-1}}{(n-1)} \leq 2\pi$$

otrzymujemy wówczas:

dla $k = 1$	$n_{max} = 13$
dla $k = 2..3$	$n_{max} = 12$
dla $k = 4..6$	$n_{max} = 11$
dla $k = 7..11$	$n_{max} = 10$
dla $k = 12..19$	$n_{max} = 9$
dla $k = 20..34$	$n_{max} = 8$
dla $k = 35..58$	$n_{max} = 7$
dla $k = 59..98$	$n_{max} = 6$
dla $k = 99..100$	$n_{max} = 5$

Jak widać, funkcja wykładnicza  $2^{n-1}$  rośnie tak szybko, że pomimo procentowego ograniczenia liczby węzłów w każdej warstwie, w końcu i tak dojdzie do kolizji. W metodzie tej liczba dostępnego miejsca na wykreślenie węzłów rośnie dosyć wolno, bo z szybkością liniową:

$$2\pi(n-1), \quad (26)$$

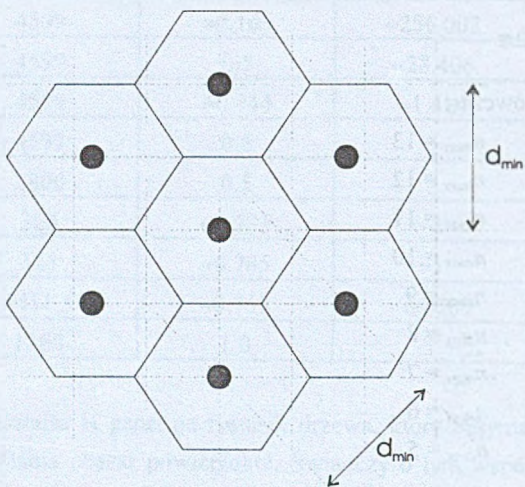
co daje przyrost o około 6 wolnych miejsc do wykreślenia węzłów na każdym kolejnym okręgu reprezentującym warstwę struktury drzewa.

### 3. Wykreślanie w przestrzeni 3D

Wykreślanie grafów, a w szczególności grafów acyklicznych, jakimi są drzewa, w przestrzeni trójwymiarowej jest stosunkowo mało rozpowszechnione. Dlatego też nie zostanie tu przedstawiona żadna metoda wykreślania. Jednakże bazując na dobrych wynikach stosowania metody koncentrycznej na powierzchni płaskiej, można zaryzykować

stwierdzenie, że również w przestrzeni trójwymiarowej odpowiedni wariant tej metody będzie dawał najlepsze rezultaty. Tak jak w przypadku przestrzeni 2D, również tutaj metoda koncentryczna jest ograniczona przestrzenią do wykreślenia węzłów leżących na poszczególnych warstwach, ponieważ są one rozmieszczane na powierzchni sfery, której środkiem jest korzeń drzewa.

Nie znamy sposobu prowadzenia krawędzi, więc skoncentrujemy się tylko na obliczeniu, ile węzłów mieści się w każdej wykreślanej warstwie struktury. Zakładamy, że metoda działa tak, aby pomieścić w każdej warstwie jak najwięcej węzłów.



Rys. 7. Położenie wierzchołków na powierzchni sfery

Fig. 7. Location of vertices on the sphere surface

Obiekt graficzny reprezentujący węzeł na powierzchni sfery możemy opisać sześciokątem foremnym, jak pokazano na rys.5. Przy założeniu że odległość pomiędzy środkami symboli graficznych reprezentujących węzły wynosi  $d_{min}$ , pole powierzchni takiej figury geometrycznej wynosi  $\frac{\sqrt{3}d_{min}^2}{2}$ . Jest to oczywiście pole powierzchni figury na niezakrzywionej płaszczyźnie. W naszym przypadku mamy do czynienia ze sferą. Różnica ta nie ma znaczenia w naszych rozważaniach, ponieważ na odleglejszych warstwach wykreślonej struktury drzewiastej powierzchnia sfery jest coraz mniej wypukła, a właśnie dla analizowanego problemu te najbardziej odległe sfery są najbardziej interesujące.

Zakładając wariant pesymistyczny pełnego drzewa binarnego, w którym na każdej warstwie znajduje się  $2^{n-1}$  węzłów, aby rysunek mógł być wykreślony zgodnie z założeniami, musi zostać spełniona nierówność:



$$2^{n-1} \frac{\sqrt{3}d_{\min}^2}{2} \leq 4\pi((n-1)d_{\min})^2,$$

co można uprościć do warunku:

$$\frac{2^{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \quad (27)$$

Jak łatwo można sprawdzić, warunku tego nie spełnia dopiero struktura o dwunastu warstwach, w której ostatnia sfera nie jest w stanie pomieścić 2048 węzłów.

Podobnie jak dla przestrzeni 2D, tak również tutaj sprawdzamy, ile warstw jesteśmy w stanie wykreślić w przypadku niepełnego drzewa binarnego, wprowadzając do zależności (27) współczynnik  $k$ , określający procentową ilość elementów na każdej warstwie.

$$\frac{\frac{k}{100} 2^{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$$

otrzymujemy wówczas:

dla $k = 1$	$n_{max} = 19$
dla $k = 2..3$	$n_{max} = 18$
dla $k = 4..5$	$n_{max} = 17$
dla $k = 6..9$	$n_{max} = 16$
dla $k = 10..17$	$n_{max} = 15$
dla $k = 18..29$	$n_{max} = 14$
dla $k = 30..51$	$n_{max} = 13$
dla $k = 52..85$	$n_{max} = 12$
dla $k = 86..100$	$n_{max} = 11$

Jak widać, również w tym wypadku szybki wzrost funkcji wykładniczej  $2^{n-1}$  doprowadza w końcu do kolizji na niezbyt odległej warstwie, pomimo procentowego ograniczenia liczby węzłów. W metodzie tej liczba dostępnego miejsca na wykreślenie węzłów rośnie z szybkością kwadratową:

$$4\pi(n-1)^2 \quad (28)$$

#### 4. Porównanie szybkości wzrostu elementów struktury drzewiastej i komórek systemu ewolucyjnego

W pracy [11] poświęconej ilościowej ocenie szybkości wzrostu struktury systemu ewolucyjnego stwierdzono, że funkcje wzrostu systemów rozwijających zależą od konstrukcji słowa genetycznego. Liczba elementów systemów rozwijających się o słowach genetycznych

o strukturze liniowej może mieć również postać liniową, np.  $2n$ . Natomiast w przypadku systemów o słowach genetycznych o strukturze kołowej liczba elementów może rosnać szybciej. W takich przypadkach funkcja wzrostu może być funkcją wykładniczą, np.  $2^n$ . Należy tutaj zauważyć, że w powyższych zależnościach  $n$  oznacza fazę rozwoju struktury, a nie liczbę elementów w jej  $n$ -tej warstwie. Dla uproszczenia rozważań przyjęto, że dynamicznie rozwijające się elementy systemu ewolucyjnego znajdują się na jego obrzeżach i tam właśnie, w najdalszych warstwach struktury, powstają nowe jego komórki.

Opierając się na rozważaniach z poprzednich rozdziałów i przedstawionych w nich zależnościach (26) i (28) oraz pamiętając o założeniach mówiących o minimalnej odległości pomiędzy poziomami drzewa można zauważyć, że do wykreślenia struktury systemu ewolucyjnego o liniowej strukturze słowa genetycznego może wystarczyć nam przestrzeń dwuwymiarowa. Jednakże w przypadku słowa genetycznego o strukturze kołowej ilość elementów systemu może rosnać na tyle szybko, że wykreślanie struktury trzeba przenieść w przestrzeń 3D.

Trzeba pamiętać jednak również o tym, że słowo genetyczne może posiadać bardzo prosty system operacyjny, który wpływa hamująco na szybkość rozwoju struktury systemu ewolucyjnego poprzez ograniczanie liczby powstawania nowych elementów oraz usuwanie ze struktury elementów o ograniczonym czasie życia [12].

## 5. Uwagi końcowe

W niniejszym artykule podjęto próbę oszacowania możliwości skutecznego wykreślenia struktury drzewiastej w określonej przestrzeni. W ramach badań przeanalizowano konstrukcję rysunków drzew wykreślonych za pomocą kilku najpopularniejszych metod wykreślenia. Największymi zaletami wykazała się metoda koncentrycznego rozmieszczania węzłów. Wyniki przeprowadzonych przez autora obliczeń dowodzą celowości stosowania tej metody do prezentacji struktury systemu ewolucyjnego.

W artykule zaprezentowano podejście bazujące na centralnej kontroli rozmieszczania wierzchołków w istniejącej strukturze. Jest to bardzo wygodne podejście, pozwalające na zachowanie wielu cech estetycznych rysunku, jak na przykład symetrii. W rzeczywistości elementy systemu rozwijającego się mogą być (jak w organizmach żywych) obiektami autonomicznymi, nie posiadającymi informacji o położeniu pozostałych części struktury. Nowa komórka systemu powstaje w bezpośrednim sąsiedztwie rodzica, w kierunku wynikającym wprost z informacji zapisanych w kodzie genetycznym. Dopiero w momencie gdy następuje kolizja z inną komórką systemu, następuje wyszukanie wolnego obszaru w najbliższym sąsiedztwie komórki rodzica i dopiero w ostateczności rozepchnięcie



struktury. W kierunku opracowania metody wykreślania uwzględniającej powyższe aspekty podążają aktualnie badania autora.

System ewolucyjny może reprezentować strukturę organizmu żywego. Wtedy podczas wizualizacji takiej struktury należy dążyć do minimalizacji długości krawędzi lub wręcz do ich wyeliminowania. Logiczne połączenia w strukturze drzewiastej są zazwyczaj przedstawiane w postaci odcinków. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by podjąć próbę przedstawienia ich w postaci punktu wspólnego (styku) dwóch obiektów graficznych reprezentujących dwa powiązane z sobą węzły drzewa. Ma to znaczenie szczególnie podczas wizualizacji w przestrzeni 3D, kiedy to struktura bez odcinków symbolizujących krawędzie wierniej obrazuje rozwijający się organizm.

## LITERATURA

1. Węgrzyn S., Gille J. C., Vidal P.: On some models for Developmental Systems. Part I: Organism structure on the basis of elementary transformations. *Int. J. of Systems Sci.* 13: s. 359-378, 1982.
2. Węgrzyn S., Gille J. C., Vidal P.: On some models for Developmental Systems. Part VII: On some types of patterns included in a feedback loop. *Int. J. of Systems Sci.* 17: s. 569-579, 1986.
3. Drozdek A., Simon D. L.: *Struktury danych w języku C. WNT*, Warszawa 1996.
4. Lipski W.: *Kombinatoryka dla programistów. WNT*, Warszawa 1982.
5. Reingold E. M., Nievergelt J., Deo N.: *Algorytmy kombinatoryczne. PWN*, Warszawa 1985.
6. Reingold E., Tilford J.: Tidier drawings of trees. *IEEE Transactions on Software Engineering* 1981, s. 223-228.
7. Crescenzi P., Di Battista G., Piperino A.: A note on optimal area algorithms for upward drawings of binary trees. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1992, vol. 2, s. 187-200.
8. Eades P.: Drawing Free Trees. *Bulletin of the Institute for Combinatorics and its Applications*, 1992, vol. 5, s. 1-36.
9. Sindre G., Gulla B., Jokstad H. G.: Onion graphs: aesthetics and layout. s. 287-291.
10. Shiloach. Arrangements of Planar Graphs on the Planar Lattice. PhD thesis, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Izrael, 1976.
11. Vidal P., Węgrzyn S., Gille J. C.: On some models for Developmental Systems. Part III: Another approach for evaluating the cellural composition. *Int. J. Systems Sci.* 14: s. 753-763, 1983.

12. Gille J. C., Vidal P., Węgrzyn S., Ouellet Y.: On some models for Developmental Systems. Part II: Evolution of the cellural composition. *Int. J. of Systems Sci.* 13: s. 379-397, 1982.

Recenzent: Dr inż. Mieczysław Kłopotek

Wpłynęło do Redakcji 29 kwietnia 1999 r.

### Abstract

In the paper application of binary tree drawing methods to presentation of the structure of evolutive system is presented. At the beginning criteria of method required to evolutive system drawing is described. Then in chapter 2, methods of drawing in two-dimensional space are characterized. The figure 1 presents sample acyclic structure drawn by six different methods: pyramid, orthogonal, concentric, block, garden and H-shape method. More details we can see in the figures 2-6. Block method is rejected from the next analysis because of its properties. For each of five methods area taken by the figure of the tree structure is calculated: (1), (11), (12), (15), (19), (23); area utilization efficiency is given by: (2), (5), (7), (10), (13), (16), (20); and length of edge  $x_p$  is described by: (4), (6), (9), (17), (18) and (22). All these results are compared in the table 1. All values in the table are calculated for full ten-levelled binary tree. Superiority of concentric method is shown in this way. Next the limits of concentric method is checked. The number of tree levels that can be drawn is given by condition (25) and (26). Then in chapter 3 possibility of application of the concentric method to drawing tree structure in 3D space is discussed. In the figure 7 the way of distribution of acyclic structure's vertices on the sphere surface is shown. Possibility of drawing both full and incomplete binary tree is described by (27) and (28). It describes the number of tree structure levels we are able to draw. And at the end in chapter 4 growth of evolutive systems and binary structure is compared.