ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Eugeniusz SOCZKIEWICZ

PROPAGACJA FAL AKUSTYCZNYCH W OŚRODKACH PRZYPADKOWO NIEJEDNORODNYCH. PORÓWNANIE METOD I WYNIKÓW

Streszczenie. Wyznaczono współczynnik rozpraszania fal akustycznych w izotropowych ośrodkach przypadkowo niejednorodnych dla różnych postaci funkcji korelacji niejednorodności. Porównano wyniki otrzymywane metodami: małych zaburzeń, równania parabolicznego i funkcji Greena.

1. WSTĘP

Problem propagacji fal w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych występuje w wielu działach fizyki: akustyce, biofizyce, optyce, radiofizyce, fizyce atmosfery, geofizyce itd. [1-4]. W szczególności, zastosowanie fal akustycznych w badaniach polikrystalicznych skał pozwala badać nie tylko ich porowatość, ale i strukturę pór. Pomiary tłumienia fal ultradźwiękowych stosowane są do badania struktury metali [5] oraz tkanek [6]. Intensywnie rozwijają się badania propagacji fal akustycznych w morzu, gdzie niejednorodności wywoływane są przez turbulencje, fluktuacje temperatury itp. [7,8].

Fluktuacje współczynnika załamania ośrodka dla fal akustycznych, powodują zmianę prędkości propagującej się fali, fluktuacje kierunku jej rozchodzenia się, a rozpraszanie fal na niejednorodnościach wywołuje stochastyczne zmiany amplitudy i fazy fali, a w przypadku fal poprzecznych również zmianę kierunku polaryzacji.

W teoretycznym opisie propagacji fal w ośrodkach stochastycznych stosowane są różne metody matematyczne [9,10], w tym również metody zaczerpnięte z kwantowej teorii pola [1,11-13]. Wybór konkretnej metody zależy w dużym stopniu od rozmiarów niejednorodności w stosunku do długości fali oraz od tego, czy zachodzi potrzeba uwzględniania wielokrotnego rozpraszania fal na pewnym etapie analizy [14].

Jeśli $\lambda \ll a$ i $\lambda L \ll a^2$, gdzie L oznacza odległość punktu obserwacji od źródła fali, a - średni rozmiar niejednorodności, to metoda optyki geometrycznej [10] może być użyta do wyznaczania średniej kwadratowej fluktuacji czasu przebiegu fali oraz fluktuacji amplitudy i fazy fali. Zakres stosowalności metody małych zaburzeń [10] określają nierówności $\frac{\Delta A}{A} \ll 1$, $\Delta\Phi \ll 1$ gdzie A oznacza amplitudę fali, a ΔA, $\Delta\Phi$ - fluktuacje amplitudy i fazy fali. Metoda ciągłych zaburzeń (metoda Rytowa) posiada większy zakres stosowalności [9,10] jako że wymaga się w niej małych względnych fluktuacji amplitudy i fazy na odległości równej długości fali. Metodę małych zaburzeń oraz metodę Rytowa rozpatrzył szczegółowo Chivers [15], uogólniając metodę Rytowa obliczania fluktuacji fazy i amplitudy fali przez uwzględnienie w obliczeniach nie tylko zmian prędkości fali, ale i fluktuacji gęstości i modułu ściśliwości ośrodka. Chivers wykazał, że otrzymane wyniki zależą od wielkości parametru $D = 4L/ka^2$, gdzie k oznacza liczbę falową. Metoda funkcji Greena pozwala rozpatrywać wielokrotne rozpraszanie fali na niejednorodnościach ośrodka. W przypadku niejednorodności dużych w porównaniu z długością fali, tj. $ka \gg 1$, stosowana jest metoda równania parabolicznego do wyznaczania współczynnika rozpraszania fali. Problemy związane z propagacją fal w ośrodkach stochastycznych ogólnie można podzielić na: zagadnienia związane z propagacją fal w dyskretnych ośrodkach stochastycznych (np. w zawiesinach), propagację fal w ciągłych ośrodkach przypadkowo niejednorodnych oraz zagadnienia rozpraszania fal na stochastycznie nierównych powierzchniach [3]. Charakter propagacji fal w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych zależy też od rozpatrywanych odległości przebytych przez fale [16].

2. STATYSTYCZNE CHARAKTERYSTYKI OŚRODKÓW PRZYPADKOWO NIEJEDNORODNYCH

Akustyczne własności ośrodków przypadkowo niejednorodnych zależą nie tylko od średniej kwadratowej fluktuacji współczynnika załamania ośrodka dla fal akustycznych $\langle \varepsilon^2(\vec{r}) \rangle$, ale i od funkcji autokorelacji tych fluktuacji: $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \varepsilon(\vec{r}_1)\varepsilon(\vec{r}_2) \rangle$, przy czym kwadrat współczynnika załamania ośrodka został przedstawiony w postaci: $n^2(\vec{r}) = 1 + \varepsilon(\vec{r})$, przy czym $\varepsilon(\vec{r})$ oznacza fluktuującą

jego część. Dalej będziemy rozpatrywać stacjonarne ośrodki stochastyczne oraz statystycznie jednorodne, tj. takie, których statystyczne charakterystyki nie zmieniają się przy translacjach układu współrzędnych. W rozważaniach zagadnień propagacji fal akustycznych w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych często przyjmowana jest gaussowska postać [10] funkcji korelacji fluktuacji współczynnika załamania ośrodka:

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \langle\varepsilon^2\rangle \exp\left[-(r_1-r_2)^2/a^2\right], \tag{1}$$

gdzie "a" - tzw. promień korelacji fluktuacji, tj. średnia odległość, na której fluktuacje pozostają skorelowane. Korzystając z równania:

$$\left\langle\left(\frac{d\varepsilon(r)}{dr}\right)^2\right\rangle = 2\lim_{r\to 0}\frac{\psi(0)-\psi(r)}{r^2}, \tag{2}$$

można wykazać, że gaussowska postać funkcji korelacji niejednorodności odpowiada ciągłym (przestrzennie) zmianom współczynnika załamania ośrodka. Jeśli zmiany współczynnika załamania ośrodka są nieciągłe, to używana jest funkcja korelacji niejednorodności w postaci:

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \langle\varepsilon^2\rangle \exp\left[-|\vec{r}_1-\vec{r}_2|/a\right]. \tag{3}$$

W przypadku ośrodków w pobliżu stanu krytycznego, np. mieszanin krytycznych [17] funkcja korelacji fluktuacji koncentracji cząsteczek opisana jest wzorem Ornsteina-Zernike:

$$\psi(r) = \frac{A}{r}\exp(-r/a), \tag{4}$$

gdzie $A = k_B T\beta_T/(4\pi a)^2$, k_B oznacza stałą Boltzmanna, a β_T jest izotermicznym współczynnikiem ściśliwości cieczy. Jeśli niejednorodności ośrodka wywołane są przez turbulencje, to funkcja korelacji fluktuacji współczynnika załamania ośrodka opisana jest wzorem von Karmana [9,18] :

$$\psi(r) = \frac{\langle\varepsilon^2\rangle}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{r}{a}\right), \tag{5}$$

gdzie $K_{\nu}\left(\frac{r}{a}\right)$ jest funkcją McDonalda [19] , $\Gamma(\nu)$ oznacza funkcję gamma Eulera [19] , a ν jest liczbą.

3. WSPÓŁCZYNNIK ROZPRASZANIA POLA AKUSTYCZNEGO W OŚRODKACH PRZYPADKOWO NIEJEDNORODNYCH

Tradycyjną metodą wyznaczania współczynnika rozpraszania średniego pola akustycznego w ośrodku przypadkowo niejednorodnym jest metoda małych zabu-

rzeń i korzystanie z przybliżenia Borna [10] .Zakres stosowalności tej metody ograniczony jest wymaganiem małych fluktuacji amplitudy i fazy fali na rozpatrywanej odległości przebiegu fali.W przypadku ośrodków izotropowych metoda małych zaburzeń daje następujące równanie na wyliczanie współczynnika rozpraszania :

$$\gamma = 2k^2\langle\mu^2\rangle\int_0^\infty (1-\cos(2kr))N(r)\,dr\,, \tag{6}$$

gdzie $N(r) = \frac{\langle\mu(0)\mu(r)\rangle}{\langle\mu^2\rangle}$,nawiasy < > oznaczają średnią,a współczynnik załamania ośrodka został przedstawiony w postaci: $n = 1+\mu$.

3.1. Metoda równania parabolicznego

W przybliżeniu małych długości fali $ka > 1$,równanie falowe może być zapisane w postaci [14] :

$$\nabla p - \frac{(1+\mu)^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0\,, \tag{7}$$

gdzie c_0 oznacza prędkość fazową fali w przypadku $\mu = 0$ .Przedstawiając amplitudę fali w postaci: $A = A_0 + \Delta A$,przy czym $\langle A\rangle = A_0 e^{-\alpha x}$,gdzie $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$,dla fali monochromatycznej $p = A(x,y,z)e^{i(\omega t - kx)}$,przy założeniu $\alpha \ll k$, $\mu^2 \ll 1$, $ka \gg 1$,równanie (7) może być zredukowane do postaci parabolicznej:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2k^2\mu A = 0\,. \tag{8}$$

Stosując metodę kolejnych przybliżeń,otrzymuje się w pierwszym przybliżeniu następujące równanie na współczynnik tłumienia natężenia fali:

$$\gamma = 2\langle\mu^2\rangle k^2\int_0^\infty N(r)\,dr\,. \tag{9}$$

3.2. Metoda funkcji Greena

Można za jej pomocą rozpatrywać wielokrotne rozpraszanie fal w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych [11,12] .Korzystając z tzw.swobodnej funkcji Greena:

$$G_0(\vec{r},\vec{r}_0) = -\frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}\,, \tag{10}$$

spełniającej równanie: $\nabla^2 G_0(\vec{r},\vec{r}_0) + k^2 G_0(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ (11)

gdzie r oznacza położenie punktu obserwacji, a r_0 - położenie źródła fali, można napisać następujące równanie całkowe [1] dla funkcji Greena :

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = G_0(\vec{r},\vec{r}_0) - k^2\int G_0(\vec{r},\vec{r}_1)\varepsilon(\vec{r}_1)G(\vec{r}_1,\vec{r}_0)\,d^3\vec{r}_1\,, \tag{12}$$

przy czym $\varepsilon(r)$ oznacza fluktuującą część kwadratu współczynnika załamania ośrodka, jak to zostało określone wcześniej. Rozwiązując równanie (12) metodą iteracji i uśredniając, otrzymujemy równanie Dysona [11] dla średniego pola akustycznego w ośrodku przypadkowo niejednorodnym:

$$\langle G(\vec{r},\vec{r}_0)\rangle = G_0(\vec{r},\vec{r}_0) + \iint G_0(\vec{r},\vec{r}_1)Q(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\langle G(\vec{r}_2,\vec{r}_0)\rangle\, d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_2\,, \tag{13}$$

gdzie $Q(r_1,r_2)$ oznacza operator efektywnej liczby falowej (zwany też operatorem masowym) ,będący sumą następującego szeregu [12] :

$$Q(\vec{r}',\vec{r}'') = k^4 G_0(\vec{r}',\vec{r}'')\psi(\vec{r}',\vec{r}'') + k^8\iint G_0(\vec{r}',\vec{r}_1)G_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)G_0(\vec{r}_2,\vec{r}'')\psi(\vec{r}_1,\vec{r}'')\psi(\vec{r}',\vec{r}_2)\,d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_2 +$$

$$+ k^8\iint G_0(\vec{r}',\vec{r}_1)G_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)G_0(\vec{r}_2,\vec{r}'')\psi(\vec{r}',\vec{r}'')\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_2 + \ldots \tag{14}$$

Dla ośrodków izotropowych rozwiązanie równania Dysona ma postać [2] :

$$\langle G(R)\rangle = \frac{1}{4\pi^2 i R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varkappa e^{i\varkappa R}}{k^2-\varkappa^2-\frac{4\pi}{\varkappa}\int_0^\infty Q(r)\sin(\varkappa r)r\,dr + i0}\,d\varkappa\,, \tag{15}$$

gdzie $i0$ oznacza nieskończenie małą urojoną liczbę reprezentującą absorpcję fali, które przyjmujemy jako pomijalnie małe. Bieguny wyrażenia podcałkowego we wzorze (15) określają efektywną zespoloną liczbę falową. Zależy ona od operatora masowego $Q(r)$ i w tzw. przybliżeniu Bourreta [11] aproksymującym szereg (14) jego piewszym wyrazem, tj. $Q(\vec{r}',\vec{r}'') = k^4 G_0(\vec{r}',\vec{r}'')\psi(\vec{r}',\vec{r}'')$ zespolona efektywna liczba falowa śreniego pola akustycznego wyraża się wzorem:

$$k_{ef} = k\left[1 + \frac{\pi k}{4}\int_c^\infty \varkappa \ln\left(\frac{2k+\varkappa}{2k-\varkappa}\right)\Phi(\varkappa)\,d\varkappa + \frac{i\pi^2 k}{2}\int_0^{2k}\Phi(\varkappa)\varkappa\,d\varkappa\right. . \tag{16}$$

Urojona część wyrażenia (16) daje współczynnik tłumienia średniego pola akustycznego (tłumienie wywołane jest rozpraszaniem fal) :

$$\gamma = \pi^2 k^2\int_0^{2k}\Phi(\varkappa)\varkappa\,d\varkappa\,, \tag{17}$$

gdzie $\Phi(\varkappa)$ jest transformatą Fouriera funkcji korelacji $\psi(r)$,która może być przedstawiona w postaci: $\Phi(k) = \frac{1}{2\pi^2 k}\int_0^\infty \sin(kr)\psi(r)r\,dr$, (18)

jeśli wprowadzić układ współrzędnych sferycznych i wykonać całkowanie po kątach.

3.3. Porównanie tłumienia średniego pola akustycznego w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych dla różnych postaci funkcji korelacji niejednorodności

a) metoda małych zaburzeń ($\frac{\Delta A}{A} \ll 1$, $\Delta\phi \ll 1$, $\frac{\Delta c}{c} \ll 1$)

$\psi(r)$ dane wzorem (1) $\gamma = \sqrt{\pi}\,\langle\mu^2\rangle k^2 a\left[1-\exp(-k^2a^2)\right]$

$\psi(r)$ dane wzorem (3) $\gamma = \frac{8\langle\mu^2\rangle k^4 a^3}{1+4k^2a^2}$

$\psi(r)$ dane wzorem (4) $\gamma = \langle\mu^2\rangle a k^2 \ln(1+4k^2a^2)$

b) metoda równania parabolicznego ($ka \gg 1$, $\gamma \ll 2k$, $\mu^2 \ll 1$)

$\psi(r)$ dane wzorem (1) $\gamma = \sqrt{\pi}\,\langle\mu^2\rangle k^2 a$

$\psi(r)$ dane wzorem (3) $\gamma = 8\langle\mu^2\rangle k^2 a$

c) metoda funkcji Greena (w przybliżeniu Bourreta)

$\psi(r)$ dane wzorem (1) $\gamma = \sqrt{\pi}\,\langle\mu^2\rangle k^2 a\left[1-\exp(-k^2a^2)\right]$

$\psi(r)$ dane wzorem (3) $\gamma = \frac{8\langle\mu^2\rangle k^4 a^3}{1+4k^2a^2}$

$\psi(r)$ dane wzorem (4) $\gamma = \langle\mu^2\rangle a k^2 \ln(1+4k^2a^2)$

$\psi(r)$ dane wzorem (5) $\gamma = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\langle\mu^2\rangle k^2 a}{(2\nu+1)\Gamma(\nu)}\left[1-\frac{1}{(1+4k^2a^2)^{\nu+3/2}}\right]$

4. WNIOSKI

Metoda małych zaburzeń wyznaczania współczynnika rozpraszania fal akustycznych w ośrodkach przypadkowo niejednorodnych daje wyniki identyczne z uzyskiwanymi metodą funkcji Greena, jeśli ograniczać się do przybliżenia Bourreta w obliczaniu efektywnej zespolonej liczby falowej. Dla niejednorodności małych w porównaniu z długością fali (tj. $ka \ll 1$) $\gamma \sim k^4a^3$, natomiast w przypadku $ka \gg 1$, $\gamma \sim k^2 a$. W przypadku gaussowskiej postaci funkcji korelacji niejednorodności współczynnik rozpraszania jest około 4.5 raza mniejszy niż dla $\psi(r)$ danej wzorem (3). Znając zależność współczynnika tłumienia fal od częstotliwości, można wyznaczyć dyspersję prędkości fal korzystając z lokalnych związków Kramersa-Kroniga [20] . W przypadku małych częstotliwości (tj. dla $ka \ll 1$) $c(\omega)-c(\omega_0) \sim \omega^3-\omega_0^3$. Natomiast dla częstotliwości wysokich (tj. gdy $ka \gg 1$) $c(\omega)-c(\omega_0) \sim \omega-\omega_0$.

LITERATURA

[1] TATARSKI W.I. : Rasprostranenije wołn w turbulentnoj atmosfierie. Nauka, Moskwa 1967.

[2] RYTOW S.M.,KRAWCOW J.A.,TATARSKI W.I.: Wwiedienije w statisticzeskuju radiofiziku.Nauka,Moskwa 1978.

[3] ISHIMARU A. : Rasprostranenije i rassiejanije wołn w słuczajno neodnorodnych sredach.Mir,Moskwa 1981.

[4] Proc.Summer School "Chance and Matter",Les Houches 1986.Eds.SOULETIE J.et al.,Elsevier Science Publishers,Amsterdam 1987.

[5] REYNOLDS W.N.,SMITH R.L. : Ultrasonic wave attenuation spectra in steels.J.Phys.D 17,109 (1984).

[6] CHIVERS R.C. : Tissue characterization.Ultrasound Med.Biol. 7,1 (1981).

[7] Proc.Inst.Acoust. : Fluctuation Phenomena in Underwater Acoustics 8,Pt 5 (1986).

[8] FLATTÉ S.M. : Sound Transmission through a Fluctuating Ocean.Cambridge University Press,Cambridge 1979.

[9] USCINSKI B.J. : The Elements of Wave Propagation in Random Media. McGraw-Hill,New York 1977.

[10] CZERNOW L.A. : Wołny w słuczajno nieodnorodnych sriedach. Nauka, Moskwa 1975.

[11] FRISCH U. : Wave Propagation in Random Media.Probabilistic Methods in Applied Mathematics.Academic Press,New York 1968,vol.1.

[12] SOCZKIEWICZ E. : Application of methods of quantum field theory in investigation of acoustic waves propagation in random media.CSIO Communications (India) 9,76 (1982).

[13] APRESJAN L.A.,KRAWCOW J.A. : Tieorija pierienosa izłuczenija.Nauka, Moskwa 1983.

[14] SOCZKIEWICZ E.,CHIVERS R.C. : Propagation of acoustic waves in random media using the parabolic equation and Green s function methods. Acustica 65,149 (1988).

[15] CHIVERS R.C. : Phase and amplitude fluctuations in propagation of acoustic waves in lossless inhomogeneous continua with velocity and bulk modulus variations.I.F.T.R.Report 41-78,Warsaw 1978

[16] SORNETTE D. : Waves in random media.Acustica 67,199 (1988).

[17] SOCZKIEWICZ E. : Scattering of ultrasonic waves in binary liquids near the critical mixing point.Proc.Third School on Acoustooptics. University of Gdańsk 1986,p.197.

[18] SOCZKIEWICZ E.,CHIVERS R.C. : Scattering of ultrasonic waves by turbulence.Acustica 68,33 (1989).

[19] JANKE E.,EMDE F.,LÖSCH F. : Specjalnyje funkcji.Nauka,Moskwa 1977.

[20] O'DONNELL M.,JAYNES E.T.,MILLER J.G. : Kramers-Kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity.J.Acoust.Soc.Am. 69,696 (1981).

Recenzent: Doc. dr hab. Stefan Ernst

ПРОПАГАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛУЧАЙНО- НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ - СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Резюме

Были определены коэффициенты рассеяния акустических волн в случайно - неоднородных средах для разных видов функции корреляции неоднородностей.Были сравнены результаты полученные методами малых возмущений,параболического уравнения и методом функции Грина.

PROPAGATION OF ACOUSTIC WAVES IN RANDOM MEDIA - A COMPARISON OF METHODS AND RESULTS

Summary

Scattering coefficients of acoustic waves in random media have been calculated for various forms of the medium inhomogeneities correlation function.The results obtained by the methods of small perturbations, the parabolic equation and Green's function have been discussed.

Praca była finansowana przez PAN, C.P.B.P. 02.03.