

Henryk GLIŃSKI

## O PEWNYM ODWZOROWANIU POWIERZCHNI WALCA OBROTOWEGO NA PŁASZCZYZNĘ

**Streszczenie.** W pracy zostało omówione pewne odwzorowanie powierzchni walca obrotowego na płaszczyznę. Konstrukcję tego odwzorowania, zwanego dalej rzutem refleksyjnym, oparto na zjawisku odbicia promieni świetlnych od zwierciadła walcowego.

Rzutem refleksyjnym dowolnego punktu powierzchni walca jest punkt rzutni  $\pi$ , w którym promień świetlny wychodzący ze środka światła  $S$  i odbity od powierzchni walca w punkcie  $A$  przebija rzutnię  $\pi$ .

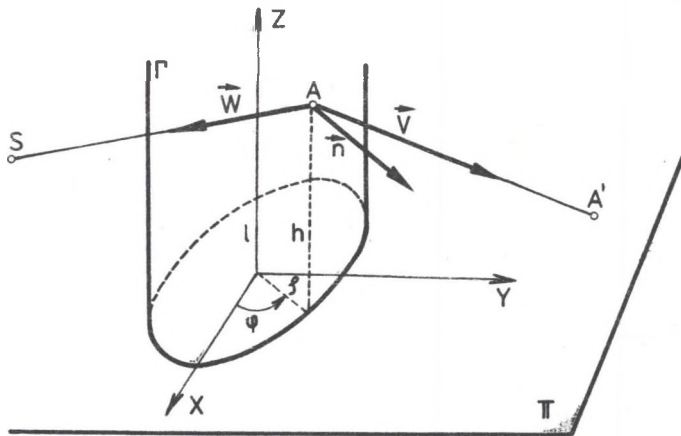
W pracy podano podstawowe równania rzutu refleksyjnego. Wykazano, że obrazem tworzącej walca jest prosta. Rzutem dowolnej elipsy walca jest krzywa rzędu szóstego, rzutem okręgu krzywa złożona z krzywej rzędu czwartego (ślimaka Pascala) i dwóch punktów cyklicznych rzutowanego okręgu. Rozważono również przypadek, w którym źródło światła znajduje się w punkcie niewłaściwym, tj. promienie tworzą pęk prostych równoległych.

Wykreślny sposób konstruowania rzutu refleksyjnego został przedstawiony przez A. Zdziarskiego na Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej Geometrii Rzutowej i Wykreślnej w Kielcach w 1979 r. Niniejsza praca zawiera rozszerzenie i uogólnienie wyników podanych w pracach [1], [2] i [3].

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$  uzupełnionej elementami niewłaściwymi niech będzie dany walec obrotowy  $\Gamma$  o średnicy  $2R$  i osi prostopadłej do płaszczyzny rzutni  $\pi$  oraz punkt  $S, S \in \Gamma$ , zwany środkiem rzutu. Na powierzchni walca obierzmy dowolny punkt  $A$  i poprowadźmy przez punkty  $A$  i  $S$  prostą  $p$ , zwaną dalej promieniem padającym (rys. 1). Zgodnie z prawem odbicia w zwierciadle promieniowi padającemu będzie odpowiadał promień odbity  $p'$ , leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez promień padający  $p$  i normalną  $n$  do powierzchni walca  $\Gamma$  w punkcie  $A$  oraz tworzący z tą normalną kąt odbicia równy kątowi padania, jaki tworzy z normalną promień padający  $p$ . Promieniem odbitym nazywać będziemy prostą  $p'$ , a więc wraz z przedłużeniem rzeczywiście istniejącego promienia odbitego.

## D e f i n i c j a 1

Rzutem refleksyjnym punktu  $A \in \Gamma$  nazywamy punkt  $A' = p' \cap \pi$ , tj. punkt przecięcia rzutni  $\pi$  promieniem odbitym od powierzchni walca  $\Gamma$  w punkcie  $A$ . Rzut refleksyjny określony jest dla wszystkich punktów powierzchni walca z wyjątkiem punktu niewłaściwego  $L^\infty$ , przez który przechodzi oś walca  $l$  - normalna w tym punkcie powierzchni walca nie jest określona.



Rys. 1

Fig. 1

W celu zbadania własności rzutu refleksyjnego wprowadźmy w przestrzeni  $E^3$  prostokątny układ współrzędnych XYZ tak, aby osie X i Y leżały na płaszczyźnie rzutni  $\Pi$ , oś Z pokrywała się z osią walca l, a punkt S leżał na płaszczyźnie XZ. Będziemy również używali walcowego układu współrzędnych  $\varphi, \psi, h$ .

Wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 1):

$S(L, 0, H)$  - współrzędne punktu S (właściwego),  $L > 0, H > 0$ ,

$\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$  - współrzędne wektora kierunkowego promienia padającego p,

$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  - współrzędne wektora kierunkowego promienia odbitego p',

$\vec{n} = [n_1, n_2, n_3]$  - współrzędne wektora normalnego do powierzchni walca  $\Gamma$  w punkcie A.

#### T w i e r d z e n i e 1

Rzutem refleksyjnym punktu  $A \in \Gamma$  o współrzędnych walcowych  $(R, \varphi, h)$ ,  $h \neq H$  jest punkt  $A' \in \Pi$  o współrzędnych:

$$x' = \frac{Lh}{H-h} \cos 2\varphi + R \left(1 - \frac{h}{H-h}\right) \cos \varphi,$$

$$y' = \frac{Lh}{H-h} \sin 2\varphi + R \left(1 - \frac{h}{H-h}\right) \sin \varphi$$

(1)

## D o w ó d

Wyznaczmy współrzędne wektora kierunkowego  $\vec{v}$  promienia odbitego  $p'$ . Ponieważ jego długość może być dowolna, przyjmijmy ją równą długości wektora  $\vec{w}$ . Wektory  $\vec{w}$  i  $\vec{v}$  są bokami rombu, którego jedną z przekątnych jest wektor  $\vec{w} + \vec{v}$  (rys. 1).

Wektor  $\vec{w} + \vec{v}$  winien być współliniowy z wektorem normalnym  $\vec{n}$ , wektor  $\vec{v}$  musi więc spełniać równanie wektorowe:

$$(\vec{w} + \vec{v}) \times \vec{n} = \vec{0}. \quad (2)$$

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym, wektor  $\vec{w}$  musi więc spełniać także równanie:

$$(\vec{w} - \vec{v}) \circ \vec{n} = 0. \quad (3)$$

Łącząc równania (2) i (3) otrzymujemy układ równań umożliwiającą obliczenie współrzędnych  $v_1, v_2$  i  $v_3$  wektora  $\vec{v}$ .

Wektor normalny  $\vec{n}$  do powierzchni walca  $\Gamma$  w punkcie  $A(R, \varphi, h)$  ma współrzędne  $[\cos\varphi, \sin\varphi, 0]$ , równania (2) i (3) można więc zapisać w postaci skalarnej:

$$\begin{aligned} (w_3 + v_3)\sin\varphi &= 0, \\ (w_3 + v_3)\cos\varphi &= 0, \\ (w_1 + v_1)\sin\varphi - (w_2 + v_2)\cos\varphi &= 0, \\ (w_1 - v_1)\cos\varphi + (w_2 - v_2)\sin\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Po rozwiązaniu układu (4) względem niewiadomych  $v_1, v_2$  i  $v_3$  otrzymujemy współrzędne wektora  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1\cos 2\varphi + w_2\sin 2\varphi, \\ v_2 &= w_1\sin 2\varphi - w_2\cos 2\varphi, \\ v_3 &= -w_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Promień odbity  $p'$  jest prostą przechodzącą przez punkt  $A$  o współrzędnych  $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, h)$ . Znając jej wektor kierunkowy można wyznaczyć równania parametryczne promienia odbitego:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi + t(w_1\cos 2\varphi + w_2\sin 2\varphi), \\ y &= R\sin\varphi + t(w_1\sin 2\varphi - w_2\cos 2\varphi), \\ z &= h - tw_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Promień odbity przebiega płaszczyznę  $XY$  (czyli rzutnię  $\pi$ ) w punkcie:

$$\begin{aligned}x' &= R \cos \varphi + \frac{h}{w_3} (w_1 \cos 2\varphi + w_2 \sin 2\varphi), \\y' &= R \sin \varphi + \frac{h}{w_3} (w_1 \sin 2\varphi + w_2 \cos 2\varphi).\end{aligned}\quad (7)$$

Jako współrzędne wektora  $\vec{w}$  przyjmijmy współrzędne wektora  $\vec{AS} = [L - R \cos \varphi, -R \sin \varphi, H - h]$ . Podstawiając je do (7) otrzymujemy po uwzględnieniu związków trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{Lh}{H-h} \cos 2\varphi + R \left(1 - \frac{h}{H-h}\right) \cos \varphi, \\y' &= \frac{Lh}{H-h} \sin 2\varphi + R \left(1 - \frac{h}{H-h}\right) \sin \varphi,\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie  $h \neq H$ .

#### Twierdzenie 2

Obrazem refleksyjnym dowolnej tworzącej walca o współrzędnych biegunowych  $\varphi = \varphi_0$  jest prosta określona równaniami parametrycznymi:

$$\begin{aligned}x' &= R \cos \varphi_0 + t(L \cos 2\varphi_0 - R \cos \varphi_0), \\y' &= R \sin \varphi_0 + t(L \sin 2\varphi_0 - R \sin \varphi_0).\end{aligned}\quad (9)$$

#### Dowód

Równania parametryczne (9) otrzymujemy z równań (8), podstawiając  $\frac{h}{H-h} = t$ . Jeżeli  $h \rightarrow H$ , to  $t \rightarrow \infty$ , a więc obrazem punktu  $h = H$  tworzącej jest punkt niewłaściwy prostej (9). Jeśli  $h \rightarrow \infty$ , to  $t \rightarrow -1$  i obrazem punktu niewłaściwego tworzącej jest punkt właściwy prostej (9). Obrazem każdego punktu tworzącej jest więc dokładnie jeden punkt prostej (9).

Podstawmy w równaniach (1)  $\cos \varphi = \frac{x}{R}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{R}$ ,  $h = z$ :

$$\begin{aligned}x' &= \frac{Lz}{H-z} \left(2 \frac{x^2}{R^2} - 1\right) + \frac{H-z}{H-z} x, \\y' &= 2 \frac{Lz}{H-z} \frac{xy}{R^2} + \frac{H-z}{H-z} y.\end{aligned}\quad (10)$$

Na płaszczyźnie rzutni  $\pi$  wprowadźmy współrzędne jednorodne  $x_1, x_2$  i  $x_3$ , gdzie:

$$x' = \frac{x_1}{x_3}, \quad y' = \frac{x_2}{x_3}.$$

Układ (10) otrzyma wtedy postać:

$$\begin{aligned} x_1 &= Lz \left( 2 \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) + (H - 2z)x, \\ x_2 &= 2Lz \frac{xy}{R^2} + (H - 2z)y, \\ x_3 &= H - z. \end{aligned} \quad (11)$$

W równaniach (11)  $x, y$  i  $z$  są współrzędnymi punktu leżącego na powierzchni walca, a więc  $x^2 + y^2 = R^2$ .

### T w i e r d z e n i e 3

Obrazem dowolnej elipsy leżącej na powierzchni walca  $\Gamma$  jest krzywa rzędu szóstego.

### D o w ó d

Obierzmy na powierzchni walca elipsę o równaniu:

$$z = Ax + By + C, \quad x^2 + y^2 = R^2. \quad (12)$$

Podstawiając równanie (12) do równań (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= L(Ax + By + C) \left( 2 \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) + (H - 2Ax - 2By - 2C)x \\ x_2 &= 2L(Ax + By + C) \frac{xy}{R^2} + (H - 2Ax - 2By - 2C)y, \\ x_3 &= H - Ax - By + C, \\ x^2 + y^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Równania (13) są parametrycznym przedstawieniem krzywej płaskiej (parametrem jest  $x$  lub  $y$ ), będącej rzutem refleksyjnym elipsy  $z = Ax + By + C$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$  na rzutnię  $\pi$ .

Zbadajmy rząd tej krzywej. Wystarczy w tym celu określić liczbę jej punktów przecięcia z prostą:

$$Kx_1 + Mx_2 + Nx_3 = 0. \quad (14)$$

Podstawiając równania (13) do równania (14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} K \left[ L(Ax + By + C) \left( 2 \frac{x^2}{R^2} - 1 \right) + (H - 2Ax - 2By - 2C)x \right] + \\ + M \left[ 2L(Ax + By + C) \frac{xy}{R^2} + (H - 2Ax - 2By - 2C)y \right] + \\ + N(H - Ax - By - C) = 0, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Równanie pierwsze w układzie (15) jest rzędu trzeciego, drugie równanie jest rzędu drugiego, układ (15) posiada więc dokładnie sześć rozwiązań (w ciele liczb zespolonych).

Krzywa płaska określona równaniami parametrycznymi (13) jest krzywą rzędu szóstego.

Rzutem refleksyjnym okręgu będącego szczególnym przypadkiem elipsy jest krzywa rzędu szóstego, złożona z krzywej rzędu czwartego - krzywej Pascala (ślimaka Pascala) i dwóch punktów cyklicznych okręgu. Dla dowodu tego stwierdzenia wystarczy podstawić równanie okręgu leżącego na walcu  $\varphi = R$ ,  $h = C$  do układu (1):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{LC}{H-C} \cos 2\varphi + R \left( 1 - \frac{C}{H-C} \right) \cos \varphi, \\ y' &= \frac{LC}{H-C} \sin 2\varphi + R \left( 1 - \frac{C}{H-C} \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Uwzględniając tożsamości trygonometryczne otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x' + \frac{LC}{H-C} &= \frac{2LC}{H-C} \cos^2 \varphi + R \left( 1 - \frac{C}{H-C} \right) \cos \varphi, \\ y' + \frac{2LC}{H-C} \sin \varphi \cos \varphi &+ R \left( 1 - \frac{C}{H-C} \right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Podstawiając w równaniach (17)  $\frac{2LC}{H-C} = a$ ,  $R(1 - \frac{C}{H-C}) = l$ , otrzymujemy:

$$x' + \frac{a}{2} = a \cos^2 \varphi + l \cos \varphi,$$

$$y' = a \sin \cos \varphi + l \sin \varphi.$$

Jest to równanie konchoidy okręgu (krzywej rzędu czwartego, zwanej ślimakiem Pascala) o środku w początku układu współrzędnych i średnicy

$$a = \frac{2LC}{H-C}.$$

Punkty cykliczne okręgu (dwa punkty urojone sprzężone niewłaściwe) są punktami wspólnymi okręgu z płaszczyzną rzutni  $\pi$ , a więc ich rzuty refleksyjne jednoczą się z nimi. Punkty te nie są punktami krzywej Pascala i należy je do niej dołączyć. Otrzymamy krzywą rzędu szóstego.

W przypadku szczególnym, gdy  $h = H/2$ , obrazem okręgu jest dwukrotnie liczony okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu równym  $L$ .

Założmy, że środek rzutu  $S$  jest punktem niewłaściwym i określony jest kierunkiem wektora  $\vec{s}$  o współrzędnych  $|s_1, 0, s_3|$ . Podstawiając je do równań (7) jako współrzędne  $|w_1, w_2, w_3|$  wektora  $\vec{w}$  otrzymujemy:

$$x' = \frac{s_1}{s_3} h \cos 2\varphi + R \cos \varphi, \quad (18)$$

$$y' = \frac{s_1}{s_3} h \sin 2\varphi + R \sin \varphi.$$

Jeżeli przez  $m$  oznaczymy stosunek  $\frac{s_3}{s_1}$ , czyli tangens kąta nachylenia wektora  $\vec{s}$  do płaszczyzny  $XY$ , to równania (18) przyjmą postać:

$$x' = \frac{h}{m} \cos 2\varphi + R \cos \varphi,$$

$$y' = \frac{h}{m} \sin 2\varphi + R \sin \varphi,$$

gdzie  $\varphi, h$  są współrzędnymi walcowymi punktu powierzchni walca. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3 łatwo wykazać, że również dla niewłaściwego środka rzutu obrazem elipsy jest krzywa rzędu szóstego.

#### LITERATURA

- [1] Zdziarski A.: Podstawy powstawania rzutu anaformiczno-refleksyjno-walcowego. Biuletyn Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej Geometrii Rzutowej i Wykreślonej, Kielce 1979.

- [2] Czernikow B.I.: Ob odnom sposobie postrojenija otrazhenij. Prikładnaja geometrija i inženiersnaja grafika. Wypusk 25, Kijew 1978.
- [3] Podgornyj A.L., Snisarenko N.I.: O množestwach otrazennykh kuzcej pri toczecznom i liniejnem oswieszczenii. Prikładnaja geometrija i inženiersnaja grafika. Wypusk 8, Kijew 1969.

Recenzent: Doc. dr inż. Stanisław Ochoński

Wpłynęło do Redakcji 07.03.1987 r.

## ОБ ОДНОЙ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ПЛОСКОСТЬ

### Р е з ю м е

В работе представлено некоторое отображение поверхности кругового цилиндра в плоскость. Конструкция этого отображения называемого далее отражённой проекцией, основана на явлении отражения лучей света от цилиндрического зеркала. Проекцией произвольной точки поверхности цилиндра есть точка плоскости проекции, в которой световой луч выходящий с источника света  $S$  и отражённый от поверхности цилиндра в точке  $A$  пробивает плоскость проекции. В работе представлены основные уравнения отражённой проекции. Доказывается, что проекцией образующей цилиндра есть прямая. Проекцией произвольного эллипса, будущего плоским сечением цилиндра, есть кривая шестого порядка, проекцией окружности есть кривая четвёртого порядка улитка Паскаля и — циклические точки проектируемой окружности. Рассмотрено тоже случай, в котором источник света находится в несобственной точке, то есть падающие луча образуют пучок параллельных прямых.

## ON A CERTAIN MAPPING OF THE SURFACE OF A CYLINDER OF REVOLUTION ONTO A PLANES

### S u m m a r y

The paper discusses a certain mapping of the surface of a cylinder onto a plane. The construction of this mapping further called a reflective projection, is based on the phenomenon of the reflection of light rays from a cylinder mirror. By the reflective projection of an arbitrary point of a cylinder is meant the point of a projection plane  $\pi$  in which a light ray coming out of a light source  $S$  and reflected from the surface of a cylinder in point  $A$  penetrates through the projection plane. The paper gives fundamental equations of a reflective projection. It was proved that a straight line is the image of the generating line of a cylinder. A curve of the sixth order is the projection of a cylinder. A cur-



ve of the sixth order is the projection of an arbitrary ellipse of a cylinder. The projection of a circle is also a curve of the sixth order composed of a curve of the fourth order (limaçon of Pascal) and two cyclic points of a projected circle. Also a case was considered in which a light source is in a wrong point i.e. the falling rays from a pencil of straight, parallel lines.