ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Anna LASKOWSKA

WARIACJE MIESZANE RZĘDU DRUGIEGO WZGLĘDEM FUNKCJI Φ_1 i Φ_2, Z PARAMETRAMI

Streszczenie. W pracy została zdefiniowana i scharakteryzowana klasa $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$, złożona w funkcji dwóch zmiennych o ograniczonych wariacjach mieszanych rzędu drugiego względem funkcji Φ_1 i Φ_2 z parametrami. $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest uogólnieniem klasy V_φ, wprowadzonej przez S. Gniłkę w [2] dla funkcji jednej zmiennej oraz klasy $H^{(2)}_{\Phi(n)}$, wprowadzonej przez T.I. Achobadze w [1] dla funkcji n zmiennych bez parametrów.

Niech $\Phi_j(u,t)$ dla $j=1,2$ będą funkcjami określonymi na $R_+ xR$, nieujemnymi, niemalejącymi ze względu na u dla wszystkich t oraz spełniającymi warunek $\forall_t\ \Phi_j(u,t) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$. Niech f będzie funkcją określoną na R^2, rzeczywistą, 2π - okresową ze względu na każdą zmienną, mierzalną.

D e f i n i c j a 1

Wariacjami mieszanymi rzędu drugiego funkcji f względem funkcji Φ_1 i Φ_2 nazywamy wyrażenia postaci:

$$V^{(1)}_{\Phi_1}(f) = \sup_{a,y} \sup_{\Pi_a,\{\tau_k\}} \sum_{k=1}^{m} \Phi_1\left(\left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|,\ \tau_k\right), \tag{1}$$

$$V^{(2)}_{\Phi_2}(f) = \sup_{b,x} \sup_{\Pi_b,\{v_i\}} \sum_{i=1}^{n} \Phi_2\left(\left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}_y(f;\ x,y_{i-1},y_i)\right|,\ v_i\right), \tag{2}$$

$$V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f) = \sup_{a,b} \sup_{\Pi_{ab},\{\tau_k\},\{v_i\}} \sum_{i=1}^{n}$$

$$\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|\tau_k\right),\ v_i\Big), \tag{3}$$

gdzie Π_a, Π_b, Π_{ab} są dowolnymi skończonymi podziałami odpowiednio przedziałów $[a,a+2\pi]$, $[b,b+2\pi]$, $[a,a+2\pi]\times[b,b+2\pi]$, postaci $\Pi_a=\Pi[a,a+2\pi]=(a=x_0<x_1<\ldots<x_m=a+2\pi)$, $\Pi_b=\Pi[b,b+2\pi]=(b=y_0<y_1<\ldots<y_n=b+2\pi)$, $\Pi_{ab}=\Pi_a\times\Pi_b$, $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$ dla $k=1,2,\ldots,m$, $y_{i-1}\le v_i\le y_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$.

$$\Delta_x^{(2)}(f;\,x_{k-1},x_k,y) = f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(x_{k-1},y)\,,$$

$$\Delta_y^{(2)}(f;\,x,y_{i-1},y_i) = f(x,y_i) - 2f\left(x,\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,y_{i-1})\,,$$

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f;\,x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i) = f(x_k,y_i)-2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y_i\right)+f(x_{k-1},y_i) -$$

$$-2f\left(x_k,\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)-2f\left(x_{k-1},\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) +$$

$$+f(x_k,y_{i-1})-2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y_{i-1}\right)+f(x_{k-1},y_{i-1}).$$

D e f i n i c j a 2

Funkcja $\Phi(u,t)$ spełnia warunek (Δ_2), jeśli $\underset{\bar{u}>0}{\exists}\ \underset{\varkappa>0}{\exists}\ \underset{0\le u\le\bar{u}}{\forall}\ \underset{t}{\forall}\ \Phi(2u,t)\le\varkappa\Phi(u,t)$.

D e f i n i c j a 3

Funkcja $\Phi(u,t)$ spełnia warunek (δ_2), jeśli

$$\underset{\tilde{u}>0}{\forall}\quad \underset{\varkappa(\tilde{u})>0}{\exists}\quad \underset{0\le u\le\tilde{u}}{\forall}\quad \underset{t}{\forall}\quad \Phi(2u,t)\le\varkappa(\tilde{u})\Phi(u,t).$$

D e f i n i c j a 4

Funkcja $\Phi(u,t)$ spełnia warunek (E), jeśli

$$\underset{\alpha,\beta>0}{\forall}\quad \sup_{t\in R}\frac{\Phi(\alpha,t)}{\Phi(\beta,t)}<\infty\,.$$

L e m a t 1

Jeśli $\Phi(u,t)$ spełnia założenia jak $\Phi_j(u,t)$ i warunek (E), to warunki (Δ_2) i (δ_2) są równoważne. Przytoczony lemat jest zamieszczony i udowodniony w [3] (lemat 3.3).

Własności wariacji

1. Jeśli Φ_j (j=1,2) spełniają warunek (Δ_2) ze stałymi odpowiednio $\varkappa_j$ (j=1,2) i warunek (E) oraz $\underset{x,y}{\forall} |f(x,y)| \leqslant M$, c jest stałą, a $N \geqslant 0$ najmniejszą z liczb całkowitych taka, że spełniony jest warunek $|c| \leqslant 2^N$, to

a) $v^{(j)}_{\Phi_j}(cf) \leqslant \left[\varkappa_j(2^N M)\right]^N v^{(j)}_{\Phi_j}(f)$ dla j=1,2,

b) $v^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(cf) \leqslant \left[\varkappa_2(2^{L51}(\varkappa_1(3M))^3 v^{(1)}_{\Phi_1}(f))\right]^L v^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)$,

gdzie $L \geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych taka, że $\left[\varkappa_1(2^{N+1}M)\right]^N \leqslant 2^L$.

W dowodzie a) korzystamy z nierówności:

$$\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(cf;\ x_{k-1},x_k,y)\right|,\ \tau_k\right) = \Phi_1\left(|c|\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k\right) \leqslant\right.$$
$$\leqslant \left[\varkappa_1\left(2^{N-1}\sup\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|\right]^N \Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k\right), \tag{4}$$

gdzie $N \geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych taka, że $|c| \leqslant 2^N$, oraz z analogicznej dla Φ_2.

Dowód tych nierówności można przeprowadzić indukcyjnie przy założeniu warunków (Δ_2) i (E) dla Φ_j i j=1,2.

W dowodzie b) wykorzystujemy poniższą nierówność dla Φ spełniającej założenia jak Φ_j oraz warunki (Δ_2) i (E) (p. lemat 2.2.1a w [4]).

$$\Phi\left(\sum_{l=1}^{N} u_l, t\right) \leqslant \left[\varkappa((N-1)\tilde{u})\right]^{N-1} \sum_{l=1}^{N} \Phi(u_l, t) \tag{5}$$

dla wszystkich t oraz $0 < u_l \leqslant \tilde{u}$, l=1,2,...N. Otrzymujemy oszacowania:

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|,\tau_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} (\varkappa_1(3M))^3 \Big\{\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4} f(x_k,y_i) - 2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},y_i\right) + f(x_{k-1},y_i)\right|,\tau_k\right) + \tag{6}$$

$$+2\Phi_1\left(\tfrac{1}{4}\left|f\left(x_k, \tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2}, \tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+f\left(x_{k-1}, \tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)\right|, \tau_k\right)+$$

$$+\Phi_1\left(\tfrac{1}{4}\left|f(x_k,y_{i-1})-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2}, y_{i-1}\right)+f(x_{k-1},y_{i-1})\right|, \tau_k\right)\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant 4(\varkappa_1(3M))^3 v_{\Phi_1}^{(1)}\left(\tfrac{1}{2}f\right) \leqslant 4(\varkappa_1(3M))^3 v_{\Phi_1}^{(1)}(f), \tag{6}$$

$$\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f; x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right| \leqslant 4M. \tag{7}$$

Korzystając z (4), (6) i (7) mamy:

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(cf; x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|, \tau_k\right), v_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\left[\varkappa_1(2^{N-1}4M)\right]^N \sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f; x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|, \tau_k\right), v_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\varkappa_2(2^{L-1}4(\varkappa_1(3M))^3 v_{\Phi_1}^{(1)}(f)\right]^L v_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f),$$

gdzie $L \geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych spełniających nierówność $\left[\varkappa_1(2^{N+1}M)\right]^N \leqslant 2^L$.

2. Jeśli Φ_j (1=1,2) spełniają warunek (Δ_2) ze stałymi odpowiednio $\varkappa_j$ (j=1,2) i warunek (E)

oraz

$$\forall_{x,y} |f_l(x,y)| \leqslant M \quad \text{dla} \quad l=1,2,\dots,N,$$

to:

a) $v_{\Phi_j}^{(j)}\left(\sum_{l=1}^{N} f_l\right) \left[\varkappa_j((N-1)2M)\right]^{N-1} \sum_{l=1}^{N} v_{\Phi_j}^{(j)}(f_l)$ dla j=1,2,

b) $$V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}\Big(\sum_{l=1}^{N} f_l\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\varkappa_2\big((N-1)\big[\varkappa_1((N-1)4M)\big]^{N-1} 4(\varkappa_1(3M((^3 \sup_{1\leqslant l\leqslant N} V^{(1)}_{\Phi_1}(f_l))\Big\}^{N-1} \cdot$$

$$\cdot \Big\{\varkappa_2(2^{L+1}(\varkappa_1(3M))^3 \sup_{1\leqslant l\leqslant N} V^{(1)}_{\Phi_1}(f_l))\Big\}^{L} \sum_{l=1}^{N} V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f_l) ,$$

gdzie $L \geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych taka, że $\big[\varkappa_1((N-1)4M)\big]^{N-1} \leqslant 2^L$.

D o w ó d a)

Korzystając z nierówności (5) oraz nierówności

$$\Big|\tfrac{1}{2}\,\Delta^{(2)}_{x}(f_l;\ x_{k-1},x_k,y)\Big| \leqslant 2M$$

otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\Big(\Big|\tfrac{1}{2}\,\Delta^{(2)}_{x}\Big(\sum_{l=1}^{N} f_l;\ x_{k-1},x_k,y\Big)\Big|,\tau_k\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \big[\varkappa_1((N-1)2M)\big]^{N-1}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\Big(\Big|\tfrac{1}{2}\,\Delta^{(2)}_{x}(f_l;\ x_{k-1},x_k,y)\Big|,\tau_k\Big).$$

Podobnie dowodzi się a) dla $j=2$.

W dowodzie b) korzystamy z nierówności (4), (5), (6) i (7), otrzymując:

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\Big(\Big|\tfrac{1}{4}\,\Delta^{(2)}_{xy}\Big(\sum_{l=1}^{N} f_l;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i\Big)\Big|,\tau_k\Big),v_i\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\Phi_2\Big(\big[\varkappa_1((N-1)4M\big]^{N-1}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\Big(\Big|\tfrac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f_l;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\Big|,\tau_k\Big),v_i\Big) \leqslant$$

$$\left\{\varkappa_2((N-1)\left[\varkappa_1((N-1)4M)\right]^{N-1}4(\varkappa_1(3M))^3 \sup_{1\le l\le N} V_{\Phi_1}^{(1)}(f_l))\right\}^{N-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2(\left[\varkappa_1((N-1)4M)\right]^{N-1}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f_l;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|,\tau_k),\ v_i)\le$$

$$\le\left\{\varkappa_2((N-1)\left[\varkappa_1((N-1)4M)\right]^{N-1}4(\varkappa_1(3M))^3 \sup_{1\le l\le N} V_{\Phi_1}^{(1)}(f_l))\right\}^{N-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\varkappa_2(2^{L+1}(\varkappa_1(3M))^3 \sup_{1\le l\le N} V_{\Phi_1}^{(1)}(f_l))\right\}^{L}\sum_{l=1}^{N} V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f_l)\ ,$$

gdzie $L\geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych taka, że

$$\left[\varkappa_1((N-1)4M)\right]^{N-1}\le 2^L\ .$$

3. Jeśli Φ_j $(j=1,2)$ są funkcjami wypukłymi względem pierwszej zmiennej, to:

a) $V_{\Phi_j}^{(j)}(\sum_{l=1}^{N} f_l)\le\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}V_{\Phi_j}^{(j)}(Nf_l)$ dla $j=1,2$,

b) $V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}\sum_{l=1}^{N} f_l\le\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(Nf_l)$.

Dowód łatwo przeprowadza się indukcyjnie.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$V_{\Phi_1}^{(1)}(f;\alpha,\beta) = \sup_y \sup_{\Pi[\alpha,\beta],\{\tau_k\}}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\left|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k)\ ,$$

gdzie $\Pi_{[\alpha,\beta]} = (\alpha=x_o<x_1<\ldots<x_m=\beta)$, $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$ dla $k=1,2,\ldots,m$,

$$V_{\Phi_2}^{(2)}(f,\gamma,\delta) = \sup_x \sup_{\Pi[\gamma,\delta],\{v_i\}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2(\left|\tfrac{1}{2}\Delta_y^{(2)}(f;\ x,y_{i-1},y_i)\right|,v_i),$$

gdzie $\Pi[\gamma,\delta]=(\gamma=y_o<y_1<\ldots<y_n=\delta)$, $y_{i-1}\le v_i\le y_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$.

$$V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta) =$$

$$= \sup_{\Pi[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta],\{\tau_k\},\{v_i\}} \sum_{i=1}^{n}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\big(\big|\tfrac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,\tau_k\big),\ v_i\Big),$$

gdzie:

$$\Pi[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta] = \Pi[\alpha,\beta]\times\Pi[\gamma,\delta],\qquad x_{k-1}\le\tau_k\le x_k \quad \text{dla}\quad k=1,2,\dots,m,$$
$$y_{i-1}\le v_i\le y_i \quad \text{dla}\quad i=1,2,\dots,n.$$

Dla tak zdefiniowanych wariacji można sformułować własności analogiczne do własności 1-3.

4. Wariacje mieszane są funkcjami monotonicznymi przedziału, tzn. dla $\alpha\le\alpha_1<\beta_1\le\beta$ i $\gamma\le\gamma_1<\delta_1\le\delta$

a) $\sup\limits_a V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a+\alpha_1,a+\beta_1)\le\sup\limits_a V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a+\alpha,a+\beta)$,

b) $\sup\limits_b V^{(2)}_{\Phi_2}(f;b+\gamma_1,b+\delta_1)\le\sup\limits_b V^{(2)}_{\Phi_2}(f;b+\gamma,b+\delta)$,

c) $\sup\limits_{a,b} V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;a+\alpha_1,a+\beta_1,b+\gamma_1,b+\delta_1)\le$

$\le\sup\limits_{a,b} V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;a+\alpha,a+\beta,b+\gamma,b+\delta)$.

D o w ó d a)

Weźmy dowolne podziały:

$$\Pi[a+\alpha,a+\beta] = (a+\alpha = x_0<x_1<\dots<x_m = a+\beta)\ ,$$

$$\Pi[a+\alpha,a+\alpha_1] = (a+\ \ = \bar{x}_0<\bar{x}_1<\dots<\bar{x}_{m_1} = a+\alpha_1),$$

$$\Pi[a+\alpha_1,a+\beta_1] = (a+\alpha_1 = x'_0<x'_1<\dots<x'_{m_2} = a+\beta_1),$$

$$\Pi[a+\beta_1,a+\beta] = (a+\beta_1 = \tilde{x}_0<\tilde{x}_1<\dots<\tilde{x}_{m_3} = a+\beta)$$

oraz niech $x_{k-1} \leq \tau_k \leq x_k$ dla $k=1,2,\dots,m$,

$\bar{x}_{k-1} \leq \bar{\tau}_k \leq \bar{x}_k$ dla $k=1,2,\dots,m_1$, $x'_{k-1} \leq \tau'_k \leq x'_k$ dla $k=1,2,\dots,m_2$,

$\tilde{x}_{k-1} \leq \tilde{\tau}_k \leq \tilde{x}_k$ dla $k=1,2,\dots,m_3$.

Wtedy

$$\sup_a V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a+\alpha_1,a+\beta_1)=\sup_{a,y}\sup_{\pi[a+\alpha_1,a+\beta_1],\{\tau_k\}}\sum_{k=1}^{m_2}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x'_{k-1},x'_k,y)\right|,\tau_k\right) \leq$$

$$\leq \sup_{a,y}\sup_{\pi[a+\alpha_1,a+\beta_1],\{\tau_k\}}\left\{\sum_{k=1}^{m_1}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\bar{x}_{k-1},\bar{x}_k,y)\right|,\tau_k\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_2}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x'_{k-1},x'_k,y)\right|,\tau_k\right)+\sum_{k=1}^{m_3}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;\tilde{x}_{k-1},\tilde{x}_k,y)\right|,\tilde{\tau}_k\right)\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{a,y}\sup_{\pi[a+\alpha,a+\beta],\{\tau_k\}}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k\right) =$$

$$= \sup_a V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a+\alpha,a+\beta).$$

Dowody b) i c) przebiegają podobnie.

5. Dla k_j i l_j całkowitych i takich, że $l_j > k_j$ dla $j=1,2$, zachodzi:

a) $\sup_a V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a+k_1\pi,a+l_1\pi) \leq \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]-1\right)V^{(1)}_{\Phi_1}(f)$,

b) $\sup_b V^{(2)}_{\Phi_2}(f;b+k_2\pi,b+l_2\pi) \leq \left(2\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right]-1\right)V^{(2)}_{\Phi_2}(f)$,

c) przy założeniu, że Φ_j dla $j=1,2$ spełniają warunki (Δ_2), (E) i $\forall_{x,y}|f(x,y)| \leq M$

$$\sup_{a,b} V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;a+k_1\pi,a+l_1\pi,b+k_2\pi,b+l_2\pi) \leq$$

$$\leqslant (\varkappa_2((8\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1)(\varkappa_1(3M))^3\, V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}\, f)))\cdot$$

$$\cdot(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]-1)(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1)(2\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right] - 1)V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)},$$

gdzie symbol $[x]$ w powyższych nierównościach oznacza cechę x.

D o w ó d a)

Niech $[\alpha,\beta]$ będzie przedziałem na osi Ox, a $\Pi_{[\alpha,\beta]} = (\alpha = x_0 < x_1 \ldots \ldots < x_m = \beta)$ jego dowolnym podziałem. Ustalmy podział $\Pi_{1[\alpha,\beta]}(\alpha = t_0 < t_1 < \ldots \ldots < t_r = \beta)$ oraz utwórzmy uporządkowane podzbiory A_ν dla $\nu = 1,2,\ldots,r$ zbioru $\{0,1,\ldots,m\}$ w sposób następujący: $j_\nu, j_\nu+1,\ldots,j_\nu+m_\nu$ należą do A_ν, gdy $x_{j_\nu}, x_{j_\nu+1},\ldots,x_{j_\nu+m_\nu}$ należą do przedziału $[t_{\nu-1}, t_\nu$ i $m_\nu \geqslant 1$ oraz niech $a_\nu = \Phi$, jeśli $m_\nu = 0$ lub jeśli przedział $[t_{\nu-1}, t_\nu$ nie zawiera punktów podziału $\Pi_{[\alpha,\beta]}$.
Dalej, niech C będzie uporządkowanym podzbiorem zbioru $\{0,1,\ldots,m\}$ i takim, że dwie kolejne liczby m'_j+t-1, m'_j+t należą do C, jeśli przedział $(x_{m'_j+t-1}, x_{m'_j+t})$ zawiera co najmniej jeden punkt podziału $\Pi_{1[\alpha,\beta]}$. Ilość takich przedziałów jest nie większa niż $r-1$. Zapiszmy:

$C = \{m_1,m_1+1,\ldots,m_1+r_1,m_2+m_2+1,\ldots,m_2+r_2,\ldots,m_l,m_l+1,\ldots,m_l+r_l\}$, gdzie $r_1+r_2+\ldots+r_l \leqslant r-1$. Korzystając z własności 4a) mamy:

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y)|,\tau_k) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r}\ \sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu} \Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y)|,\tau_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},\ x_{m'_j+t},y,)|\tau_{m'_j+t}) \leqslant \sum_{\nu=1}^{r} V_{\Phi_1}^{(1)}(f;t_{\nu-1},t_\nu) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y)|,\tau_{m'_j+t}) ,$$

gdzie $x_{j-1} \leqslant \tau_j \leqslant x_j$, $x_{m'_j+t-1} \leqslant \tau_{m'_j+t} \leqslant x_{m'_j+t}$.

Z okresowości funkcji f względem x dla x_{k-1} i x_k takich, że $2\pi < x_k - x_{k-1}$, mamy istnienie takich d_{k-1} i d_k, dla których $0 < d_k - d_{k-1} \leq 2\pi$ oraz $\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y) = \Delta_x^{(2)}(f;d_{k-1},d_k,y)$. Podstawiając dla l_1-k_1 parzystego $r = \frac{1}{2}(l_1-k_1)$, $[\alpha,\beta] = [a+k_1\pi,\ a+l_1\pi]$, $t_\nu - t_{\nu-1} = 2\pi$, gdzie $\nu = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(l_1-k_1)$, otrzymujemy oszacowanie:

$$\sup_{a,y}\ \sup_{\pi_{[a+k_1\pi,+a+l_1\pi]},\{\tau_k\}} \sum_{k=1}^{m} \Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y)\right|,\ \tau_k\right) \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2}(l_1-k_1)V_{\Phi_1}^{(1)}(f) + \left(\tfrac{1}{2}(l_1-k_1)-1\right)V_{\Phi_1}^{(1)}(f) = \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]-1\right)V_{\Phi_1}^{(1)}(f),$$

gdzie $[x]$ oznacza cechę x. Dla l_1-k_1 korzystamy z własności 4 a), otrzymując:

$$\sup_a V_{\Phi_1}^{(1)}(f;a+k_1\pi,a+l_1\pi) \leq \sup_a V_{\Phi_1}^{(1)}(f;a+k_1\pi,a+(l_1+1)\pi) \leq (l_1-k_1)V_{\Phi_1}^{(1)}(f) =$$

$$= \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]-1\right)V_{\Phi_1}^{(1)}(f).$$

Dowód b) przebiega analogicznie. W dowodzie c) korzystamy ze wszystkich oznaczeń wprowadzonych w dowodzie a) oraz niech $[\gamma,\delta]$ będzie przedziałem na osi Oy, $\pi_{[\gamma,\delta]} = (\gamma = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \delta)$ jego dowolnym podziałem, $\pi_1[\gamma,\delta] = (\gamma = u_0 < u_1 < \ldots < u_s = \delta)$ podziałem ustalonym. Niech B_μ będą uporządkowanymi podzbiorami zbioru $\{0,1,\ldots,n\}$ dla $\mu = 1,2,\ldots,s$ i takimi, że $i_\mu, i_\mu+1,\ldots,i_\mu+n_\mu$ należą do B_μ, jeśli $y_{i_\mu}, y_{i_\mu+1},\ldots,y_{i_\mu+n_\mu}$ należą do przedziału $[u_{\mu-1},u_\mu]$ i $n_\mu \geq 1$ oraz niech $B_\mu = \Phi$, jeśli $n_\mu = 0$ lub jeśli przedział $[u_{\mu-1},u_\mu]$ nie zawiera punktów z $\pi_{[\gamma,\delta]}$, D zaś takim uporządkowanym podzbiorem $\{0,1,\ldots,n\}$, że $n_h'+p-1, n_h'+p$ należą do D, jeśli przedziały $(y_{n_h'+p-1}, y_{n_h'+p})$ zawierają co najmniej jeden punkt podziału $\pi_1[\gamma,\delta]$. Oznaczmy $D = \{n_1', n_1'+1,\ldots,n_1'+z_1, n_2', n_2'+1,\ldots,n_2'+z_2,\ldots,n_k', n_k'+1,\ldots,n_k'+z_k\}$, gdzie $z_1+z_2+\ldots+z_k \leq s-1$. Analogicznie jak w dowodzie a)

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Phi_2\left(\sum_{k=1}^{m} \Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|,\tau_k\right),v_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi_2\left(\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu} \Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{i-1},y_i)\right|,\tau_j\right) +\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m_j+t-1},x_{m_j+t},y_{i-1},y_i)\right|,\tau_{m_j+t})v_i\right).$$

Podstawiając $t_{\nu-1}-t_\nu = 2\pi$ dla $\nu = 1,2,\dots,r$ i szacując jak w (6) mamy:

$$\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{i-1},y_i)\right|,\tau_j\right) \leqslant 4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)$$

oraz

$$\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{i-1},y_i)\right|,\tau_{m'_j+t}\right) \leqslant 4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f).$$

Wtedy dla $u_\mu - u_{\mu-1} = 2\pi$, $\mu = 1,2,\dots,s$ mamy:

$$S \leqslant (\varkappa_2((2r-1-1)4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)))^{2r-2}\,.$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{i-1})\right|,\tau_j\right),v_i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{i-1},y_i)\right|,\tau_{m'_j+t}\right),v_i\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant (\varkappa_2((2r-2)4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)))^{2r-2}\,.$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\Phi_2\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\Phi_1\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{w-1},y_w)\right|,\tau_j\right),v_w\right)+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{h=1}^{k}\sum_{p=1}^{z_h}\Phi_2\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})\right|,\tau_j\right),v_{n'_h+p}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{t=1}^{r_j}\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\Phi_2\left(\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{w-1},y_w)\right|,\tau_{m'_j+t}\right),v_w\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{r_j}\sum_{p=1}^{z_h}\Phi_2(\Phi_1(|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})|,\tau_{m'_j+t}),v'_{n_h+p})\Big\}=$$

$$=(\varkappa_2((2r-2)4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)))^{2r-2}\,.$$

$$\cdot\Big\{rs\,V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f)+r(s-1)V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f)+(r-1)s\,V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f)+(r-1)(s-1)V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f)\Big\}=$$

$$=(\varkappa_2((2r-2)4(\varkappa_1(3M))^3 V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)))^{2r-2}(2r-1)(2s-1)V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f).$$

Biorąc $r=\frac{1}{2}(l_1-k_1)$, $s=\frac{1}{2}(l_2-k_2)$ dla l_j-k_j, $j=1,2$, oraz oznaczając cechę x przez $[x]$, mamy:

$$\sup_{a,b} V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f;a+k_1\pi,a+l_1\pi,b+k_2\pi,b+l_2\pi)\leq$$

$$\leq(\varkappa_2(([\tfrac{l_1-k_1+1}{2}]-1)8(\varkappa_1(3M))^3V_{\Phi_1}^{(1)}(\tfrac{1}{2}f)))^{2([\frac{l_1-k_1+1}{2}]-1)}\cdot$$
$$\cdot(2[\tfrac{l_1-k_1+1}{2}]-1)(2[\tfrac{l_2-k_2+1}{2}]-1)V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f). \tag{8}$$

W przypadku gdy l_j-k_j dla $j=1$ v $j=2$ są liczbami nieparzystymi, korzystamy, podobnie jak w dowodzie części a), z monotoniczności wariacji. Podstawiając $r=\frac{1}{2}(l_1-k_1+1)=\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]$ i odpowiednio $s=\frac{1}{2}(l_2-k_2+1)=\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right]$ otrzymamy identyczne oszacowanie jak (8).

D e f i n i c j a 5

Jeśli

$$V_{\Phi_1}^{(1)}(f)<\infty\,,\quad V_{\Phi_2}^{(2)}(f)<\infty\quad\text{i}\quad V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f)<\infty.$$

to mówimy, że $f\in H_{\Phi_1,\Phi_2}^{(2)}$.

T w i e r d z e n i e 1

Jeśli $f \in H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ oraz $\Phi_j(u,t) \xrightarrow[u\to\infty]{} \infty$ dla wszystkich t i $j=1,2$, to f jest funkcją ograniczoną.

D o w ó d

Niech $[a,a+2\pi] = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = a+2\pi)$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,a+2\pi]$ oraz niech $x_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant x_k$ dla wszystkich $k=1,2,\ldots,m$.
Korzystając z założenia mamy:

$$\sup_y \Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},y\right) + f(x_{k-1},y)\right|,\tau_k\right) \leqslant V^{(1)}_{\Phi_1}(f) < \infty$$

oraz istnienie takiej stałej $C(f) > 0$, że

$$\sup_y \left|f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_{k-1}-x_k}{2},y\right) + f(x_{k-1},y)\right| < C(f) \text{ dla dowolnych } x_{k-1} < x_k,$$

Dalej dowód jest powtórzeniem dowodu lematu 1 z [1].
Ograniczoność funkcji f wynika z jej okresowości względem y.

D e f i n i c j a 6

Jeśli dla funkcji f istnieją takie $l_j > 0$, $j=1,2,3$, że $V^{(1)}_{\Phi_1}(l_1 f) < \infty$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(l_2 f) < \infty$ i $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(l_3 f) < \infty$, to mówimy, że $f \in H^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$.
Oczywiste jest, że $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} \subset H^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

U w a g a 1

Z własności 1,2 i 3 dla wariacji oraz z twierdzenia 1 mamy:

a) jeśli Φ_j $(j=1,2)$ spełniają warunki (E) i (Δ_2), $\Phi_j(u,t) \xrightarrow[u\to\infty]{} \infty$ dla wszystkich t $(j=1,2)$, to $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa,

b) jeśli Φ_j $(j=1,2)$ są funkcjami wypukłymi ze względu na pierwszą zmienną, to $H^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa.

T w i e r d z e n i e 2

Jeśli Φ_j $(j=1,2)$ spełniają warunki (E) i (Δ_2) oraz spełnione są założenia tw. 1, to $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} = H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

W dowodzie korzystamy z własności 1 dla wariacji i przeprowadzamy oszacowanie analogiczne jak w (6).

T w i e r d z e n i e 3

Jeśli $\Phi_3(u,t) \leq \beta_1 \Phi_1(u,t)$ i $\Phi_4(u,t) \leq \beta_2 \Phi_2(u,t)$ dla wszystkich u dla wszystkich u i t oraz Φ_1 i Φ_2 spełniają warunki (E), (Δ_2) i $\forall_t \Phi_j(u,t) \xrightarrow[u\to\infty]{} \infty$ $(j=1,2)$, to $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} \subset H^{(2)}_{\Phi_3,\Phi_4}$.

W dowodzie szacujemy analogicznie jak w (6).

D e f i n i c j a 7

Jeśli dla ustalonych a i b $V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a,a+2\pi)<\infty$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f;b,b+2\pi)<\infty$ i $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;a,a+2\pi,b,b+2\pi)<\infty$, to $f \in H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

Przy założeniach analogicznych jak w tw. 1 można dowieść ograniczoności $f \in \underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

D e f i n i c j a 8

Jeśli dla ustalonych a i b oraz dla funkcji f istnieją takie stałe $l_j > 0$ $(j=1,2,3)$, że

$$V^{(1)}_{\Phi_1}(l_1 f;a,a+2\pi)<\infty,\ V^{(2)}_{\Phi_2}(l_2 f;b,b+2\pi)<\infty \text{ i } V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(l_2 f;a,a+2\pi,b,b+2\pi)<\infty$$

to mówimy, że $f \in \underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

D e f i n i c j a 9

$\Phi(u,t)$ spełnia warunek (a), jeśli jest niemalejącą funkcją t dla każdego u.

W dalszej części rozdziału będziemy używać funkcji $\Phi_3(u,t)$ i $\Phi_4(u,t)$, które spełniają te same założenia co funkcje $\Phi_1(u,t)$ i $\Phi_2(u,t)$, podane na początku rozdziału.

Przestrzenie $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_3,\Phi_4}$ i $H^{(2)*}_{\Phi_3,\Phi_4}$ będą zdefiniowane podobnie jak $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ i $\underline{H}^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

L e m a t 2

Jeśli Φ_j dla $j=1,2,3,4$ spełniają warunki (a) i (E), Φ_1 i Φ_2 spełniają warunek (Δ_2) oraz $\forall_t \Phi_j(u,t) \xrightarrow[u\to\infty]{} \infty$ dla $j=1,2$, wtedy warunki

$$\exists_{\alpha_j>0}\ \exists_{\beta_j>0}\ \underset{(j=1,2)}{0<u\leq\alpha_j}\ \Phi_3(u,a+2\pi)\leq\beta_1\Phi_1(u,a) \text{ i } \Phi_4(u,b+2\pi)\leq\beta_2\Phi_2(u,b)$$

pociągają

$$H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} \subset H^{(2)}_{\Phi_3,\Phi_4} .$$

D o w ó d

Niech $f \in H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$. Wtedy z lematu 2.6 w [5] mamy: jeśli $M_2(u,t)$ spełnia (E), to następujące warunki są równoważne

1) $\underset{\alpha>0}{\exists}\ \underset{\beta>0}{\exists}\ \underset{0<u\leq\infty}{\forall}\ M_2(u,a_2) \leq \beta M_1(u,a_1)$

2) $\underset{\gamma>0}{\forall}\ \underset{\beta(\gamma)>0}{\exists}\ \underset{0<u\leq\gamma}{\forall}\ M_2(u,a_2) \leq \beta(\gamma)M_1(u,a_1)$.

gdzie $M_j : R \times [a_1,a_2] \longrightarrow R$ $(j=1,2)$ spełniają założenia jak Φ_j, podane na początku rozdziału.

Z ograniczoności funkcji f przez stałą M (tw. 1), dla dowolnego podziału $\Pi_{[a,a+2\pi]} = (a=x_o < x_1 < \ldots < x_m = a+2\pi)$ i układu punktów $x_{k-1} \leq \tau_k \leq x_k$ dla $k=1,2,\ldots,m$ mamy:

$$\underset{\gamma_1>0}{\forall}\ \underset{\beta_1(\gamma_1)>0}{\exists}\ \underset{0<u\leq\gamma_1}{\forall}\ \Phi_3(u,a+2\pi) \leq \beta_1(\gamma_1)\Phi_1(u,a) ,$$

czyli

$$\Phi_3(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k,y)|,\tau_k) \leq \Phi_3(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k,y)|,a+2\pi) \leq$$

$$\leq \beta_1(2M)\Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k,y)|,a) \leq \beta_1(2M)\Phi_1(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k,y)|,\tau_k).$$

Analogicznie wykazuje się nierówność:

$$\Phi_4(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_y(f;x,y_{i-1},y_i)|,v_i) \leq \beta_2(2M)\Phi_2(|\tfrac{1}{2}\Delta^{(2)}_y(f;x,y_{-1},y_i)|,\ v_i).$$

Weźmy teraz podział $\Pi_{[a,a+2\pi]}$ jak wyżej oraz podział $\Pi_{[b,b+2\pi]} = (b=y_o < y_1 < \ldots < y_n = b+2\pi)$ i $y_{i-1} \leq v_i \leq y_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$.

Korzystając z założeń i szacując analogicznie jak w (6) mamy:

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_4\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_3\big(\big|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,\tau_k\big),v_i\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Phi_4\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_3\big(\big|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,a+2\pi\big),b+2\pi\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Phi_4\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_1(4M)\Phi_1\big(\big|\tfrac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,\ a\big)b+2\pi\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\beta_2(\beta_1(4M)4(\varkappa_1(3M))^3\ V_{\Phi_1}^{(1)}(f;a,a+2\pi)).$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_1(4M)\Phi_1\big(\big|\tfrac{1}{4}\quad\tfrac{1}{4}\ \Delta_{xy}^{(2)}(f,x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,\ a\big),\ b\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\beta_2(\beta_1(4M)4(\varkappa_1(3M))^3V_{\Phi_1}^{(1)}(f;a,a+2\pi))(\varkappa_2(2^{n_0+1}(\varkappa_1(3M))^3$$

$$V_{\Phi_1}^{(1)}(f;a,a+2\pi))^{n_0}\ V_{\Phi_1,\Phi_2}^{(3)}(f;a,a+2\pi,b,b+2\pi),$$

gdzie $n_0\geqslant 0$ jest najmniejszą z liczb całkowitych spełniających nierówność $\beta_1(4M)\leqslant 2^{n_0}$.

D e f i n i c j a 10

$\Phi: R\times[a_1,a_2]\longrightarrow R$ spełnia warunek (W), jeśli

$$\underset{k>0}{\forall}\ \underset{\omega>1}{\exists}\ \underset{|u|\leqslant 2k}{\forall}\ \underset{\substack{t_1,t_2\in[a_1,a_2]\\ t_2>t_1}}{\forall}\ \Phi(u,t_2)\leqslant\omega\Phi(u,t_1).$$

L e m a t 3

Jeśli Φ_j (j=1,2,3,4) spełniają warunek (W), wtedy

$$\underline{H}_{\Phi_1,\Phi_2}^{(2)}\subset\underline{H}_{\Phi_3,\Phi_4}^{(2)}$$

pociąga

$$\underset{\alpha_j>0}{\exists}\ \underset{\beta_j>0}{\exists}\ \underset{0<u\leq\alpha_j}{\forall}\ \Phi_3(u,a+2\pi)\leq\beta_1\Phi_1(u,a)\ \text{ i }\ \Phi_4(u,b+2\pi)\leq\beta_2\Phi_2(u,b)$$

dla $j=1,2$.

D o w ó d

Niech $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}\subset H^{(2)}_{\Phi_3,\Phi_4}$, lecz

$$\underset{\alpha_1>0}{\forall}\ \underset{\beta_1>0}{\forall}\ \underset{0\leq u\leq\alpha_1}{\exists}\ \Phi_3(u,a+2\pi)\geq\beta_1\Phi_1(u,a).$$

Wtedy korzystając z lematu 2.5 w [5] dla dowolnego ciągu nieujemnego $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz funkcji $M_j : R \times [a_1,a_2] \longrightarrow R$ $(j=1,2)$, spełniających założenia podane na początku pracy dla Φ_j, następujące warunki są równoważne:

1) zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_n,a_1)$ implikuje zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} M_2(u_n,a_2)$,

2) $\underset{\alpha>0}{\exists}\ \underset{\beta>0}{\exists}\ \underset{0<u\leq\alpha}{\forall}\ M_2(u,a_2)\leq\beta M_1(u,a_1)$, mamy istnienie ciągu ujemnego $\{\tilde{u}_n\}$ takiego, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_1(u_n,a)<\infty \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_3(u_n,a+2\pi)=\infty .$$

Dalej, analogicznie jak w [5], budujemy funkcję:

$$f(x,y)=\begin{cases}\tilde{u}_n, & \text{jeśli } x=s_n, \text{ y dowolne}\\ 0, & \text{jeśli } x\neq s_n, \text{ y dowolne.}\end{cases}$$

gdzie $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest dowolnie wybranym ustalonym ciągiem punktów przedziału $[a,a+2\pi]$.

Pokażemy, że $V^{(1)}_{\Phi_1}(f;a,a+2\pi)<\infty$ i $V^{(1)}_{\Phi_3}(f;a,a+2\pi)=\infty$.

Wybierzmy dowolny podział $\pi_{[a,a+2\pi]}=(a=x_0<x_1<\ldots<x_m=a+2\pi)$ oraz układ $\{\tau_k\}$, gdzie $x_{k-1}\leq\tau_k\leq x_k$ dla $k=1,2,\ldots,m$.

Wtedy przyjmując wszystkie możliwe wartości dla funkcji f(x,y) mamy oszacowanie:

$$\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\left|\tfrac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\,\tilde{u}_{p_k},\tau_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\,\tilde{u}_{p_{k+2}},\tau_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tilde{u}_{p_{k+1}},\tau_k\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|\tilde{u}_{p_k}-2\tilde{u}_{p_{k+1}}\right|,\ \tau_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|\tilde{u}_{p_k}+\tilde{u}_{p_{k+2}}\right|,\ \tau_k\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|2\tilde{u}_{p_{k+1}}-\tilde{u}_{p_{k+2}}\right|,\tau_k\right)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|\tilde{u}_{p_k}-2\tilde{u}_{p_{k+1}}+\tilde{u}_{p_{k+2}}\right|.\tau_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant\omega\left[\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\tilde{u}_{p_k},a) + \sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\tilde{u}_{p_{k+2}},a) + \sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\tilde{u}_{p_{k+1}},a) +\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\max(\tilde{u}_{p_k},\tilde{u}_{p_{k+1}}),a)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\max(\tilde{u}_{p_k},\tilde{u}_{p_{k+2}}),a) +$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\max(\tilde{u}_{p_{k+1}},\tilde{u}_{p_{k+2}})a)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_1(\max(\tilde{u}_{p_k},\tilde{u}_{p_{k+1}},\tilde{u}_{p_{k+2}}),a)\right] \leqslant$$

$$\leqslant 12\omega\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_1(\tilde{u}_k,a)<\infty.$$

Niech podział $(a=x_0<x_1<\ldots<x_m=a+2\pi)$ będzie taki, że $s_k=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$, $k=1,2,\ldots,m$ i niech $\{\tau_k\}$ będzie ciągiem punktów takich, że $x_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant x_k$. Wtedy z założeń mamy:

$$\sum_{k=1}^{m}\Phi_3\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y)\right|,\tau_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Phi_3(\tilde{u}_k, \tau_k) \geq \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{m} \Phi_3(\tilde{u}_k, a+2\pi).$$

Stąd

$$V^{(1)}_{\Phi_3}(f;a,a+2\pi) = \infty .$$

T w i e r d z e n i e 4

Jeśli Φ_1 spełnia warunki (a) i (W) oraz jeśli $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa, to Φ_1 spełnia warunek (Δ_2).

D o w ó d

Jeśli $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa, wtedy jeśli $f \in \underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ to $2f \in \underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$. Połóżmy $\Phi_1'(u,t) = \Phi_1(u,t)$, $\Phi_2'(u,t) = \Phi_2(u,t)$, $\Phi_3'(u,t) = \Phi_1(2u,t)$ i $\Phi_4'(u,t) = \Phi_2(u,t)$.

Wtedy

$$\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1',\Phi_2'} \subset \underline{H}^{(2)}_{\Phi_3',\Phi_4'} .$$

Z lematu 3 mamy istnienie takich $\alpha_1, \beta_1 > 0$, że dla wszystkich $0 < u \leq \alpha_1$ zachodzi:

$$\Phi_3'(u,a+2\pi) \leq \beta_1 \Phi_1'(u,a), \quad \text{a stąd}$$

$$\Phi_1(2u,t) \leq \Phi_1(2u,a+2\pi) = \Phi_3'(u,a+2\pi) \leq \beta_1 \Phi_1'(u,a) =$$

$$= \beta_1\Phi_1(u,a) \leq \beta_1 \Phi_1(u,t) \qquad \text{dla} \quad t \in [a,a+2\pi].$$

Z twierdzenia 4 i uwagi 1 mamy następujący wniosek:

W n i o s e k

Jeśli Φ_1, Φ_2 spełniają warunek (E), $\bigvee_t \Phi_j(u,t) \xrightarrow[u\to\infty]{} \infty$, $j=1,2$,

Φ_1 spełnia warunki (a) i (W),

Φ_2 spełnia warunek (Δ_2),

to

$\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa $\Longleftrightarrow$ Φ_1, spełnia warunek (Δ_2).

U w a g a 2

a) jeśli $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa, to $\underline{H}^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} = \underline{H}^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$,

b) jeśli $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ jest liniowa, to $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2} = H^{(2)*}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

LITERATURA

[1] Achobadze T.I.: Funkcii ograniczennoj obobszczennoj wtoroj wariacii Matematiczeskij sbornik, 1979 t. 109/151/:2/6/, ss. 291-326.

[2] Gniłka S.: On the generalized Helly's theorem. Functions et Approximatio, 1976, t. 4, ss. 109-112.

[3] Gniłka S.: Remarks on the generalized absolute continuity. Functiones et Approximatio, 1977, t. 5, ss. 39-45.

[4] Gniłka S.: On the approximation of M-absolutely continuous functions. I. Approximation by step-functions. Functiones et Approximatio, 1976, t. 4, ss. 113-123.

[5] Gniłka S.: Modular spaces of functiones of bounded M-variation. Functiones et Approximatio, 1978, t. 6, ss. 3-24.

[6] Musielak J., Orlicz W.: On generalized variations (I), Studia Mathematica, 1959, t. XVIII, Fasc. 1, ss. 11-41.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło do Redakcji 25 maja 1988 r.

ВТОРЫЕ МИКСИРОВАННЫЕ ВАРИАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ Φ_1 и Φ_2 С ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

Пусть $\Phi_j(u,t)$ $(j=1,2)$ будут функции определенные на $R_+ x R$ вещественные неотрицательные, непрерывные, неубывающие относительно u для всех t, выполняющие условие $\forall_t \Phi(u,t) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
Для функции $f: R^2 \longrightarrow R$, 2π - периодической относительно каждой переменной, измеримой определены вторые миксированные вариации относительно функций Φ_1 и Φ_2 следующим образом:

$$V^{(1)}_{\Phi_1}(f)=\sup_{a,y}\ \sup_{\Pi_a,\{\tau_k\}} \sum_{k=1}^{m} \Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x_k,y)-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2}\, y\right)+f(x_{k-1},y)\right|,\tau_k\right), \tag{1}$$

$$V^{(2)}_{\Phi_2}(f)=\sup_{b,x}\ \sup_{\Pi_b,\{v_i\}} \sum_{i=1}^{n} \Phi_2\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x,y_i)-2f\left(x,\tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+f(x,y_{i-1})\right|,v_i\right). \tag{2}$$

$$V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)=\sup_{a,b}\sup_{\Pi_{ab},\{\tau_k\},\{v_i\}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\big(\big|\tfrac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\big|,\tau_k\big),v_i\Big),$$

где

$$\Pi_a=(a=x_0<x_1<\ldots<x_m=a+2\pi),\quad \Pi_b=(b=y_0<y_1<\ldots<y_n=b+2\pi),\quad \Pi_{ab}=\Pi_a\times\Pi_b,$$

$$x_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant x_k\,(k=1,2,\ldots,m)\ ,\quad y_{i-1}\leqslant v_i\leqslant y_i\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)=f(x_k,y_i)-2f\Big(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y_i\Big)+f(x_{k-1},y_i)-$$

$$-2f\Big(x_k,\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\Big)+4f\Big(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\Big)-2f\Big(x_{k-1},\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\Big)+$$

$$+f(x_k,y_{i-1})-2f\Big(\frac{x_k=x_{k-1}}{2},y_{i-1}\Big)+f(x_{k-1},y_{i-1}),$$

а также вариации $V^{(1)}_{\Phi_1}(f;\alpha,\beta)$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f;\gamma,\delta)$, $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ определённые аналогично к $V^{(1)}_{\Phi_1}(f)$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f)$ i $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)$ на фиксированных областях $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$ и $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$.
Доказуются основные свойства этих вариаций. Класс функций для которых $V^{(1)}_{\Phi_1}(f)$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f)$, $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)<\infty$ обозначено $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.
$H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$ фвляется обобщением класса V_φ введённого С. Гнилкой в [2], а также обобщением класса $H^{(2)}_{\Phi(n)}$ введённого Т.И. Ахобадзем в [1] без параметров.
Доказуются теоремы о включении и линейности классов типа $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.

MIXED VARIATIONS OF THE SECOND ORDER IN RELATION FUNCTIONS Φ_1 AND Φ_2 WITH PARAMETERS

S u m m a r y

Let $\Phi_j(u,t)$ $(j=1,2)$ be determined on $R_+\times R$ real, non-negative, continuous, non-decreasing functions of u for all t, satisfying condition
$\forall_t\,\Phi_j(u,t)=0 \iff u=0$.
For a function $f:R\to R$, 2π - periodic considering every variable and measurable there are defined mixed variations of the second order with respect to Φ_1 and Φ_2 as given by formulae (1) - (3)

$$V^{(1)}_{\Phi_1}(f)=\sup_{a,y}\ \sup_{\Pi_a,\{\tau_k\}}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x_k,y)-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right)+f(x_{k-1},y)\right|,\tau_k\right), \tag{1}$$

$$V^{(2)}_{\Phi_2}(f)=\sup_{b,x}\ \sup_{\Pi_b,\{v_i\}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x,y_i)-2f\left(x,\tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+f(x,y_{i-1})\right|,v_i\right), \tag{2}$$

$$V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)=\sup_{a,b}\ \sup_{\Pi_{ab},\{\tau_k\}\{v_i\}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta^{(2)}_{xy}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|\tau_k\right),v_i\right),$$

where

$\Pi_a = (a=x_0<x_1<\ldots<x_m=a+2\pi)$, $\Pi_b = (b=y_0<y_1<\ldots<y_n=b+2\pi)$, $\Pi_{ab}=\Pi_a\times\Pi_b$,

$x_{k-1}\leq\tau_k\leq x_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$, $y_{i-1}\leq v_i\leq y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$,

$$\Delta^{(2)}_{xy}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)=f(x_{k-1},y_i)-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},y_i\right)+f(x_{k-1},y_i)-$$

$$-2f\left(x_k,\tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+4f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},\tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)-2f\left(x_{k-1},\tfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right)+$$

$$f(x_k,y_{i-1})-2f\left(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},y_{i-1}\right)+f(x_{k-1},y_{i-1})$$

There arealso defined variations $V^{(1)}_{\Phi_1}(f;\alpha,\beta)$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f;\gamma,\delta)$ and $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ on the fixed intervals $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$ and $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ similarly as $V^{(1)}_{\Phi_1}(f)$, $V^{(2)}_{\Phi_1}(f)$, $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)$, correspondingly. There are proved basic properties of these variations. The class of functions f for which $V^{(1)}_{\Phi_1}(f)$, $V^{(2)}_{\Phi_2}(f)$, $V^{(3)}_{\Phi_1,\Phi_2}(f)<\infty$ was denoted by $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$. It is a generalization of V_φ introduced by S. Gniłka in [2] and of $H^{(2)}_{\Phi(p)}$ introduced by T.I. Achobadze in [1] without parameters. There are proved theorems on linearity and inclusion of the classes of type $H^{(2)}_{\Phi_1,\Phi_2}$.