ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Ewa SZOCIŃSKA

STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH MC SHANE'A

Streszczenie. W pracy rozpatruje się układ stochastycznych równań Mc Shane'a w postaci:

$$dx(t,\omega)=f(t,x(t,\omega))dt+\sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho(t,x(t,\omega))dz^\varrho(t,\omega),\ x(t_0,\omega)=x_0,$$

gdzie dx jest stochastyczną różniczką w sensie Mc Shane'a.
Dla tego układu zacytowano pewne twierdzenie porównawcze uzyskane przez autorkę w pracy [6].
Na podstawie tego wyniku w pracy dowodzi się, że przy stosowanych założeniach stabilność (odpowiednio asymptotyczna stabilność, niemal asymptotyczna stabilność) rozwiązania trywialnego równania zwyczajnego

$$u' = y(t,u),$$

implikuje stochastyczną stabilność (odpowiednio asymptotyczną stochastyczną stabilność, niemal asymptotyczną stochastyczną stabilność) rozwiązania zerowego rozpatrywanego układu równań Mc Shane'a.
Z rezultatów tych wynikają analogiczne implikacje dla stosownych stabilności jednostajnych.
Pracę ilustrują dwa przykłady

§ 1. Wstęp

Niech $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - przestrzeń probabilistyczna, $T\subset R$, $\{\mathcal{F}_t, t\in T\}$ - wstępująca rodzina σ - podalgebr algebry $\mathcal{F}$.
Oznaczamy przez $C[R^+xR^n,R^n]$ klasę funkcji ciągłych typu $R^+xR^n \to R^n$, zaś przez $C^{12}_{tx}[R^+xR^n]$, R^n - klasę funkcji typu R^+xR R^n, ciągłych wraz z pierwszą pochodną względem zmiennej t oraz z pierwszą i drugą pochodną względem zmiennej x.
Niech $U_\lambda = \{x\in R^n : \|x\| \leq \lambda\}$.
Rozpatrzmy układ stochastycznych równań różniczkowych Mc Shane'a

$$dx(t,\omega) = f(t,x(t,\omega))dt + \sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho(t,x(t,\omega))dz^\varrho(t,\omega),$$

z warunkiem początkowym $x(t_0,\omega) = x_0$, w równoważnej mu postaci całkowej

$$x(t,\omega)=x(t_0,\omega)+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s,\omega))ds+\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{t_0}^{t} g_\varrho(s,x(s,\omega))dz^\varrho(s,\omega) \tag{1}$$

$t\in\langle t_0,T\rangle$, $x(t_0,\omega) = x_0$, $\langle t_0,T\rangle\subset\langle 0,+\infty)$,

gdzie x jest n-wymiarowym procesem stochastycznym, $x_0 \in R^n$, z^ϱ : $T \times \Omega \to R$, g_ϱ, f : $\langle t_0, T\rangle \times R^n \to R^n$, zaś występujące w równaniu całki są całkami w sensie Mc Shane'a.
Zakładamy dalej, że funkcje f, g_ϱ i procesy $z^\varrho(\varrho = 1,\dots,r)$ spełniają założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu równań różniczkowych Mc Shane'a (patrz [5]). Na mocy tego twierdzenia układ (1) posiada jednoznaczne rozwiązanie x o ciągłych (mod P) realizacjach zgodne z rodziną $\mathcal{F}_t$. Wprowadzimy operator różniczkowy wzorem:

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} |f^i(t,x)| \frac{\partial}{\partial x_i} + K \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{r} |g_\varrho^i(t,x)| \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{1}{2} K \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{r} |g_\varrho^i(t,x) g_\varrho^j(t,x)| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2}$$

w którym K jest pewną stałą dodatnią.
Oprócz układu równań stochastycznych Mc Shane'a (1) rozpatrzymy równanie różniczkowe zwyczajne:

$$u' = y(t,u) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t, \tag{3}$$

z warunkiem początkowym $u(t_0) = u_0$, gdzie $y \in C[R^+ x R, R]$.
Rozwiązanie równania (3) wychodzące z punktu (t_0, u_0) oznaczymy przez $u(t) = u(t; t_0, u_0)$.
Dla uproszczenia zapisu w dalszej części pracy opuszczać będziemy symbol ω, pisząc $x(t,\omega) = x(t)$ itp.
Zacytujemy obecnie twierdzenie porównawcze dla układu równań stochastycznych (1), z którego będziemy korzystali w dowodach kryteriów różnych rodzajów stochastycznej stabilności rozwiązania trywialnego tego układu.

<u>Twierdzenie porównawcze</u> (patrz [6])

Załóżmy, że:

(i) funkcja $y \in C[R^+ x R, R]$ oraz, że funkcja $y(t,\cdot)$ jest wklęsła dla każdego $t \in R^+$,

(ii) równanie porównawcze (3) posiada całkę górną w prawo $u = r(t; t_0, u_0)$ określoną w całym przedziale $\langle t_0, +\infty)$,

(iii) funkcja $V \in C^{12}_{tx}[R^+ x U_\lambda, R]$ oraz, że zachodzi nierówność

$\Phi V(t,x) \leqslant y(t, V(t,x))$ dla $(t,x) \in R^+ x U_\lambda)$

gdzie Φ jest operatorem różniczkowym określonym w (2),

(iv) dla rozwiązania $x(t) = x(t;t_o,x_o)$ układu (1) istnieje skończona warunkowa wartość oczekiwana,

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{to}\} \quad \text{dla} \quad t \geq t_o, \ x(t) \in U_\lambda (\text{mod } P),$$

(v) $x_o \in U_\lambda$ oraz $V(t_o,x_o) \leq u_o$.

Zachodzi wtedy oszacowanie

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{to}\} \leq r(t;t_o,u_o) \quad \text{dla} \quad t \geq t_o, \quad x(t) \in U_\lambda \ (\text{mod } P).$$

Aby uprościć zapis w dalszym toku opuszczać będziemy symbol (mod P) rozumiejąc, że wszystkie zależności zawierające rozwiązanie $x(t) = x(t;t_o,x_o)$ układu (1) zachodzą z prawdopodobieństwem jeden.

§ 2. Kryteria stochastycznej stabilności i asymptotycznej stabilności

Na podstawie zacytowanego twierdzenia porównawczego, wykażemy obecnie pewne warunki wystarczające dla stochastycznej stabilności i asymptotycznej stochastycznej stabilności. Zakładać dalej będziemy istnienie trywialnego rozwiązania zarówno układu stochastycznego (1), jak też deterministycznego równania porównawczego (3), tzn. zakładamy, że $f(t,0) \equiv 0$, $g_\rho(t,0) = 0(\rho=1,\dots,r)$, $y(t,0) \equiv 0$.

Przypomnimy teraz definicje różnych rodzajów stochastycznej stabilności rozwiązania trywialnego układu (1) [patrz [2]].

Definicja 1

Rozwiązanie trywialne $x = 0$ układu (1) nazywamy rozwiązaniem stochastycznie stabilnym, jeśli dla dowolnych $\varepsilon>0$, $p>0$, $t_o \in R^+$ istnieje dodatnia liczba $\delta = \delta(t_o,\varepsilon,p)$ taka, że jeżeli $\|x_o\| \leq \delta$, to

$$P\{\sup_{t \geq t_o} \|x(t,t_o,x_o)\| \geq \varepsilon\} \leq p .$$

Definicja 2

Mówimy, że rozwiązanie trywialne $x = 0$ układu równań (1) jest prawie asymptotycznie stochastycznie stabilne, gdy dla dowolnych $\varepsilon>0, p>0$, $t_o \in R^+$ istnieją dodatnie liczby $\delta_o = \delta_o(t_o)$ i $T = T(t_o,\varepsilon,p)$ takie, że jeżeli $\|x_o\| \leq \delta_o$, to

$$P\{\sup_{t \geq t_o+T} \|x(t,t_o,x_o)\| \geq \varepsilon\} \leq p.$$

Definicja 3

Rozwiązanie trywialne $x = 0$ układu (1) jest asymptotycznie stochastycznie stabilne, gdy jest stochastycznie stabilne i prawie asymptotycznie stochastycznie stabilne.

Definicja 4

Jeśli w definicjach 1-3 liczby δ oraz T nie zależą od t_0, rozwiązanie trywialne nazywamy odpowiednio jednostajnie stochastycznie stabilne oraz jednostajnie asymptotycznie stabilne.
Oznaczmy przez K klasę funkcji $w \in C[R^+, R^+]$ takich, że:

(i) $w(0) = 0$,
(ii) w jest funkcją silnie rosnącą w R^+.

Podamy obecnie kryteria stochastycznej stabilności i asymptotycznej stochastycznej stabilności.

Twierdzenie 1

Zakładamy, że:

(i) funkcja $y \in C[R^+ x R^+, R]$ oraz że funkcja $y(t, \cdot)$ jest wklęsła dla każdego $t \in R^+$,
(ii) funkcja $V \in C^{12}_{tx}[R^+ x U_\lambda, R^+]$ i dla każdego o $(t,x) \in R^+ x U_\lambda$ zachodzi nierówność $\Phi V(t,x) \leq y(t, V(t,x))$,
(iii) dla rozwiązania $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ układu równań stochastycznych (1) oraz dla $t \geq t_0$ istnieje skończona warunkowa wartość oczekiwana $E\{V(t,x(t)) | \mathcal{F}_{t_0}\}$,
(iv) istnieje funkcja $w \in K$ taka, że dla każdego $(t,x) \in R^+ x (U_\lambda \setminus \{0\})$ jest $V(t,x) \geq w(\|x\|)$ oraz $V(t,0) = 0$ dla każdego $t \in R^+$.

Wtedy:

(1) stabilność trywialnego rozwiązania $U = 0$ równania (3) implikuje stochastyczną stabilność rozwiązania $x = 0$ układu (1),
(2) z asymptotycznej stabilności trywialnego rozwiązania równania (3) wynika asymptotyczna stochastyczna stabilność trywialnego rozwiązania układu (1).

Dowód 1

Wykażemy pierwszą część tezy.
Weźmy w tym celu dowolne $p > 0$, $0 < \varepsilon < \lambda$, $t_0 \in R^+$.
Z założenia rozwiązanie trywialne $u = 0$ równania zwyczajnego (3) jest stabilne, tzn. dla dowolnych $t_0 \in R^+, \varepsilon_1 > 0$ istnieje dodatnia liczba δ_1 taka, że jeśli $\|u_0\| \leq \delta_1$, to $\|u(t, t_0, u_0)\| \leq \varepsilon_1$ dla $t \geq t_0$.

Niech $\varepsilon_1 = pw(\varepsilon)$ i niech $u_o = V(t_o,x_o)$. Na mocy ciągłości funkcji V i założenia (iv) można tak dobrać liczbę dodatnią δ, że będą zachodziły nierówności:

$$\|x_o\| \leq \delta , \qquad \|V(t_o,x_o)\| \leq \delta_1 .$$

Pokażemy, że z tak dobraną liczbą δ spełnione są warunki definicji stochastycznej stabilności.
W przeciwnym razie istniałoby rozwiązanie $x(t)$ układu (1) takie, że

$$\|x_o\| \leq \delta \quad \text{i} \quad P\{\sup_{t \geq t_o} \|x(t,t_o,x_o)\| \geq \varepsilon\} > p. \tag{4}$$

Ponieważ $u_o = V(t_o,x_o)$ i spełnione są założenia (i)-(iii), to na mocy twierdzenia porównawczego i definicji stabilności trywialnego rozwiązania $u = 0$ równania (3) otrzymujemy oszacowanie

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{t_o}\} \leq r(t,t_o,u_o) \leq pw(\varepsilon).$$

Korzystając ze znanych własności warunkowej wartości oczekiwanej uzyskujemy dalej:

$$E\{V(t,x(t))\}, = E\{E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{t_o}\}\} \leq pw(\varepsilon). \tag{5}$$

Niech $\tau_\varepsilon(\omega)$ oznacza moment pierwszego wyjścia trajektorii $x(\cdot,\omega)$ rozwiązania równania (1) ze zbioru U_ε i niech $\tau_\varepsilon(t,\omega) = \min[t,\tau_\varepsilon(\omega)]$. Oznaczmy $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega: \tau_\varepsilon(\omega) < t_1\}$. Ponieważ funkcja V przyjmuje wartości nieujemne, więc z (5) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega_1} V(t_1,x(\tau_\varepsilon(\omega)))dP(\omega) \leq pw(\varepsilon). \tag{6}$$

Z drugiej strony, na mocy założenia (iv), zachodzi nierówność:

$$\int_{\Omega_1} V(t_1,x(\tau_\varepsilon(\omega)))\, dP(\omega) \geq \int_{\Omega_1} w(\|x(\tau_\varepsilon(\omega))\|)\, dP(\omega) = w(\varepsilon)P(\Omega_1).$$

Stąd i z nierówności (6) wnioskujemy, że:

$$P(\Omega_1) = P\{\omega \in \Omega: \tau_\varepsilon(\omega) < t_1\} = P\{\omega \in \Omega: \sup_{t_o \leq t \leq t_1} \|x(t)\| \geq \varepsilon\} \leq p ,$$

co przeczy nierówności (4).
Pokazaliśmy więc, że rozwiązanie trywialne układu równań (1) jest stochastycznie stabilne, co kończy dowód pierwszej części tezy.

Wykażemy obecnie drugą część tezy. Ustalmy $p>0$, $\mathcal{E}_0>0$ oraz $\delta=\delta(t_0,\mathcal{E}_0,p)$. Ponieważ rozwiązanie trywialne $u=0$ równania (3) jest asymptotycznie stabilne, więc zgodnie z definicją jest ono stabilne i prawie asymptotycznie stabilne. Biorąc pod uwagę wykazaną już pierwszą część tezy i definicję asymptotycznej stochastycznej stabilności wystarczy pokazać, że rozwiązanie trywialne $x=0$ układu równań (1) jest prawie asymptotycznie stochastycznie stabilne. Rozpatrzmy $p>0$, $0<\mathcal{E}<\mathcal{E}_0$, $t_0\in R^+$. Ponieważ trywialne rozwiązanie $u=0$ równania (3) jest z założenia prawie asymptotycznie stabilne, więc dla dowolnych $t_0\in R^+$, $\mathcal{E}_1>0$ istnieją dodatnie liczby δ^0 i T takie, że dla dowolnych $t\geq t_0+T$ i $\|u_0\|\leq\delta^0$ zachodzi $\|u(t,t_0,u_0)\|\leq\mathcal{E}_1$.
Niech $\mathcal{E}_1=pw(\mathcal{E})$ i niech $u_0=V(t_0,x_0)$. Podobnie jak w pierwszej części tezy potrafimy wybrać $\delta^*>0$, żeby spełnione były nierówności $\|x_0\|\leq\delta^*$ i $\|V(t_0,x_0)\|\leq\delta^0$.
Niech $\delta_0=\min(\delta,\delta^*)$, wtedy dla $\|x_0\|\leq\delta_0$ na mocy twierdzenia porównawczego mamy:

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{t_0}\}\leq r(t;t_0,u_0),\ \text{gdy}\ \ x(t)\in U_{\mathcal{E}_0},t\geq t_0.$$

W rezultacie, na mocy prawie asymptotycznej stabilności trywialnego rozwiązania $u=0$ równania (3) otrzymujemy nierówności:

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{t_0}\}\leq pw(\mathcal{E})\ \ \text{dla}\ \ t\geq t_0+T,\ \ x(t)\in U_{\mathcal{E}_0},$$

Rozumując tak samo jak w dowodzie pierwszej części tezy mamy:

$$w(\mathcal{E})P(\Omega_2)\leq\int_{\Omega_2}V(t,x(t))dP(\omega)<pw(\mathcal{E}),$$

gdzie

$$\Omega_2=\{\omega\in\Omega:\ \sup_{t\geq t_0+T}\|x(t;t_0,x_0)\|\geq\mathcal{E}\}$$

i w następstwie tego zachodzi nierówność:

$$P\{\sup_{t\geq t_0+T}\|x(t;t_0,x_0)\|\geq\mathcal{E}\}\leq p,\ \text{jeśli tylko}\ \ \|x_0\|\leq\delta_0.$$

Pokazaliśmy więc, że spełnione są warunki definicji 3, co kończy dowód drugiej części tezy.

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1, to:

(1) Z jednostajnej stabilności rozwiązania trywialnego $u = 0$ równania (3) wynika stochastyczna stabilność trywialnego rozwiązania $x = 0$ układu równań Mc Shane'a (1).

(2) Jednostajna asymptotyczna stabilność rozwiązania trywialnego $u = 0$ równania porównawczego (3) implikuje jednostajną asymptotyczną stochastyczną stabilność trywialnego rozwiązania układu równań (1).
Zilustrujmy wyniki prostym przykładem.

Przykład 1

Rozpatrzmy układ równań stochastycznych

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds + \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{t_o}^{t} g_\varrho(s,x(s))dz^\varrho(s). \tag{7}$$

Niech dla wszystkich $(t,x) \in R^+ x U_\lambda$ zachodzą nierówności:

$$xf(t,x) + \sum_{\varrho=1}^{r} x|g_\varrho(t,x)| \leqslant 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{r} I_{ij}\, g_\varrho^i(t,x) g_\varrho^j(t,x) \leqslant \lambda(t)\|x\|^2 ,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, $\lambda \in L_1 < 0, +\infty)$.
Przyjmujemy $V(t,x) = \|x\|^2$.
Łatwo zauważyć wtedy, że dla $(t,x) \in R^+ x U_\lambda$ zachodzi nierówność

$$\Phi V(t,x) \leqslant \lambda(t)V(t,x).$$

Skalarnym równaniem porównawczym będzie tutaj równanie różniczkowe liniowe, jednorodne

$$u' = \lambda(t)u,$$

którego rozwiązanie trywialne jest stabilne (patrz np. [3]).
Spełnione są założenia twierdzenia 1 i na mocy pierwszej części tezy tego twierdzenia trywialne rozwiązanie $x = 0$ układu równań (1) jest stochastycznie stabilne.

§ 3. Niemal asymptotyczna stochastyczna stabilność

Zajmiemy się teraz pewnym kryterium niemal asymptotycznej stochastycznej stabilności.

Definicja 5

Rozwiązanie trywialne $x = 0$ układu równań (1) nazywamy rozwiązaniem niemal asymptotycznie stochastycznie stabilnym, gdy dla dowolnych $\mathcal{E} > 0$, $p > 0$, $\alpha > 0$, $t_0 \in R^+$ istnieje dodatnia liczba $T = T(t_0, \mathcal{E}, p, \alpha)$ taka, że jeśli $\|x_0\| \leq \alpha$, to

$$P\left\{\sup_{t \geq t_0 + T} \|x(t; t_0, x_0)\| \geq \mathcal{E}\right\} \leq p.$$

Jeśli liczba T w definicji nie zależy od t_0, to rozwiązanie trywialne układu (1) jest niemal jednostajnie asymptotycznie stochastycznie stabilne.

Twierdzenie 2

Jeżeli:

(i) funkcja $y \in C[R^+ x R^+, R]$ oraz funkcja $y(t, \cdot)$ jest wklęsła dla każdego $t \in R^+$,

(ii) funkcja $V \in C^{12}_{tx}[R^+ x R^n, R^+]$ i dla każdego $(t,x) \in R^+ x R^n$ zachodzi nierówność $\Phi V(t,x) \leq y(t, V(t,x))$,

(iii) dla rozwiązania $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ układu równań (1) dla $t \geq t_0$ istnieje skończona warunkowa wartość oczekiwana $E\{V(t,x)) | \mathcal{F}_{t_0}\}$,

(iv) istnieje funkcja $w \in K$ taka, że dla każdego $(t,x) \in R^+ x R^n \setminus \{0\}$ jest $V(t,x) \geq w(\|x\|)$ oraz $V(t,0) = 0$ dla każdego $t \in R^+$,

to niemal asymptotyczna stabilność trywialnego rozwiązania $u = 0$ równania porównawczego (3) implikuje niemal asymptotyczną stochastyczną stabilność trywialnego rozwiązania $x = 0$ układu równań Mc Shane'a (1).

Dowód

Rozpatrzmy dowolne $\alpha > 0$, $p > 0$, $\mathcal{E} > 0$, $t_0 \in R^+$ i niech $\|x_0\| \leq \alpha$. Z założenia rozwiązanie trywialne $u = 0$ równania (3) jest niemal asymptotycznie stabilne, a zatem dla dowolnych $t_0 \in R^+$, $\alpha_1 > 0$, $\mathcal{E}_1 > 0$ istnieje dodatnia liczba T taka, że dla $t \geq t_0 + T$ oraz $\|u_0\| \leq \alpha_1$ jest $\|u(t, t_0, u_0)\| < \mathcal{E}_1$.
Niech $\mathcal{E}_1 = pw(\mathcal{E})$ i niech $u_0 = V(t_0, x_0)$ tak, aby było $\|u_0\| \leq \alpha_1$. Korzystając z twierdzenia porównawczego otrzymamy oszacowanie:

$$E\{V(t, x(t)) | \mathcal{F}_{t_0}\} \leq r(t; t_0, u_0) \quad \text{dla} \quad t \geq t_0,$$

zaś z niemal asymptotycznej stabilności trywialnego rozwiązania $u = 0$ równania (3) mamy oszacowania:

$$E\{V(t,x(t))|\mathcal{F}_{t_0}\} \leq pw(\varepsilon) \quad \text{dla} \quad t \geq t_0 + T.$$

Rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1, otrzymujemy nierówności:

$$w(\varepsilon)P(\Omega_3) < \int_{\Omega_3} V(t,x(t))dP(\omega) < pw(\varepsilon),$$

gdzie

$$\Omega_3 = \{\omega \in \Omega : P\{\sup_{t \geq t_0+T} \|x(t)\| \geq \varepsilon\}.$$

Zatem jeśli $\|x_0\| \leq \alpha$, to $P\{\sup_{t \geq t_0+T} \|x(t)\| \geq \varepsilon\} \leq p$,

a więc rozwiązanie trywialne $x = 0$ układu (1) jest niemal asymptotycznie stochastycznie stabilne. Dowód twierdzenia jest ukończony.

Wniosek 2

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 2, to niemal jednostajna asymptotyczna stabilność rozwiązania trywialnego $u = 0$ równania porównawczego (3) pociąga niemal jednostajną asymptotyczną stochastyczną stabilność trywialnego rozwiązania układu równań Mc Shane'a.

Przykład 2

Rozpatrzmy układ równań (7). Niech dla $(t,x) \in R^+ \times U_\lambda$ spełnione będą nierówności:

$$xf(t,x) + \sum_{\varrho=1}^{r} x|g_\varrho(t,x)| \leq -\alpha \|x\|^2, \qquad \alpha > 0$$

$$\sum_{ij=1}^{n} \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} I_{ij}\, g_\varrho^i(t,x) g_\sigma^j(t,x) \leq b(t)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}t\right\}\|x\|,$$

gdzie $b(t)$ jest wielomianem stopnia n.

Przyjmując $V(t,x) = \|x\|^2$, otrzymujemy:

$$\Phi V(t,x) \leq -\alpha V(t,x) + b(t)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}t\right\}[V(t,x)]^{1/2}.$$

Skalarnym równaniem porównawczym jest równanie:

$$p' = -\alpha p + b(t)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}t\right\}p^{1/2}.$$

Łatwo pokazać, stosując znane kryteria deterministyczne (patrz [3]), że rozwiązanie trywialne tego równania jest niemal asymptotycznie stabilne. Na mocy twierdzenia 2 widać, że również rozwiązanie układu równań (7) jest niemal asymptotycznie stochastycznie stabilne.

LITERATURA

[1] Ladde G.S.: Differential Inequalities and Stochastic Functional Differential Equations, J. Math. Phys. 16 nr 4 1975, ss. 894-900.

[2] Ladde G.S., Lakśmikantham V., Liu P.T.: Differential Inequalities and Ito Type Stochastic Differential Equations, Proc. of the Int. Conference on Nonlinear Differential Functional Equations, Bruxelles et Louvain Belgium, Hermann, Paris, 1973, ss. 612-640.

[3] Lakśmikantham V., Leela S.: Differential and Integral Inequalities. Vol I, Academic Press, New York 1969.

[4] Mc Shane E.: Stochastic Integrals and Stochastic Functional Equations, SIAM J. Appl. Math, Vol. 17 nr 2, 1969, ss. 287-306.

[5] Mc Shane E.J.: Stochastic Calculus and Stochastic Models, Academic Press, New York 1974.

[6] E. Szocińska: Stabilność i ograniczoność stochastycznych równań różniczkowych Mc Shane'a, rozprawa doktorska, Katowice 1981.

Recenzent: Doc. dr hab. Roman Ger

Wpłynęło do Redakcji 5.03.1987 r.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКШЕЙНА

Р е з ю м е

В работе исследуем систему случайных дифференциальных уравнении Макшейна

$$dx(t,\omega) = f(t,x(t,\omega))dt + \sum_{\varrho=1}^{r} g_{\varrho}(t,x\,t,\omega))dz^{\varrho}(t,\omega);\ x(t_0,\omega) = x_0$$

Для этой системы цитируем теорему сравнения получено в работе [6]. Используя эту теорему, в этой работе доказано, что при соответственных предположениях устойчивость (асимптотическая устойчивость, почти асимптотическая устойчивость) тривиального решения обыкновенного уравнения

$$u' = y(t,u)$$

влечет за собой стохастическую устойчивость (асимптотическую стохастическую устойчивость, почти асимптотическую стохастическую устойчивость) тривиального решения рассмотриваного система случайных уравнений Макшейна. С этих исходов следуеть тоже аналогический результат для равномерных случайных устойчивости. В работе помещено два примера.

STABILITY OF THE SOLUTIONS OF MC SHANE TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper we consider the stochastic differential system of Mc Shane type

$$dx(t,\omega) = f(t,x(t,\omega))dt + \sum_{\rho=1}^{r} g_\rho(t,x(t,\omega))dz^\rho(t,\omega), x(t_0,\omega) = x_0,$$

where dx is a stochastic increment in sense of Mc Shane. For this system has presented some comparison theorem, that have appearad in the paper [6]. Utilizing the comparison theorem we proved here, that under adequate conditions, stability (asymptotic stability, quasi-asymptotic stability) of the trivial solutions of the scalar differential equation

$$u' = y(t,u) ,$$

implies the stability in probability (asymptotic stability in probability, quasi-asymptotic stability in probability) of the trivial solutions of the stochastic MC Shane system.

Finally we provided examples to illustrate our results.