ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

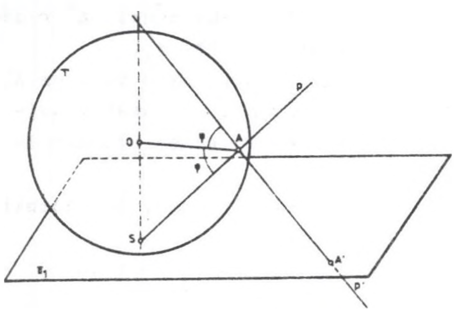
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Henryk GLIŃSKI

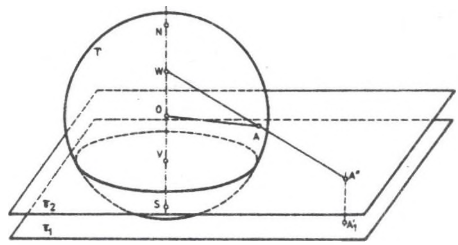
O PEWNYM ODWZOROWANIU SFERY NA PŁASZCZYZNĘ

Streszczenie. W pracy został zdefiniowany rzut refleksyjny, tzn. pewne niejednoznaczne odwzorowanie sfery na płaszczyznę do niej styczną. Konstrukcję rzutu refleksyjnego oparto na zjawisku odbicia promieni świetlnych od powierzchni zwierciadła sferycznego. Rzutem dowolnego punktu sfery jest punkt rzutni π, w którym promień świetlny wychodzący ze źródła światła S i odbity od powierzchni sfery przebija rzutnię π. Źródło światła S umieszczono w punkcie styczności sfery do płaszczyzny rzutni π. Przedstawiono podstawowe własności rzutu refleksyjnego, między innymi wykazano, że rzut refleksyjny jest złożeniem rzutu środkowego i rzutu prostokątnego. Na podstawie wspomnianej powyżej własności udowodniono, że rzutem refleksyjnym okręgów sfery są stożkowe. W zależności od położenia rzutowanego okręgu na sferze jego rzut może być elipsą, parabolą, hiperbolą lub okręgiem. W przypadkach szczególnych rzutem okręgu jest stożkowa zniekształcona - prosta podwójna. Wykazano również, że rzut refleksyjny nie jest odwzorowaniem konforemnym.

Ustalmy w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 uzupełnionej elementami niewłaściwymi, zwanej dalej przestrzenią W^3, sferę Γ o środku w punkcie O i promieniu r, styczną do płaszczyzny rzutni π_1 w punkcie S. Rozważmy dowolny punkt A sfery Γ różny od punktu S (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

D e f i n i c j a 1

Promieniem odbitym w punkcie A sfery Γ nazywamy prostą p' leżącą w płaszczyźnie $\triangle AOS$ i tworzącą z odcinkiem $\overline{OA}$ kąt równy kątowi, jaki tworzy z odcinkiem $\overline{OA}$ promień padający, tj. prosta $p = AS$.

D e f i n i c j a 2

Rzutem refleksyjnym punktu A sfery Γ, $A \neq S$ nazywamy punkt $A' = p' \cap \pi_1$, tj. punkt przebicia rzutni π_1 promieniem odbitym w punkcie A.

Załóżmy dodatkowo, że rzutem refleksyjnym punktu S jest punkt S, tj. $S' = S$. Określone zostało w ten sposób pewne odwzorowanie punktów sfery Γ na płaszczyznę styczną do sfery w punkcie S.

Zwróćmy uwagę, że rzut refleksyjny ma ścisły związek ze zjawiskiem odbicia promieni świetlnych od powierzchni zwierciadlanej - punkt S jest źródłem światła, prosta p promieniem padającym, prosta p promieniem odbitym, kąty SAO i OAB - odpowiednio kątami padania i odbicia.

Wykażmy następujące twierdzenie podstawowe:

T w i e r d z e n i e 1

Rzut refleksyjny punktów sfery na płaszczyznę do niej styczną jest złożeniem rzutu środkowego i rzutu prostokątnego.

D o w ó d

Wyznaczmy na prostej SO punkty V i W oddalone od środka sfery o odległość $r/2$ i poprowadźmy przez punkt V rzutnię pomocniczą π_2 równoległą do rzutni π_1 (rys. 2). Skonstruujmy rzut środkowy dowolnego punktu A sfery Γ z punktu W na rzutnię π_2. Otrzymany punkt A'' rzućmy następnie prostokątnie na rzutnię π_1, otrzymując punkt A_1'.

Wykażemy, że otrzymany w ten sposób punkt A_1' jest identyczny z punktem A', skonstruowanym na podstawie definicji rzutu refleksyjnego. Zauważmy najpierw, że punkty S, V, O, W, A, A', A'' i A_1' leżą w tej samej płaszczyźnie.

Dla dowodu identyczności punktów A' i A_1' wystarczy wykazać, że odcinki SA' i SA_1' są równe.

Wyznaczmy długość odcinka $\overline{SA'}$ zgodnie z rys. 1, czyli według definicji rzutu refleksyjnego. W trójkącie OAS mamy:

$|\overline{OA}| = |\overline{OS}| = r$, więc $\sphericalangle(OSA) = \sphericalangle(OAS) = \varphi$, skąd otrzymujemy $|\overline{SA}| = 2r\cos\varphi$. W $\triangle SAA'$ mamy $\sphericalangle(ASA') = 90^\circ - \varphi$, $\sphericalangle(SAA') = 180^\circ - 2\varphi$, $\sphericalangle(SA'A) = 3\varphi - 90^\circ$. Wykorzystując twierdzenie sinusów uzyskujemy:

$$|\overline{SA'}| = \frac{2r\sin\varphi}{3 - 4\cos\varphi}\,.$$

Obliczmy teraz długość odcinka $\overline{SA_1'} = \overline{VA''}$ według rys. 2, czyli zgodnie z konstrukcją drugą. W $\triangle$ SAO mamy:

$\sphericalangle(OSA) = \sphericalangle(SAO) = \varphi$, $\sphericalangle(SOA) = 180^\circ - 2\varphi$, tak więc w $\triangle$ WOA $\sphericalangle(WOA) = 2\varphi$ i $|\overline{WO}| = r/2$.

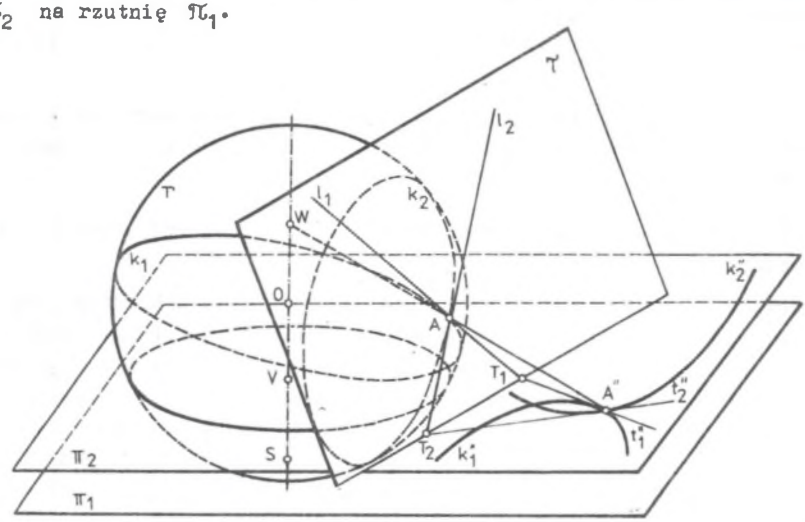
Stosując twierdzenie sinusów obliczamy tg $\sphericalangle$(OWA)

$$\operatorname{tg}\sphericalangle(OWA) = \frac{2\sin2\varphi}{1 - 2\cos2\varphi} = \frac{2\sin2\varphi}{3 - 4\cos2\varphi}\,.$$

Z kolei z $\triangle$ WVA'' otrzymujemy:

$$|\overline{VA''}| = |\overline{SA_1'}| = |\overline{WV}|\operatorname{tg}\sphericalangle(VWA'') = \frac{2r\sin2\varphi}{3 - 4\cos^2\varphi}.$$

Punkty A' i A_1' leżą w tej samej odległości od punktu S, są więc identyczne. Tym samym wykazano, że rzut refleksyjny jest złożeniem rzutu środkowego z punktu W na rzutnię pomocniczą π_2 i rzutu prostokątnego rzutni π_2 na rzutnię π_1.



Rys. 3
Fig. 3

Dowiedziemy teraz kilku własności rzutu refleksyjnego:

1. Rzut refleksyjny jest odwzorowaniem dwukrotnym.

Dla dowodu tej własności obierzmy na rzutni π_1 dowolny punkt D' i wyznaczmy rzut prostokątny tego punktu na rzutnię π_2 - punkt D''. Prosta przechodząca przez punkty D'' i W przebija sferę w dwóch punktach D_1 i D_2. Rzutem refleksyjnym każdego z nich jest punkt D', każdy z tych punktów jest więc przeciwobrazem punktu D'.

2. Rzutem refleksyjnym okręgu k leżącego na sferze jest stożkowa.

Dowód tej własności wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 - rzutem środkowym okręgu jest stożkowa, rzutem prostokątnym stożkowej jest również stożkowa, złożenie tych dwóch rzutów daje także stożkowa, złożenie tych dwóch rzutów daje także stożkową.

Rzutem refleksyjnym okręgu sfery Γ leżącego w płaszczyźnie $\varepsilon \parallel \pi_1$ i przechodzącej przez punkt W jest prosta niewłaściwa rzutni π_1 (liczona dwukrotnie).

Rzutem refleksyjnym dowolnego okręgu sfery może więc być:

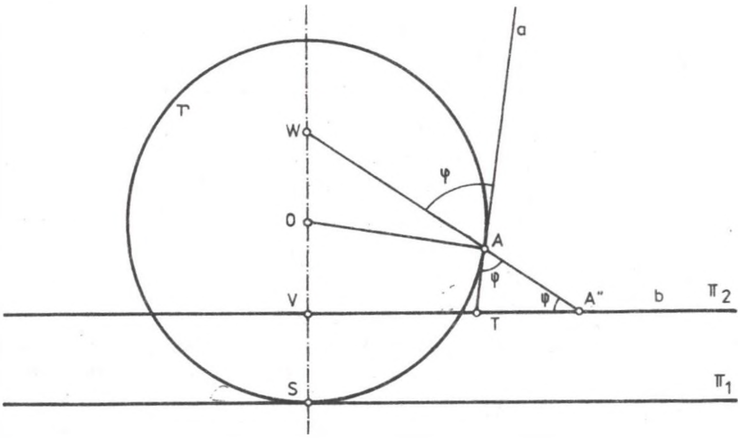
a) hiperbola - gdy dany okrąg przecina płaszczyznę ε;
b) parabola - gdy dany okrąg ma jeden punkt wspólny z płaszczyzną ε;
c) elipsa - gdy dany okrąg nie przecina płaszczyzny ε;
d) okrąg - gdy dany okrąg leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ε.

Rzutem okręgu jest stożkowa zniekształcona (prosta podwójna), właściwa lub niewłaściwa, jeśli dany okrąg leży w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt W.

3. Rzut refleksyjny sfery na płaszczyznę nie jest odwzorowaniem konforemnym.

W celu wykazania tej własności obierzmy na sferze dwa okręgi k_1 i k_2. Niech punkt A będzie jednym z punktów przecięcia się tych okręgów. Skonstruujmy styczne t_1 i t_2 w punkcie A do okręgów k_1 i k_2. Proste t_1 i t_2 wyznaczają płaszczyznę τ styczną do sfery w punkcie A (rys. 3). Płaszczyzna określona punktem W i prostą t_1 jest styczna do stożka rzutującego okrąg k_1 z punktu W na rzutnię π_2, krawędź przecięcia się tej płaszczyzny z rzutnią π_2 jest więc styczną t_1'' w punkcie A'' do stożkowej k_1'', będącej rzutem środkowym okręgu k_1 na rzutnię π_2. Podobnie prosta t_2'' jest styczna do stożkowej k_2'' w punkcie A''. Na to, aby odwzorowanie było konforemne potrzeba i wystarczy, aby kąty między stycznymi t_1 i t_2 oraz t_1'' i t_2'' były równe.

Załóżmy, że równość ta zachodzi, tj. rzut refleksyjny jest odwzorowaniem konforemnym. Z założenia tego wynika równość kątów $\sphericalangle(T_2AT_1)$ i $\sphericalangle(T_2A''T_1)$, skąd wynika przystawanie trójkątów $\triangle T_1AT_2$ i $\triangle T_1A''T_2$.



Rys. 4
Fig. 4

Z przystawania dwóch ścian w czworościanie T_1T_2AA'' wynika równość kątów, jakie tworzy krawędź AA'' ze ścianami T_1AT_2 i $T_1A''T_2$, a więc płaszczyznami τ i π_2.
Oznaczmy te równe kąty przez φ. Przez punkty W, A'' i S poprowadźmy płaszczyznę α przecinającą płaszczyzny τ i π_2 odpowiednio w prostych a i b. Z uwagi na prostopadłość płaszczyzny α do płaszczyzn τ i π_2 zachodzi równość: $\sphericalangle(TA''A) = \sphericalangle(TAA'')$ (rys. 4).
Z trójkąta $WA''V$ mamy, że $\sphericalangle(VWA'')$ jest równy $90^\circ - \varphi$. Uwzględniając, że płaszczyzna τ tworzy z promieniem OA kąt prosty, otrzymujemy, że w trójkącie OWA $\sphericalangle(OAW)$ jest równy $90^\circ - \varphi$. Tak więc w trójkącie OWA mamy równość kątów $\sphericalangle(OWA) = \sphericalangle(OAW) = 90^\circ - \varphi$, czyli trójkąt ten jest trójkątem równoramiennym i zachodzi $|\overline{WO}| = |\overline{OA}|$.
Tym samym doszliśmy do sprzeczności, gdyż $|\overline{WO}| = \frac{1}{2}|\overline{OA}|$.
Przyjęte założenie i konforemności odwzorowania jest fałszywe, rzut refleksyjny nie jest odwzorowaniem konforemnym.

Recenzent: Doc dr inż. Stanisław Ochoński

Wpłynęło do Redakcji 7.09.1987 r.

ОБ ОДНОЙ ПРОЕКЦИИ СФЕРЫ В ПЛОСКОСТЬ

Р е з ю м е

В работе определяется отражённая проекция, т.е. некоторое неоднозначное преобразование сферы на касательную к ней плоскость. Конструкцию отражённой проекции основано на явлении отражения лучей света от сферического зеркала. Проекцией произвольной точки сферы A есть точка плоскости проекции π, в которой световой луч, выходящий из источника света S и отражённый от поверхности сферы в точке A пробивает плоскость проекции π. Представлено основные свойства отражённой проекции, между прочим, доказывается, что отражённая проекция является суперпозицией центральной проекции и прямогольной проекции. Доказывается, что отражённой проекцией окружностей являются кривые второго порядка. В зависимости от положения проектированной окружности на поверхности сферы её проекцией есть эллипс, парабола, гиперболоид или окружность. В отдельных случаях проекцией окружности есть деформированная кривая второго порядка - двойная прямая. Доказывается также, что отражённая проекция не конформна.

ON A CERTAIN MAPPING OF THE SPHERE ONTO A PLANE

S u m m a r y

The paper defines a reflective projection i.e. a certain ambigous mapping of a spherical surface onto a plane which is tangent to it. The construction of the reflective projection is based on the phenomenon of the reflection of light rays from the surface of a spherical mirror. The projection of an arbitraty point A of a spherical surface is the point of a projection plane in which a light ray coming out of a light sourse S and reflected from the spherical surface in point A penetrates trough the projection plane π. The light sourse S was placed in the point of tangency of the sphere to the plane of projection π.
There were presented fundamental propertics of the reflective projection, among other things it was prowed that the reflective projection is a composition of central projection and orthogonal projection. Basing oneself on the above mentioned property it was proved that conics are the reflective projection of circles. According to the position of the projected circkle on the sphere its projection can be an ellipse, a parabola, a hyperbola or a circle. In special cases the projection of a circle is an ambignous conic - a double straight line. It was also proved that a reflective projection is not a conformal mapping.