ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Danuta JAMA
Adam CZECH

O CIĄGŁYCH ROZWIĄZANIACH PEWNEGO LINIOWEGO RÓWNANIA CAŁKOWEGO ZE ZMIENNYM ARGUMENTEM

Streszczenie. Praca poświęcona jest zagadnieniu istnienia i jednoznaczności ciągłego, ograniczonego rozwiązania równania całkowego typu Voltery ze zmiennym argumentem o postaci:

$$u(t) = f(t) + \lambda\int_0^t k(s,t)u(s + \varphi(t))ds \qquad (0)$$

dla $s,t \in [0,\infty)$.

Głównym rezultatem pracy jest podanie warunków dostatecznych gwarantujących istnienie i jednoznaczność ciągłego, ograniczonego rozwiązania równania (0) na nieujemnej półosi rzeczywistej przy założeniu, że funkcje dane w tym równaniu są ciągłe i ograniczone na tym przedziale. Rozpatrujemy nie badany dotychczas przypadek nieujemnej funkcji $\varphi(t)$.
Przypadek ujemnej funkcji $\varphi(t)$ jest dobrze zbadany i poświęcono mu wiele prac.
Przypadkowi funkcji $\varphi(t)$ o zmiennym znaku poświęcimy jedną z następnych prac.
Podajemy także warunki, jakie musi spełniać parametr λ, aby rozpatrywane równanie posiadało jednoznaczne rozwiązanie o wymienionych powyżej własnościach.
Wynik osiągnięto metodą Picarda kolejnych przybliżeń, po zastosowaniu odpowiednich przekształceń. Wynik zawarty w tej pracy można wykorzystać w teorii słabych rozwiązań abstrakcyjnych równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha, jak również w teorii równań cząstkowych zawierających człon z wyprzedzającym argumentem.

Główny rezultat

Rozpatrzmy równanie (0) o postaci:

$$u(t) = f(t) + \lambda\int_0^{\tau} k(s,t)u(s + \varphi(t))ds,$$

gdzie u jest funkcja szukaną, λ jest parametrem zespolonym, pozostałe funkcje są dane. Podstawowym rezultatem jest

T w i e r d z e n i e

Jeżeli

a) funkcje $f(t)$, $k(s,t)$, $\varphi(t)$ są ciągłe dla $s,t \geq 0$,

b) $\int\limits_0^\tau |k(s,t)|\,ds \leqslant M_1$ dla $t \geqslant 0$,

c) $\bigvee\limits_{\substack{M_2>0\\ M_2=\mathrm{const}}} \varphi(t) \leqslant M_2; \quad (0) = 0$,

d) $\bigvee\limits_{\substack{M>0\\ m=\mathrm{const}}} \sup\limits_{s,t\geqslant 0} |k(s,t)| \leqslant M$ oraz $\sup\limits_{t\geqslant 0} |f(t)| \leqslant M$,

e) $|\lambda| < \min(\frac{1}{M_2Me}, \frac{1}{M_1})$ gdzie e - liczba Eulera,

to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie ciągłe i ograniczone równania (0).

D o w ó d

W celu udowodnienia istnienia rozwiązania równania rozpatrzmy ciąg kolejnych przybliżeń, określony wzorem:

$$
\begin{aligned}
u_0(t) &= f(t)\\
&\vdots\\
u_n(t) &= f(t) + \lambda\int\limits_0^t k(s,t)u_{n-1}(s+\varphi(t))ds.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Dla przejrzystości dowód istnienia rozwiązania równania (0) zostanie przeprowądzony w trzech etapach. W pierwszym i drugim etapie zajmować się będziemy zbieżnością ciągu kolejnych przybliżeń (1).

I. Wykażemy, że na mocy założeń c) i d) prawdziwa jest następująca nierówność:

$$|u_n(t)-u_{n-1}(t)| \leqslant |\lambda|^n M^{n+1}\frac{(t+(n-1)M_2)^n}{n!}. \tag{2}$$

Prawdziwość nierówności (2) udowodnimy za pomoca indukcji matematycznej. Mamy:

$$|u_1-u_0| = |\lambda|\,\Big|\int\limits_0^t k(s,t)f(s+\varphi(t))ds\Big| \leqslant |\lambda|M^2t. \tag{3}$$

Niech

$$|u_n(t)-u_{n-1}(t)| \leqslant |\lambda|^n M^{n+1}\frac{(t+(n-1)M_2(^n}{n!},$$

wtedy mamy:

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)| = |\lambda|\,\Big|\int_0^t k(s,t)\big[u_n(s+\varphi(t)) - u_{n-1}(s+\varphi(t))\big]ds\Big|$$

$$\leqslant |\lambda|^{n+1} M^{n+2}\int_0^t \frac{(s+\varphi(t)+(n-1)M_2)^n}{n!}\,ds$$

$$\leqslant |\lambda|^{n+1} M^{n+2}\,\frac{(t+\varphi(t)+(n-1)M_2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leqslant |\lambda|^{n+1} M^{n+2}\,\frac{(t+nM_2)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

II. Rozpatrzmy ciąg pomocniczy postaci:

$$a_n = |\lambda|^n M^{n+1}\,\frac{(t+(n-1)M_2)^n}{n!}\,.$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = |\lambda|\,MeM_2\,. \tag{4}$$

Istotnie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+2}(t+nM_2)^{n+1}n!}{|\lambda|^n M^{n+1}(t+(n-1)M_2)^n(n+1)!} =$$

$$= |\lambda|\,M\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(t+nM_2)\Big(\frac{t+nM_2}{t+(n-1)M_2}\Big)^n =$$

$$= |\lambda|\,M\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(t+nM_2)\Big(\frac{t+(n-1)M_2+M_2}{t+(n-1)M_2}\Big)^n =$$

$$= |\lambda|\,M\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(t+nM_2)\Big(\frac{1+(n-1)\frac{M_2}{t}+\frac{M_2}{t}}{1+(n-1)\frac{M_2}{t}}\Big)^n\,.$$

Oznaczmy $\frac{M_2}{t} = z$ i rozpatrzmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+(n-1)z+z}{1+(n-1)z}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{1+(n-1)z}\right)^n = e.$$

Stąd wynika prawdziwość równości (4).
Z (2) i (4) oraz założenia e) naszego twierdzenia, na mocy kryterium Weierstrasa i D'Alamberta wynika jednostajna i bezwzględna zbieżność szeregu funkcyjnego o postaci:

$$\sum_{n=0} (u_{n+1}-u_n),$$

co z kolei pociąga za sobą zbieżność jednostajną ciągu kolejnych przybliżeń (1).

III. Pokażemy teraz, że funkcje $u_n(t)$ $(n=0,1,\ldots)$, określone wzorem (1), są ciągłe dla $t > 0$ i wspólnie ograniczone przez stałą $\frac{M}{1-|\lambda|M_1}$.
Ciągłość funkcji $u_n(t)$ dla $n=0,1,\ldots$ wynika z założenia a) naszego twierdzenia i sposobu konstrukcji tych funkcji.
Aby udowodnić ograniczoność funkcji $u_n(t)$ dla $n=0,1,\ldots$ wykażemy najpierw, na podstawie indukcji matematycznej, że słuszne jest oszacowanie o postaci:

$$|u_n| \leq M + |\lambda| MM_1 + \ldots + |\lambda|^n MM_1^n . \tag{5}$$

Rzeczywiście mamy:

dla $n = 1$

$$|u_1(t)| \leq M + |\lambda|\, M \int_0^t |k(s,t)|\, ds \leq M + |\lambda|\, MM_1.$$

Na podstawie (5) mamy:

$$|u_{n+1}(t)| \leq |f(t)| + |\lambda| \int_0^t |k(s,t)|\, |u_n(s+\varphi(t))|\, ds$$

$$\leq M + |\lambda|(M + |\lambda|\, MM_1 + \ldots + |\lambda|^n MM_1^n)M_1 ,$$

czyli

$$|u_{n+1}(t)| \leq M + |\lambda|\, MM_1 + |\lambda|^2 MM_1^2 + \ldots + |\lambda|^{n+1} MM_1^{n+1} . \tag{6}$$

Z założenia e) i (6) otrzymujemy ograniczenie postaci:

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{M}{1-|\lambda|M_1} \qquad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Z powyższych wywodów wynika, że ciąg kolejnych przybliżeń określony wzorem (1) jest ciągiem funkcji ciągłych i jednostajnie ograniczonych, co daje tezę twierdzenia dotyczącą istnienia rozwiązania.
W celu zbadania jednoznaczności przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania ciągłe i ograniczone równania (0) u_1 i u_2. Wtedy funkcja $V(t) = u_1(t) - u_2(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego postaci:

$$V(t) = \lambda \int_0^t k(s,t)V(s+\varphi(t))ds. \tag{7}$$

Wówczas z (7) mamy:

$$\sup_{t \geqslant 0} |V(t)| \leqslant |\lambda| M_1 \sup_{t \geqslant 0} |V(t)|,$$

czyli

$$\sup_{t \geqslant 0} |V(t)| \, (1-|\lambda|M_1) \leqslant 0. \tag{8}$$

Na mocy założenia e)

$$1 - |\lambda| M_1 > 0 . \tag{9}$$

Z (8) i (9) wynika, że

$$\sup_{t \geqslant 0} |V(t)| \leqslant 0 .$$

Stąd wynika $V(t) \equiv 0$, co dowodzi jednoznaczności rozwiązania równania (0).

LITERATURA

[1] Godunow S.K.: Równania fizyki matematycznej. WNT, Warszawa 1975.
[2] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.
[3] Tricomi F.G.: Integral Equations. Interscience Publishers Inc. New York-London 1957.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji 16.11.1988 r.

О НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Р е з ю м е

В статье рассматривается проблема существования и однозначности непрерывного ограниченного решения интегрального уравнения типа с изменяющимся фргументом вида

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t k(s,t)u(s+\varphi(t))ds \tag{0}$$

для $s,t \in [0,\infty)$.

Основным результатом работы является указание удовлетворительных условий, гарантирующих существование и однозначность непрерывного ограниченного решения уравнения (0) на неотрицательной действительной полуоси, закладывая, что функции поданные в этом уравнении являются непрерывными и ограниченными в этом интервале.

Рассматривается до сих пор неизученный случай неотрицательной функции $\varphi(t)$. Случай отрицательной функции $\varphi(t)$ хорошо изучен и ему посвящено много работ.

Случаю функйии $\varphi(t)$ с изменяющимся знаком будет посвящена одна из следующих работ.

Поданы также условия каким должен отвечать параметр λ чтобы рассматриваемое уравнение имело однозначное решение с поданными выше свойствами.

Результат достигнут, основываясь на методе Пикарда очередных приближений после применения соответствующих превращений.

Результат представленный в этой работе можно использовать в теории слабых абстракционных дифференциальных решений в пространстве Банаха, как тоже в теории частичных уравнений, содержащих член с опережающим аргументом.

ON CONTINUOUS SOLUTIONS OF A LINEAR INTEGRAL EQUATION WITH CHANGING ARGUMENT

S u m m a r y

The article concerns the problem of existence and uniqueness of a solution of a continuous, bounded solution of a integral equation of the Volterra type with a changing argument of a shape:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t k(s,t)u(s + \varphi(t))ds$$

The main result gives sufficient conditions for existence and uniqueness of a continuous, bounded solution of a given equation under the conditions that functions in the equation are continuous and bounded.
The case $\varphi(t) \geqslant 0$ is considered. The case $\varphi(t) < 0$ is well known.