ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Danuta JAMA

Adam CZECH

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI PEWNEGO NIELINIOWEGO RÓWNANIA CAŁKOWEGO Z PRZYSPIESZONYM WYPRZEDZAJĄCYM ARGUMENTEM

Streszczenie. Praca jest poświęcona istnieniu i jednoznaczności ciągłego rozwiązania nieliniowego równania całkowo-operatorowego z wyprzedzającym argumentem o postaci:

$$u(t,x) = A(t)\varphi_1(x) + \lambda \int_0^r A(t - s)F(t,x,u\ s + \varphi(s))ds$$

dla $x \in \Omega$, $t \geqslant 0$.

Ω - obszar ograniczony w R^n.

$F(t,x,u)$ - funkcja ciągła względem u, spełniająca warunek Lipschitza względem u oraz $F(t,x,0) = 0$.
$A(t)$ - rodzina operatorów liniowych i ciągłych określonych na pewnej przestrzeni Banacha, spełniających dla każdego $t \geqslant 0$ poniższe oszacowanie:

$$\| A(t) \| \leqslant \gamma(t) ,$$

gdzie $\| \cdot \|$ jest normą w rozważanej przestrzeni Banacha, $\gamma(t)$ - ciągła, dodatnia i całkowalna funkcja dla $t \geqslant 0$.
Dla powyższego równania przy pewnych dodatkowych założeniach w pracy tej uzyskujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązania w przestrzeni $C(\Omega)$.

Rozpatrywane równanie jest ściśle związane poprzez teorię półgrup z ewolucyjnymi równaniami różniczkowymi w przestrzeniach Banacha i z ewolucyjnymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi, zawierającymi człon z wyprzedzającym argumentem.
W przeprowadzonych rozważaniach wykorzystana została zasada odwzorowań zwężających Banacha.

Podstawowe rezultaty

Rozpatrujemy równanie o postaci:

$$u(t,x) = A(t)\varphi_1(x) + \lambda \int_0^{\tau} A(t - s)F(t,x,u\ s + \varphi(s))ds \tag{1}$$

z warunkiem początkowym:

$$u(0,x) = \varphi_1(x). \tag{2}$$

Zakładamy, że rodzina operatorów $A(t,$ dla $t \geq 0$ tworzy półgrupę na przestrzeni $C(\Omega), \Omega$ - pewien ograniczony obszar w R^n. Warunek (2) jest wtedy spełniony przez każde rozwiązanie (1).
F jest funkcją ciągłą swoich argumentów.
λ - parametr rzeczywisty; $\varphi_1(x)$ - funkcja ciągła i ograniczona dla $x \in \Omega$; $\varphi(t)$ - funkcja ciągła i dodatnia dla $t \geq 0$.

Niech C będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych dla $t \geq 0$; $x \in \Omega$ z normą:

$$\|u\| = \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in \Omega} |u(t,x))| < \infty .$$

Założenia A

1. Operator $A(t)$ jest ciągły względem t, ograniczony i liniowy.
2. $\|A(t)\| \leq \gamma(t)$; (t)- funkcja ciągła, dodatnia i całkowalna dla $t \in (0,\infty)$
3. $\int_0^\infty \gamma(t-s)ds < \bar{c} < \infty$; $\gamma(t) < \bar{c}$, gdzie $\bar{c}$ - pewna stała dodatnia.
4. $F(t,x,u)$ - funkcja ciągła względem u w normie $\|\cdot\|$ oraz spełniająca warunek Lipschitza:

$$\sup_{x \in \Omega} |F(t,x,\bar{u}) - F(t,x,\bar{\bar{u}})| < k(t) \sup_{x \in \Omega} |\bar{u} - \bar{\bar{u}}| \tag{3}$$

$$F(t,x,p) = 0. \tag{4}$$

5. $\bigvee_{\substack{K=const \\ K > 0}} \bigwedge_{t \geq 0} k(t) \leq K.$

Przy powyższych założeniach rozpatrzmy operator $B(t)$ o postaci:

$$B(t)u = \lambda \int_0^t A(t-s)F(t,x,u(s+\varphi(s),x))ds.$$

Lemat 1

Jeżeli spełnione są założenia A, to operator $B(t)$, jest ciągły dla każdego $t \geq 0$.

Dowód

Niech $u_n \longrightarrow u$ w normie $\|\cdot\|$. Mamy:

$$B(t)u_n - B(t)u =$$

$$= \lambda \int_0^t A(t-s)\left[F(t,x,u_n(s+\varphi(s),x)) - F(t,x,u(s+\varphi(s),x))\right]ds.$$

Przechodząc do normy w powyższej równości otrzymujemy:

$$\|B(t)u_n - B(t)u\| \leq$$

$$\leq |\lambda| \, \|F(t,x,u_n(t+\varphi(t),x))-F(t,x,u(t+\varphi(t),x))\| \int_0^t \gamma(t-s)ds.$$

Ponieważ funkcja F jest ciągła w normie $\|\cdot\|$, a $\int_0^t \gamma(t-s)ds$ jest ograniczona na mocy założenia A, stąd:

$$\|B(t)u_n - B(t)u\| \longrightarrow 0, \quad \text{przy} \quad n \longrightarrow \infty$$

c.k.d.l.

L e m a t 2

Jeżeli spełnione są założenia A oraz $\bar{c}(1+|\lambda| K) < 1$, to operator $A(t) + B(t)$ przekształca sferę $\|u\| \leq R$ w przestrzeni C w siebie.

D o w ó d

Niech:

$$\sup_{x\in\Omega} |\varphi_1(x)| \leq R, \quad \sup_{t\geq 0} \sup_{x\in\Omega} |u(t,x)| \leq R. \tag{5}$$

Ponieważ funkcja $\varphi(t)$ jest dodatnia, więc:

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{x\in\Omega} |u(t+\varphi(t),x)| \leq \sup_{t\geq 0} \sup_{x\in\Omega} |u(t,x)|. \tag{6}$$

Na mocy założeń A i (5) mamy:

$$\|A(t)\varphi_1(x)\| \leq \gamma(t)R \leq \bar{x}R. \tag{7}$$

Z założeń A wynika, że

$$\|F(t,c,u(t,x)\| \leq K\|u(t,x)\|. \tag{8}$$

Z (8) i założeń A mamy:

$$\|B(t)u\| \leq |\lambda| \|F(t,x,u(t+\varphi(t),x))\| \int_0^t \gamma(t-s)ds \leq |\lambda| K \bar{c} R. \tag{9}$$

Wykorzystując (7) i (9) oraz założenia lematu otrzymujemy:

$$\|A(t)\varphi_1(x) + B(t)u\| \leq \|A(t)\varphi_1(x)\| + \|B(t)u\| \leq R(\bar{c}+|\lambda| K \bar{c}) \leq R.$$

c.k.d.l.

L e m a t 3

Jeżeli spełnione są założenia A, to operator $A(t) + B(t)$ odwzorowuje C w siebie.
Dowód przebiega analogicznie jak w lemacie 2.

Dla dalszych rozważań wprowadźmy funkcję o postaci:

$$\overline{\phi}(t,x) = A(t)\phi(0,x)+\lambda\int_0^t A(t-s)F(t,x,\phi(s+\varphi(s),x))ds, \tag{10}$$

gdzie:

$$\phi(t,x) \in C; \quad x \in \Omega; \quad t \geqslant 0.$$

L e m a t 4

Jeżeli spełnione są założenia lematu 2, to operator $A(t) + B(t)$ jest zwężający.

D o w ó d

Wykorzystując to, że $\|\phi(0,x)\| \leqslant \|\phi(t,x)\|$ oraz założenia lematu 2 otrzymujemy:

$$\|\overline{\phi}\| \leqslant \gamma(t)\|\phi(0,x)\| + |\lambda| K\|\phi\|\overline{c} \leqslant \overline{c}(1 + |\lambda| K)\|\phi\| < \|\phi\|$$

c.k.d.l.

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli spełnione są założenia lematu 2, to równanie (1)-(2) posiada ciągłe i ograniczone rozwiązanie i jest ono jedynym rozwiązaniem.
Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzenia o punkcie stałym Banaha oraz z lematów 2 i 3.

U w a g a 1

Jeżeli równanie (1)-(2) posiada rozwiązanie ograniczone (niekoniecznie ciągłe) i spełnione są założenia A oraz warunek $1 - \lambda\overline{c}K > 0$, to jest ono jedynym rozwiązaniem.

D o w ó d

Niech u_1, u_2 będą dwoma rozwiązaniami równania (1)-(2). Wtedy:

$$u_1-u_2 = \lambda\int_0^t A(t-s)\left[F(t,x,u_1(s+\varphi(s),x)) - F(t,x,u_2(s+\varphi(s),x))\right]ds.$$

Przechodząc do normy i wykorzystując założenia A mamy:

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant \lambda \bar{c} K \| u_1 - u_2 \| ,$$

stąd

$$\| u_1 - u_2 \| (1 - \lambda \bar{c} K) \leqslant 0.$$

A więc

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant 0, \quad \text{czyli} \quad u_1 - u_2 = 0.$$

c.k.d.u.

LITERATURA

[1] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.

[2] Tricomi F.G.: Integral Equations, Interscience Publishere Inc., New York-London 1957.

[3] Praca zbiorowa: Zarys teorii równań całkowych i równań równań różniczkowych cząstkowych, PWN, Warszawa 1981.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji 16.11.1988 r.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КАКОГО - ТО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С УСКОРЕННЫМ ОПЕРЕЖАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Р е з ю м е

В работе рассматривается сущкствованием и однозначность непрерывного решения нелинейного интегрально-операторного уравнения с опережающим аргументом вида

$$u(t,x) = A(t)\varphi_1(x) + \lambda \int_0^{\tau} A(t-s)F(t,x,u(s+\varphi(s),x))ds$$

для $x \in \Omega$, $t \geqslant 0$

Ω - ограниченная область R^n.

$F(t,x,u)$ - непрерывная функция по отношенс u отвечающая условиям Липшитца по отношению u а также $F(t,x,0) = 0$.

$A(t)$ - семейство линейных операторов и непрерывных определенных в некотором пространстве Банаха, отвечающиь для каждого $t \geqslant 0$ ниже поданная оценка

$$\| A(t) \| \leqslant \gamma(t)$$

где $\|\cdot\|$ является нормой в рассматриваемом пространстве Банаха $\gamma(t)$ - непрерывная, положительная и интегральная функция для $t \geq 0$.
Для выше указанного уравнения при определенных положительных исходных данных в этой статье получим существующие и однозначные решения в пространстве $C(\Omega)$.

Рассматриваемые уравнения тесно связаны с теорией полугрупп с эволюционными корпускулярными уравнениями, содержащими член с опережающим аргументом. В проведенных рассуждениях импользовался принцип суживающих отображений Банаха.

SOME PROPERTIES OF A INTEGRAL EQUATION WITH ADWANCED ARGUMENT

S u m m a r y

This article concerns the problem ef existence and uniqueness of the solution of the nonlinear integral equation

$$u(t,c) = A(t)\varphi_1(x) + \lambda \int_0^{\tau} A(t-s)F(t,x,u(s+\varphi(s))ds$$

for $x \in \Omega$, $t \geq 0$.
Ω is bounded in R^n, F - a funcion continuous on u satisfying the Lipschutz condition for u, and $F(t,x,0) = 0$.
$A(t)$ - a family of linear and continuous operators, defined in Banach space, such that for every $t \geq 0$, $\|A(t)\| \leq \gamma(t)$, where $\|\cdot\|$ is a norm in the Banach space, $\gamma(t)$ is a continuous, positive and integrable function for $t \geq 0$.
For given equation under some additional conditions the existence and uniqueness in $C(\Omega)$ is proved.
This equation is strictly connected by use of semigroups theory with evolution differential equations in Banach spaces and such equations with advanced argument.
The idea of Banach contract theorem was used.