ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Janina MACURA

NIERÓWNOŚCI GRUNSKY'EGO DLA FUNKCJI JEDNOLISTNYCH I NIEPARZYSTYCH

Streszczenie. W pracy rozważano funkcje jednolistne i nieparzyste. Za pomocą wzorów wariacyjnych wyprowadzono nierówności Grunsky'ego dla tej klasy funkcji.

Niech $H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $U = \{z: |z|<1\}$ z metryką niemal jednostajnej zbieżności, $H'(U)$ - przestrzeń sprzężoną, $S^{(2)}$ - rodzinę funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole U, spełniających warunki

$$F(-z) = -F(z), \quad F'(0) = 1. \tag{1}$$

W niniejszej pracy, korzystając z wariacji wewnętrznej Schiffera [2], wyprowadzimy nierówności Grunsky'ego dla funkcji rodziny $S^{(2)}$.

We wzorze wariacyjnym Schiffera dla funkcji jednolistnych w kole U

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon e^{i\alpha}\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_o)} - \varepsilon\frac{e^{i\alpha}}{2}\frac{f^2(z_o)}{(z_of'(z_o))^2}zf'(z)\frac{z+z_o}{z-z_o} +$$

$$+\varepsilon\frac{e^{-i\alpha}}{2}\left(\overline{\frac{f^2(z_o)}{(z_of'(z_o))^2}}\right)zf'(z)\frac{1+\bar{z}_oz}{1-\bar{z}_oz} + o(\varepsilon),$$

gdzie z_o jest dowolnym punktem koła U, α - dowolną liczbą rzeczywistą, $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U, podstawiamy z^2 w miejsce z, a następnie całość pierwiastkujemy. Otrzymujemy:

$$F^*(z) = \sqrt{f^*(z^2)} = \sqrt{f(z^2)}\left(1 + \varepsilon e^{i\alpha}\frac{f(z^2)}{f(z^2)-f(z_o^2)}\right. - \tag{2}$$

$$- \varepsilon \frac{e^{i\alpha}}{2} \frac{f^2(z_o^2)}{z_o^4 f'^2(z_o^2)} \frac{z^2 f'(z^2)}{f(z^2)} \frac{z^2+z_o^2}{z^2-z_o^2} +$$

$$+ \varepsilon \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(\overline{\frac{f^2(z_o^2)}{z_o^4 f'^2(z_o^2)}} \right) \frac{z^2 f'(z^2)}{f(z^2)} \frac{1+\bar{z}_o^2 z^2}{1-\bar{z}_o^2 z^2} \Big)^{1/2} + o(\varepsilon) . \tag{2}$$

Funkcje $\sqrt{f^*(z^2)}$, $\sqrt{f(z^2)}$ spełniają warunki (1), są holomorficzne i jednolistne, a więc należą do rodziny $S^{(2)}$.
Rozwijając prawą stronę (2) według wzoru Maclaurina względem ε oraz wykorzystując zależności $F^2(z) = f(z^2)$ i $F'(z) = \dfrac{zf'(z^2)}{\sqrt{f(z^2)}}$, otrzymujemy wzór wariacyjny dla funkcji klasy $S^{(2)}$:

$$F^*(z) = F(z) + \frac{1}{2} \varepsilon \Big(e^{i\alpha} \frac{F^3(z)}{F^2(z)-F^2(z_o)} -$$

$$- \frac{e^{i\alpha}}{2} \frac{F^2(z_o)}{z_o^2 F'^2(z_o)} zF'(z) \frac{z^2+z_o^2}{z^2-z_o^2} + \tag{3}$$

$$+ \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(\overline{\frac{F^2(z_o)}{z_o^2 F'^2(z_o)}} \right) zF'(z) \frac{1+\bar{z}_o^2 z^2}{1-\bar{z}_o^2 z^2} \Big) + o(\varepsilon).$$

Opierając się na wariacji zewnętrznej funkcji klasy S możemy zbudować analogiczną wariację dla funkcji nieparzystych. Niech $F \in S^{(2)}$ oraz $w_o \notin \overline{F(U)}$. Jeśli $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$, gdzie $f \in S$, to $w_o^2 \notin \overline{f(U)}$ i wariacja zewnętrzna funkcji f wyraża się wzorem [2]

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon e^{i\alpha} \frac{f^2(z)}{w_o^2 - f(z)} + o(\varepsilon), \quad \text{gdzie} \quad \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0,$$

gdy $\varepsilon \to 0^+$, niemal jednostajnie w U.
Kładąc z^2 w miejsce z i pierwiastkując, otrzymujemy:

$$F^*(z) = F(z) + \frac{1}{2} \varepsilon e^{i\alpha} \frac{F^3(z)}{w_o^2 - F^2(z)} + o(\varepsilon) . \tag{4}$$

Połóżmy teraz

$$k(z) = \frac{z}{(1+e^{-2i\alpha} z)^2}, \quad l(z) = \sqrt{k(z^2)} = \frac{z}{1+e^{-2i\alpha} z^2} .$$

Funkcja $\varphi(z) = l^{-1}((1-\varepsilon)l(z))$, gdzie $0<\varepsilon<1$, należy do rodziny $S^{(2)}$ oraz przekształca U w U. Ponadto, jeżeli $F\in S^{(2)}$, to również $F_1 = F\circ\varphi\in S^{(2)}$. Rozwijając teraz funkcję $F_1(z)$ według wzoru Maclaurina względem ε, otrzymujemy kolejną wariację funkcji F:

$$F_1(z) = F(z) - \varepsilon \frac{z(1+e^{-2i\alpha}z^2)}{1-e^{-2i\alpha}z^2} F'(z) + o(\varepsilon), \tag{5}$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0^+$, niemal jednostajnie w U.

Niech Φ będzie funkcjonałem rzeczywistym, określonym i ciągłym w rodzinie $S^{(2)}$. Załóżmy, że funkcjonał ten jest różniczkowalny w sensie Gâteaux w $S^{(2)}$, tzn. dla dowolnych F, $F^*\in S^{(2)}$ takich, że $F^* = F + \varepsilon H + o(\varepsilon)$, gdzie $H\in H(U)$, $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon\to 0$, niemal jednostajnie w U, zachodzi równość

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon \operatorname{Re}\{\wedge_F(H)\} + o(\varepsilon), \tag{6}$$

gdzie $\wedge_F \in H'(U)$.

Jeżeli funkcja $F\in S^{(2)}$ realizuje maksimum funkcjonału Φ, to ze względu na dowolność ε w równaniu (6) otrzymujemy:

$$\operatorname{Re}\{\wedge_F(H)\} = 0 . \tag{7}$$

Z (5), ze względu na dowolność dodatniego ε, wynika

$$\operatorname{Re}\left\{\wedge_F\left(zF'(z) \frac{1+e^{-2i\alpha}z^2}{1-e^{-2i\alpha}z^2}\right)\right\} \geqslant 0 . \tag{8}$$

Przyjmijmy teraz w (3)

$$\frac{1}{2}\Big(e^{i\alpha} \frac{F^3(z)}{F^2(z)-F^2(z_0)} - \frac{e^{i\alpha}}{2} \frac{F^2(z_0)}{z_0^2F'^2(z_0)} zF'(z) \frac{z^2+z_0^2}{z^2-z_0^2} +$$

$$+ \frac{e^{-i\alpha}}{2}\Big(\frac{\overline{F^2(z_0)}}{\overline{z_0^2F'^2(z_0)}}\Big)zF'(z) \frac{1+\bar{z}_0^2z^2}{1-\bar{z}_0^2z^2}\Big) = H .$$

Z (7) wynika, że

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(\Lambda_F\left(\frac{F^3(z)}{F^2(z)-F^2(z_0)}\right) - \frac{1}{2}\frac{F^2(z_0)}{z_0^2F'^2(z_0)}\left(\Lambda_F\left(zF'(z)\frac{z^2+z_0^2}{z^2-z_0^2}\right) - \overline{\Lambda_F\left(zF'(z)\frac{1+\bar{z}_0^2z^2}{1-\bar{z}_0^2z^2}\right)}\right)\right)\right\} = 0 .$$

Ponieważ α jest dowolną liczbą rzeczywistą, otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{z_0^2F'^2(z_0)}{F^2(z_0)}\Lambda_F\left(\frac{F^3(z)}{F^2(z)-F^2(z_0)}\right) = \frac{1}{2}\Lambda_F\left(zF'(z)\frac{z^2+z_0^2}{z^2-z_0^2}\right) - \overline{\left[\frac{1}{2}\Lambda_F\left(zF'(z)\frac{1+\bar{z}_0^2z^2}{1-\bar{z}_0^2z^2}\right)\right.}. \tag{9}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$z_0 = \zeta , \quad D(w) = \Lambda_F\left(\frac{F^3}{F^2-w^2}\right), \quad E(\zeta) = \Lambda_F\left(zF'\frac{z^2+\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\right). \tag{10}$$

Związek (9) możemy wtedy zapisać:

$$\frac{\zeta^2F'^2(\zeta)}{F^2(\zeta)}D(F(\zeta)) = \frac{1}{2}E(\zeta) + \frac{1}{2}\overline{E\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} . \tag{11}$$

Rzeczywistość prawej strony (9) na okręgu ∂U wynika z jej postaci, natomiast z (8) wynika, że jest ona na ∂U niedodatnia.
Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli Φ jest funkcjonałem rzeczywistym, różniczkowalnym w sensie Gâteaux w rodzinie $S^{(2)}$, F - funkcją realizującą maksimum funkcjonału Φ w tej rodzinie, Λ_F - jego pochodną w sensie Gâteaux, to zachodzi następujący związek:

$\frac{\zeta^2F'^2(\zeta)}{F^2(\zeta)}D(F(\zeta)) = \frac{1}{2}E(\zeta) + \frac{1}{2}\overline{E\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}$, gdzie $D(w)$, $E(\zeta)$ są zdefiniowane wzorami (10), ζ jest dowolnym, ustalonym punktem koła U; $\frac{1}{2}E(\zeta) + \frac{1}{2}\overline{E\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}$ jest rzeczywiste i niedodatnie na okręgu ∂U.

Jeżeli F jest funkcją realizującą maksimum funkcjonału Φ, to z równania (4), ze względu na dowolność α, otrzymujemy

$$\Lambda_F\left(\frac{F^3}{w_0^2-F^2}\right) = 0 .$$

Jeżeli zatem założymy, że $D(w) = \Lambda_F\left(\frac{F^3}{F^2-w^2}\right)$ jest funkcją meromorficzną $\not\equiv 0$ w C, to zbiór $U - F(U)$ nie ma punktów wewnętrznych. Istotnie, bo gdyby $U-F(U)$ zawierał punkt wewnętrzny w_0, to istniałoby pewne otoczenie kołowe K_0 tego punktu całkowicie zawarte w $U-\overline{F(U)}$, a więc dla każdego $w \in K_0$ zachodziłaby równość $D(w) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż $D(w)$ jest $\not\equiv 0$ funkcją meromorficzna. Możemy sformułować następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli $D(w)$ jest funkcją meromorficzną w $\mathbb{C}$ i nie jest tożsamościowo równa zero, to zbiór $U-F(U)$, gdzie F jest funkcją ekstremalną ze względu na funkcjonał Φ, nie ma punktów wewnętrznych.

Niech $L \in H'(U)$. Rozważmy funkcjonał:

$$\Phi(F) = \mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)\right\}, \tag{12}$$

gdzie $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w $U \times U$.

Funkcjonał Φ jest funkcjonałem określonym i ciągłym w rodzinie $S^{(2)}$. Ponieważ rodzina ta jest zwarta, więc Φ osiąga w $S^{(2)}$ swoje maksimum. Pochodna Gâteaux funkcjonału (12) wyraża się wzorem:

$$\Lambda_F(H) = 2L^2\left(\frac{H(z)F(\zeta)-H(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)}\right).$$

W przypadku naszego funkcjonału wzór (11) przyjmuje postać:

$$D(F(\zeta)) = -\,2F^2(\zeta)\left(L\left(\frac{F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)}\right)\right)^2 .$$

Prawa strona (11) jest, na mocy twierdzenia Caccioppoli-Köthego, holomorficzna co najmniej w pewnym pierścieniu $P = \left\{\zeta : r < |\zeta| < \frac{1}{r}\right\}$. Funkcja ekstremalna spełnia równanie

$$\zeta^2 F'^2(\zeta)\left(L\left(\frac{F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)}\right)\right)^2 = B(\zeta),$$

gdzie $B(\zeta) = -\frac{1}{4}(E(\zeta) + \overline{E(\frac{1}{\bar{\zeta}})})$ jest funkcją nieujemną na ∂U, holomorficzną w pierścieniu P. Rozumowanie podobne jak w [1] pozwala stwierdzić, że funkcja

$$\Psi(\zeta) = L\left(\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2}\right) + \overline{L\left(\frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta}^2 z^2}\right)}$$

jest holomorficzna w kole U i przedłuża się w sposób ciągły na $\overline{U}$, pozostając rzeczywistą na ∂U. W myśl uogólnionej zasady symetrii Riemanna-Schwarza funkcja $\Psi(\zeta)$ przedłuża się jako funkcja holomorficzna na płaszczyznę domkniętą $\overline{\mathbf{C}}$, a więc jest funkcją stałą. Ponieważ $\Psi(0) = 0$, więc otrzymujemy następującą równość:

$$L\left(\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2}\right) + \overline{L\left(\frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta}^2 z^2}\right)} = 0. \tag{13}$$

Ponadto zachodzą związki:

$$\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2} = -\frac{1}{2}\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)} \frac{z+\zeta}{z-\zeta},$$

$$\frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta}^2 z^2} = -\frac{1}{2}\bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \log \frac{1-\bar{\zeta} z}{1+\bar{\zeta} z}.$$

Po zastosowaniu powyższych związków do równania (13), otrzymujemy, ze względu na ciągłość L,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(L\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\log \frac{1-\bar{\zeta} z}{1+\bar{\zeta} z}\right)}\right) = 0,$$

A stąd po scałkowaniu:

$$L\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) = -\overline{L\left(\log \frac{1-\bar{\zeta} z}{1+\bar{\zeta} z}\right)}.$$

Po obłożeniu obu stron funkcjonałem L uzyskujemy:

$$L^2\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) = -|L|^2\overline{\left(\log \frac{1-\bar{\zeta} z}{1+\bar{\zeta} z}\right)}.$$

Możemy więc sformułować następujące twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli $F \in S^{(2)}$ jest funkcją maksymalną ze względu na funkcjonał (12), to spełnia ona następujące równanie:

$$L\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) = -\overline{L\left(\log \frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right)}\,.$$

Wartość funkcjonału (12) dla tej funkcji wynosi:

$$\Phi(F) = -\,|L|^2\left(\log \frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right).$$

T w i e r d z e n i e 4

Dla dowolnej funkcji $F \in S^{(2)}$ zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)\right\} \leqslant -\,|L|^2\left(\log \frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right). \tag{14}$$

Zastosujemy teraz powyższe twierdzenia do oszacowania pewnych funkcjonałów w rodzinie $S^{(2)}$.

1. Niech $L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (H(z_m)-H(0))$, gdzie $H \in H(U)$, λ_m są dowolnymi liczbami zespolonymi, z_m - dowolnymi punktami koła U, $m=1,2,\dots,N$. Zachodzi $L(1) = 0$. Jeśli F jest dowolną funkcją rodziny $S^{(2)}$, to spełnia ona, zgodnie z twierdzeniem 4, następującą nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m\lambda_n \log \frac{F(z_m)-F(z_n)}{F(z_m)+F(z_n)}\,\frac{z_m+z_n}{z_m-z_n}\right\} \leqslant -\sum_{m,n=1}^{N} \bar{\lambda}_m\lambda_n \log \frac{1-z_n\bar{z}_m}{1+z_n\bar{z}_m}\,. \tag{15}$$

W przypadku, gdy $m=n$, jako wartość ilorazu $\frac{F(z_m)-F(z_n)}{z_m-z_n}$ przyjmujemy $F'(z_m)$. Funkcja realizująca maksimum funkcjonału (12) spełnia równanie:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log \frac{F(z_m)-F(\zeta)}{F(z_m)+F(\zeta)}\,\frac{z_m+\zeta}{z_m-\zeta} = -\sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log \frac{1-\zeta\bar{z}_m}{1+\zeta\bar{z}_m}\,.$$

W szczególnym przypadku, gdy w nierówności (15) podstawimy $N=1$, $z_1=z$, $\lambda_1=1$, otrzymujemy:

$$\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\,.$$

Funkcja ekstremalna spełnia wtedy związek:

$$\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} = \frac{1+\zeta\bar{z}}{1-\zeta\bar{z}} \,.$$

2. Połóżmy teraz $L(H) = \sum_{m=1}^{N}\lambda_m H'(z_m)$, gdzie $H \in H\,(U)$, λ_m są dowolnymi liczbami zespolonymi, z_m - dowolnymi punktami koła U, $m=1,\dots,N$. Dla tak zdefiniowanego funkcjonału nierówność (14) przyjmuje postać:

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N}\lambda_m\lambda_n\left(\frac{F'(z_m)F'(z_n)(F^2(z_m)+F^2(z_n))}{(F^2(z_m)-F^2(z_n))^2} - \frac{z_m^2+z_n^2}{(z_m^2-z_n^2)^2}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m,n=1}^{N}\bar{\lambda}_m\lambda_n\,\frac{1+z_n^2\bar{z}_m^2}{(1-z_n^2\bar{z}_m^2)^2} \,. \tag{16}$$

W przypadku gdy $z_m=z_n$ bądź $z_m=-z_n$, przyjmujemy:

$$\frac{F'(z_m)F'(z_n)(F^2(z_m)+F^2(z_n))}{(F^2(z_m)-F^2(z_n))^2} - \frac{z_m^2+z_n^2}{(z_m^2-z_n^2)^2} =$$

$$= \lim_{z\to\pm z_m}\left(\frac{F'(z_m)F'(z)(F^2(z_m)+F^2(z))}{(F^2(z_m)-F^2(z))^2} - \frac{z_m^2+z^2}{(z_m^2-z^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z_m)}{F(z_m)}\right)^2 - \frac{1}{z_m^2}\right) + \frac{1}{12}\,\frac{F'''(z_m)}{F'(z_m)} - \frac{1}{8}\left(\frac{F''(z_m)}{F'(z_m)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z_m)}{F(z_m)}\right)^2 - \frac{1}{z_m^2}\right) + \frac{1}{12}\left\{F(z_m),z_m\right\} ,$$

gdzie $\{F(z),z\}$ oznacza operator Schwarza w punkcie z.

Funkcja ekstremalna spełnia równanie:

$$\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\left(\frac{F'(z_m)F(\zeta)}{F^2(z_m)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta}{z_m^2-\zeta^2}\right) = \sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\,\frac{\zeta}{1-\zeta^2\bar{z}_m^2} \,.$$

W szczególności, przyjmując w nierówności (16) $N=1, z_1=z, \lambda_1=\lambda$, otrzymujemy:

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda^2\left(\frac{1}{12}\{F(z),z\} + \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)^2 - \frac{1}{z^2}\right)\right)\right\} \leq |\lambda|^2 \frac{1+|z|^4}{(1-|z|^4)^2} .$$

3. Niech $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sup|\lambda_n|^{1/n} < 1$, Na mocy twierdzenia Töplitza istnieje funkcjonał $L \in H'(U)$ taki, że $L(z^n) = \lambda_n$, $n=1,2,\ldots$, $L(1)=0$.
Przyjmujemy oznaczenia

$$\log \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)} \frac{z+\zeta}{z-\zeta} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(F)z^m\zeta^n .$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 dowolna funkcja $F \in S^{(2)}$ spełnia nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(F)\lambda_m\lambda_n\right\} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_{2n-1}|^2}{2n-1} .$$

Dla funkcji realizującej maksimum funkcjonału zachodzą związki:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mo}(F)\lambda_m = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}(F)\lambda_m = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n=2k, \quad k=1,2,\ldots \\ \dfrac{2\bar{\lambda}_n}{n} & \text{gdy } n=2k-1, \quad k=1,2,\ldots \end{cases}$$

LITERATURA

[1] Miśta K.: Wzory wariacyjne w pewnej podklasie funkcji jednolistnych i ich zastosowanie (praca oddana do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej).

[2] Pommerenke Ch.: Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1976.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji 15.02.1984 r.

НЕРАВНОСТИ ГРУНСКОГО ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассматривается класс $S^{(2)}$ голоморфных и однолистных функций в единичном круге которые удовлетваряют условиям $F(-z)= -F(z)$, $F'(0)=1$. При помощи вариационных формул для класса S получаются аналогичное формулы для класса $S^{(2)}$ затем выводится равенство типа Шифера. Это ревенство используется для получения максимальных значении нескольких важных функционалов для класса $S^{(2)}$ также для получения неравенства Грунского для этого класса функций. Первый из рассматриваемых функционалов это функционал

$$L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (H(z_m) - H(0)),$$

второй - $L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m H'(z_m)$, где H это функция голоморфная в единичном круге U, λ_m-любые комплексные числа, z_m - любые точки круга U.
Третий из рассматриваемых функционалов это, существующий согласно теореме Топлица, функционал L такой, что $L(z^n) = \lambda_n (n = 1,2,\dots)$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ - любая последность комплексных чисел такая, что $\limsup_{n\to\infty}|\lambda_n|^{\frac{1}{n}}<1$.

GRUNSHY'S INEQUALITIES FOR UNIVALENT ADD FUNCTIONS

S u m m a r y

In the paper the class $S^{(2)}$ of analytic and univalent in the unit disc U functions such that $F(-z) = -F(z)$ and $F(0) = 1$ is considered. By using variational formulas in the class S the analogous formulas in the class $S^{(2)}$ are obtained, then the equation of Schiffer type is derived. This equation is applied to obtain maxima of some important functionals in the class $S^{(2)}$ and also to obtain the Grunsky's inequality for functions of this class. The first of considered functionals is

$$L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (H(z_m) - H(0)),$$ the second one is

$$L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m H'(z_m),$$ where H is an analytic in the unit disc function, λ_m are arbitrary complex numbers, z_m are arbitrary points of the disc U. The third functional is functional L existing according to the Toplitz theorem such, that $L(z^n) = \lambda_n$ $(n=1,2,\dots)$, where $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an arbitrary sequence of complex numbers and the sequence satisfies the condition $\limsup_{n\to\infty}|\lambda_n|^{1/n} < 1$.