ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Karol PETHE

O ZBIORZE WARTOŚCI PEWNEGO FUNKCJONAŁU OKREŚLONEGO W KLASACH FUNKCJI JEDNOLISTNYCH K-SYMETRYCZNYCH I OGRANICZONYCH

Streszczenie. Korzystając z metody Löwnera oraz lematu wariacyjnego I.E. Bazilewicza [1] określono zbiór wartości pewnego funkcjonału w klasach $S_k(M)$ i $\sum_k(m)$. Wykazano, że zbiór $D_{\alpha M}$ wartości funkcjonału

$$I(f) = \mathrm{Re}(c_{k+1}) + i\,\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}), \quad -\infty < \alpha < \infty$$

w klasie $S_k(M)$ funkcji $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1}$, $|z|<1$,

jest zbiorem spójnym i domkniętym. Jego przekrój prostą pionową w płaszczyźnie $I = X + iY$ jest określony parametrycznie warunkami:

a) jeżeli $0 \leq s \leq k\ln M$, to

$$X = \pm \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right]$$

$$\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-(1-M^{-2k}) \leq Y \leq \frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}+\frac{1}{k}(1+M^{-2k}),$$

b) jeżeli $s > k\ln M$, to

$$X = \pm 2e^{-s}\ln M$$

$$\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-(1-M^{-2k}) \leq Y \leq \frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-4e^{-2s}\ln M+\frac{1}{k}(1-M^{-2k}).$$

Wykazano również, że zbiór $\Delta_{\alpha m}$ wartości funkcjonału

$$I(F) = \mathrm{Re}(\gamma_{k-1}) + i\,\mathrm{Re}(\gamma_{2k-1} - \gamma_{k-1}^2 + \alpha\gamma_{k-1}), \quad -\infty < \alpha < \infty$$

w klasie $\sum_k(m)$, funkcji $F(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nk-1}\zeta^{-nk+1}$, $|\zeta|>1$,

jest domknięty i spójny. Jego przekrój prostą pionową w płaszczyźnie $I = U + iV$ jest określony warunkami:

a) jeżeli $0 \leq s \leq k\ln(m^{-1})$, to

$$U = \pm \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - m^{2k}\right]$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}-\frac{1}{k}(1+m^{2k}) \leq V \leq -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k}),$$

b) jeżeli $s > k\ln(m^{-1})$, to

$$U = \pm 2e^{-s}\ln(m^{-1})$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+4e^{-2s}\ln(m^{-1})-\frac{1}{k}(1-m^{2k}) \leq V \leq -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k}).$$

1. Niech $S_k(M)$ oznacza klasę funkcji o postaci:

$$f(z) = z + c_{k+1}z^{k+1} + c_{2k+1}z^{2k+1} + \cdots \tag{1.1}$$

jednolistnych k-symetrycznych w kole $\{|z| < 1\}$ i spełniających warunek $|f(z)| < M$, gdzie $M = \text{const.} > 1$.

$S_k^{-1}(M)$ niech oznacza klasę funkcji odwrotnych, mających w dostatecznie małym otoczeniu $\omega = 0$ rozwinięcie:

$$\varphi(\omega) = \omega + c_{k+1}\omega^{k+1} + c_{2k+1}\omega^{2k+1} + \cdots \tag{1.2}$$

Przez $\sum_k(m)$ oznaczmy klasę funkcji postaci:

$$F(\zeta) = \zeta + \frac{\gamma_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \frac{\gamma_{2k-1}}{\zeta^{2k-1}} + \cdots, \quad |F(\zeta)| > m, \tag{1.3}$$

otrzymanych z funkcji klasy $S_k(M)$ znanym przekształceniem $F(\zeta) = f^{-1}(\frac{1}{\zeta})$, $|\zeta| > 1$, a przez $\sum_k^{-1}(m)$ odpowiednią klasę funkcji odwrotnych, mających w otoczeniu $\omega = \infty$ rozwinięcie:

$$\Phi(\omega) = \omega + \frac{\gamma'_{k-1}}{\omega^{k-1}} + \frac{\gamma'_{2k-1}}{\omega^{2k-1}} + \cdots \tag{1.4}$$

W jednej ze swoich prac [1] I.E. Bazilewicz zbadał metodą Löwnera obszar wartości układu współczynników początkowych w klasach $S_k(M)$, $\sum_k(m)$. Tak np. na klasie $S_k(M)$ funkcji (1.1.) określił obszary wartości układów (a_{k+1}, a_{2k+1}) i

$$(|c_{k+1}|, |c_{2k+1}|), \quad c_{nk+1} = a_{nk+1} + b_{nk+1}, \quad k=1,2 \ldots$$

oraz podał dla tych obszarów wszystkie funkcje ekstremalne.

W niniejszej pracy idea I.E. Bazilewicza zostanie zaadoptowana do wyznaczenia zbioru wartości funkcjonału $I(f) = \mathrm{Re}(c_{k+1}) + i\,\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha\cdot c_{k+1})$, określonego na klasie $S_k(M)$ i $\sum_k(m)$ oraz odpowiednich klasach funkcji odwrotnych.

2. Oznaczmy przez $D_{\alpha M}$ zbiór wartości funkcjonału

$$I(f) = \mathrm{Re}(c_{k+1}) + i\,\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}), \quad f \in S_k(M), \tag{2.1}$$

gdzie α i M są dowolnymi ustalonymi liczbami spełniającymi warunki: $-\infty < \alpha < +\infty$, $M > 1$.

Wiadomo, że współczynniki c_{k+1} i c_{2k+1} można przedstawić następującymi wzorami Löwnera:

$$c_{k+1} = -\frac{2}{k}\int_0^T e^{-t}\,k(t)dt, \qquad T = k\ln M, \tag{2.2}$$

$$c_{2k+1} = \frac{k+1}{2}\,c_{k+1}^2 - \frac{2}{k}\int_0^T e^{-2t}\,k^2(t)dt,$$

w których $k(t) = e^{iQ(t)}$, gdzie $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w przedziale $\langle 0,T\rangle$.
Wzory te otrzymuje się ze znanego równania Löwnera dla funkcji k-symetrycznych i nierówności $\left|e^{\frac{T}{k}} f(z,T)\right| < M$, która wynika z przynależności funkcji $e^T f(z,T) = z + c_{k+1}z^{k+1} + c_{2k+1}z^{2k+1} + \dots$, do klasy $S_k(M)$.

Połóżmy $c_{k+1} = a_{k+1} + i\,b_{k+1}$, $c_{2k+1} = a_{2k+1} + b_{2k+1}$.

Ze wzorów (2.2) otrzymamy wzory dla a_{k+1}, b_{k+1} oraz a_{2k+1}.

$$\begin{cases} a_{k+1} = -\dfrac{2}{k}\displaystyle\int_0^{k\ln M} e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad b_{k+1} = -\dfrac{2}{k}\displaystyle\int_0^{k\ln M} e^{-t}\sin Q(t)dt \\[2ex] a_{2k+1} = \dfrac{k+1}{2}(a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) - \dfrac{2}{k}\displaystyle\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \end{cases} \tag{2.3}$$

zaś dla funkcjonału (2.1) otrzymamy:

$$I(f) = a_{k+1} + i\left[\frac{k-1}{2}(a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2)+\alpha a_{k+1} - \frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt\right] \quad (2.4)$$

Połóżmy

$$\begin{cases} X = a_{k+1} \\ Y = \frac{k-1}{2}(X^2-b_{k+1}^2)+\alpha X - \frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \end{cases} \quad (2.5)$$

a następnie oznaczmy przez $\overline{Y}(X)$ i $\underline{Y}(X)$ odpowiednio największą i najmniejszą wartość Y przy ustalonym X z przedziału

$$\left\langle -\frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{M^k}\right), \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{M^k}\right)\right\rangle .$$

T w i e r d z e n i e 1

Dla każdego ustalonego X z przedziału

$$\left\langle -\frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{M^k}\right), \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{M^k}\right)\right\rangle \quad i \quad \alpha \in (-\infty, +\infty),$$

$\overline{Y}(X)$ jest określona w klasie $S_k(M)$ parametrycznie równościami

$$\begin{cases} \pm X = \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right] \\ \overline{Y}(X) = \frac{k-1}{2}X^2 + \alpha X - \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \end{cases} \quad (2.6)$$

gdy $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$

$$\begin{cases} \pm X = 2e^{-s}\ln M \\ \overline{Y}(X) = \frac{k-1}{2}X^2 + \alpha X - 4e^{-2s}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \end{cases} \quad (2.7)$$

gdy $s > k\ln M$.

Równości (2.6) są osiągnięte tylko dla funkcji

$$\pm e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t \leqslant k\ln M, \end{cases} \quad (2.8)$$

a nierówności (2.7) tylko dla funkcji:

$$\pm\, e^{-t}\cos Q(t) = e^{-s}, \qquad s > k\ln M. \tag{2.8}$$

D o w ó d

Uwzględniając w (2.5) tożsamość $\cos 2Q(t) = 2\cos^2 Q(t)-1$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} X = a_{k+1} \\ Y = \frac{k-1}{2}(X^2-b_{k+1}^2)+ X - \frac{4}{k} \int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \end{cases} \tag{2.9}$$

Ze względu na to, że zmiana $Q(t)$ na $Q(t)+\pi$ wobec (2.3) zmienia X i b_{k+1} na $-X$ i $-b_{k+1}$, lecz nie zmienia pierwszego i trzeciego wyrazu w (2.9), oraz faktu, że

$\alpha X > 0$, jeśli α i X są tych samych znaków,

$\alpha X < 0$, gdy α i X są różnych znaków,

wynika, że w dowodzie twierdzenia wystarczy rozpatrywać X tylko z przedziału $\langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$.

Ustalmy zatem $X \in \langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$, tj. niech

$$0 \leqslant \int\limits_0^{k\ln M} e^{-t}\cos Q(t)dt = \text{const} \leqslant 1-M^{-k}. \tag{2.10}$$

Wówczas dla wyznaczenia $\overline{Y}(X)$ wystarczy znaleźć największą wartość prawej strony (2.9) przy warunku (2.10). Prawa strona (2.9) osiągnie swoją największą wartość wtedy, gdy $b_{k+1} = 0$ oraz gdy przy warunku (2.10) wartość całki

$$\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt \tag{2.11}$$

będzie najmniejsza. Na podstawie lematu wariacyjnego I.E. Bazilewicza [1] funkcją $Q(t)$, dla której jednocześnie $b_{k+1} = 0$ i całka (2.11) przy warunku (2.10) osiąga swoją najmniejszą wartość, jest funkcja zdefiniowana związkami:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t \leqslant k\ln M \end{cases} \tag{2.12}$$

bądź

$$e^{-t}\cos Q(t) = e^{-s} \quad , \qquad s > k\ln M,$$

gdzie s zależy tylko od X. Jeżeli teraz obliczymy X i Y dla tych funkcji, to otrzymamy równości (2.6) i (2.7) twierdzenia, a $b_{k+1} = 0$ przy odpowiednim rozbiciu przedziału $\langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$ na takie dwie części, na których funkcja $Q(t)$ ma przeciwne znaki.

T w i e r d z e n i e 2

Dla każdego ustalonego $X \in \langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}), \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\underline{Y}(X)$ jest określona w klasie $S_k(M)$ równością:

$$\underline{Y}(X) = \frac{k-1}{2} X^2 + \alpha X - (1-M^{-2k}). \tag{2.14}$$

Równość ta jest osiągnięta dla takiej funkcji $Q(t)$, która przyjmuje tylko dwie wartości $0, \pi$.

D o w ó d

Załóżmy, że $b_{k+1} = 0$. Ze wzoru (2.9) łatwo zauważyć, że do otrzymania najmniejszej wartości $Y(X)$ przy ustalonym $X \in \langle -\frac{2}{k}(1 - M^{-k}), \frac{2}{k}(1 - M^{-k})\rangle$ i $b_{k+1} = 0$ wystarczy, by:

$$\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt = \max \int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt = \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{2.15}$$

a to może zachodzić tylko wtedy, gdy $\cos^2 Q(t) \equiv 1$.
Tak więc można zdefiniować funkcję $Q(t)$, że

$$\{Q(t)\} = \{0, \pi\}. \tag{2.16}$$

Z drugiej strony dla takiej funkcji $Q(t)$ $b_{k+1} = 0$, zaś X może przyjmować dowolną wartość z przedziału $\langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}), \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$ przy odpowiednio dobranej długości takiego przedziału, na którym $Q(t) \equiv 0$.

T w i e r d z e n i e 3

Zbiór $D_{\alpha M}$ płaszczyzny $I = X + iY$ ograniczony krzywymi $\overline{Y}(X)$ i $\underline{Y}(X)$ jest zbiorem domkniętym i spójnym.

D o w ó d

Rozpatrzmy funkcję:

$$\varphi(t) = e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t \leqslant t_0 \\ -e^{-t}, & t_0 < t \leqslant k\ln M \end{cases} \tag{2.17}$$

dla której

$$\frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} \varphi(t)dt = X \text{ i } b_{k+1} = 0.$$

Zauważmy, że funkcja (2.17) dla $t_0 = k\ln M$ pokrywa się z funkcją ekstremalną z tw. 1, a dla $s = 0$ z funkcją ekstremalną z tw. 2. Zmieniając teraz w sposób ciągły t_0 od $k\ln M$ do takiej wartości t_1, dla której $s(t_1) = 0$, otrzymamy wszystkie wewnętrzne punkty odcinka leżącego na prostej $X = \text{const}$ i łączącego punkty wyznaczonych krzywych $\overline{Y}(X)$ i $\underline{Y}(X)$, tj. punkty brzegu obszaru $D_{\alpha M}$. Oznacza to, że zbiór $D_{\alpha M}$ jest zbiorem domkniętym i spójnym.

W n i o s e k 1

Zbiór $D_{\alpha\infty}$ wartości funkcjonału

$$I(f) = \operatorname{Re}(c_2) + i\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2), \qquad f \in S$$

jest zbiorem domkniętym i spójnym. Jego przekrój prostą $X = \text{const}$ w płaszczyźnie $I = X + iY$ jest określony warunkami:

$$X = 2(1+s)e^{-s}$$

$$\alpha X - 1 \leqslant Y \leqslant \alpha X - 2(1+2s)e^{-2s} + 1.$$

3. Niech $D'_{\alpha M}$ oznacza zbiór wartości funkcjonału

$$I'(\varphi) = \operatorname{Re}(c'_{k+1}) + i\operatorname{Re}(c'_{2k+1} - c'^2_{k+1} + \alpha c'_{k+1}), \quad \varphi \in S_k^{-1}(M). \tag{3.1}$$

Ponieważ

$$c'_{k+1} = -c_{k+1}, \quad c'_{2k+1} = -c_{2k+1} + (k+1)c_{k+1}^2,$$

to wobec (2.2) i (3.1) otrzymamy:

$$\begin{cases} a'_{k+1} = \frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad b'_{k+1} = \frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-t}\sin Q(t)dt \\ a'_{2k+1} = \frac{k+1}{2}(a'^2_{k+1} - b'^2_{k+1}) + \frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt \end{cases} \tag{3.2}$$

$$I'(\varphi) = a'_{k+1} + i\left[\frac{k-1}{2}(a'^2_{k+1} - b'^2_{k+1}) + \alpha a'_{k+1} + \frac{4}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt - \frac{1}{k}(1-M^{-2k})\right] \tag{3.3}$$

Niech

$$\begin{cases} X' = a'_{k+1} \\ Y' = \frac{k-1}{2}(X'^2 - b'^2_{k+1}) + \alpha X' + \frac{4}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt - \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \end{cases} \tag{3.4}$$

a $\overline{Y}'(X')$ i $\underline{Y}'(X')$ niech oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą wartość Y' przy ustalonym X' z przedziału

$$\left\langle -\frac{2}{k}(1 - M^{-k}),\ \frac{2}{k}(1 - M^{-k})\right\rangle .$$

T w i e r d z e n i e 4

Na klasie $S_k^{-1}(M)$ dla każdego ustalonego

$$X' \in \left\langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}),\ \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right\rangle, \quad \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

$$\overline{Y}'(X') = \frac{k-1}{2}X'^2 + \alpha X' + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{3.5}$$

Równość jest osiągnięta dla funkcji $Q(t)$ przyjmującej tylko dwie wartości $0, \pi$.

D o w ó d

Dla osiągnięcia przez $Y'(X')$ w (3.4) swojej maksymalnej wartości wystarczy, ażeby

$$b'_{k+1} = 0,\ \frac{4}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt = \max \frac{4}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt = \frac{2}{k}(1-M^{-2k})$$

a to zachodzi tylko dla funkcji (2.16).

T w i e r d z e n i e 5

Jeżeli $b'_{k+1} = 0$, to dla każdego ustalonego X' z przedziału

$$\left\langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}),\ \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right\rangle, \quad \alpha\in(-\infty,\ +\infty)$$

najmniejsza wartość $Y'(X')$ na klasie $S_k^{-1}(M)$ jest określona równościami:

$$\begin{cases} \pm X' = \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right], \\ \underline{Y}'(X') = \frac{k-1}{2}X'^2 + \alpha X' + \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} - \frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \end{cases} \tag{3.6}$$

gdy $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$,

$$\begin{cases} \pm X' = 2\,e^{-s}\ln M, \\ \underline{Y}'(X') = \frac{k-1}{2}X'^2 + \alpha X' + 4\,e^{-2s}\ln M - \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \end{cases} \tag{3.7}$$

gdy $s > k\ln M$.

Równość (3.6) zachodzi tylko dla funkcji (2.12), a równość (3.7) dla funkcji (2.13).

D o w ó d

Łatwo zauważyć, że dla $b'_{k+1} = 0$ dowód twierdzenia wynika z (3.4) i dowodu tw. 1. Jeżeli zatem obliczymy X' i $Y'(X')$ dla funkcji (2.12), to otrzymamy równości (3.6), a dla funkcji (2.13) równości (3.7) twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 6

Zbiór $D'_{\alpha M}$ płaszczyzny $I' = X' + iY$ ograniczony krzywymi $\overline{Y}'(X')$ i $\underline{Y}'(X')$ jest zbiorem domkniętym i spójnym.

Dowód twierdzenia przebiega tak jak dowód tw. 3.

4. Przez $\Delta_{\alpha m}$ oznaczmy zbiór wartości funkcjonału

$$I(F) = \mathrm{Re}(\gamma_{k-1}) + i\,\mathrm{Re}(\gamma_{2k-1} - \gamma_{k-1}^2 + \alpha\gamma_{k-1}, \quad F \in \textstyle\sum_k(m). \tag{4.1}$$

Korzystając z przekształcenia $F(\zeta) = f^{-1}(\frac{1}{\zeta})$ oraz ze wzorów (2.2), (2.3), (4.1), kładąc przy tym $\gamma_{k-1} = \alpha_{k-1} + i\,\beta_{k-1}$, $\gamma 2k-1 = \alpha 2k-1 + i\,\beta 2k-1$, otrzymujemy kolejno $\gamma_{k-1} = -c_{k+1}$, $\gamma_{2k-1} = c_{k+1}^2 - c_{2k+1}$

$$\begin{cases} \gamma_{k-1} = \frac{2}{k} \int\limits_0^T e^{-t}\, k(t)dt\,, \qquad T = k\ln(m^{-1}), \\[2ex] \gamma_{2k-1} = \frac{2}{k} \int\limits_0^T e^{-2t}\, k^2(t)dt - \frac{k-1}{2}\, \gamma_{k-1}^2\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} = \frac{2}{k} \int\limits_0^T e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad \beta_{k-1} = \frac{2}{k} \int\limits_0^T e^{-t}\sin Q(t)dt \\[2ex] \alpha_{2k-1} = -\frac{k-1}{2}(\alpha_{k-1}^2 - \beta_{k-1}^2) + \frac{2}{k} \int\limits_0^T e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$I(f) = \alpha_{k-1} + i\left[-\frac{k+1}{2}(\alpha_{k-1}^2 - {}^{2}_{k-1}) + \alpha\cdot\alpha_{k-1} + \frac{2}{k}\int\limits_0^T e^{-2t}\cos 2Q(t)dt\right] \tag{4.4}$$

Połóżmy

$$\begin{cases} U = \alpha_{k-1}\,, \\[2ex] V = -\frac{k+1}{2}(U^2 - \beta_{k-1}^2) + \alpha U + \frac{4}{k} \int\limits_0^{k\ln(m^{-1})} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt - \frac{1}{k}(1-m^{2k}) \end{cases} \tag{4,5}$$

i oznaczmy przez $\overline{V}(U)$ największą, a przez $\underline{V}(U)$ najmniejszą wartość V przy ustalonym U z przedziału $\langle -\frac{2}{k}(1-m^k),\ \frac{2}{k}(1-m^k)\rangle$.

T w i e r d z e n i e 7

Jeżeli $\beta_{k-1} = 0$, to dla każdego ustalonego $U \in \langle -\frac{2}{k}(1-m^k), \frac{2}{k}(1-m^k) \rangle$ i $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ największa wartość $V(U)$ dana jest wzorem:

$$\overline{V}(U) = -\frac{k+1}{2}U^2 + \alpha U + \frac{1}{k}(1+m^{2k}). \tag{4.6}$$

Równość ta jest osiągnięta tylko dla funkcji (2.16).
Dowód jest analogiczny do dowodu tw. 4.

T w i e r d z e n i e 8

Dla każdego ustalonego U z przedziału $\langle -\frac{2}{k}(1-m^k), \frac{2}{k}(1-m^k) \rangle$ i $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\underline{V}(U)$ wyraża się równościami:

$$\begin{cases} U = \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - m^{2k}\right], \\ \underline{V}(U) = -\frac{k+1}{2}U^2 + \alpha U + \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} - \frac{1}{k}(1+m^{2k}), \end{cases} \tag{4.7}$$

gdy $0 \leqslant s \leqslant k\ln(m^{-1})$ i

$$\begin{cases} U = 2e^{-s}\ln(m^{-1}), \\ \underline{V}(U) = -\frac{k+1}{2}U^2 + \alpha U + 4e^{-2s}\ln(m^{-1}) - \frac{1}{k}(1-m^{2k}), \end{cases} \tag{4.8}$$

gdy $s \geqslant k\ln(m^{-1})$,

przy czym funkcjami ekstremalnymi są tylko funkcje (2.12) i (2.13).
Dowód twierdzenia wynika z (4.5) i dowodu tw. 1.

T w i e r d z e n i e 9

Zbiór $\Delta_{\alpha M}$ ograniczony krzywymi $\overline{V}(U)$ i $\underline{V}(U)$ jest zbiorem domkniętym i spójnym.
Dowód jest identyczny z dowodem tw. 3.

5. Rozpatrzmy jeszcze zbiór $\Delta'_{\alpha M}$ wartości funkcjonału

$$I'(\Phi) = \mathrm{Re}(\gamma'_{k-1}) + i\,\mathrm{Re}(\gamma'_{2k-1} - \gamma^2_{k-1} + \alpha\gamma'_{k-1}),\ \Phi \in \sum\nolimits_k^{-1}(m). \tag{5.1}$$

Poniewaz

$$\gamma'_{k-1} = -\gamma_{k-1} \quad i \quad \gamma'_{2k-1} = -\gamma_{2k-1} - (k-1)\gamma^2_{k-1} ,$$

to

$$\begin{cases} \alpha'_{k-1} = -\frac{2}{k}\int_0^T e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad \beta'_{k-1} = -\frac{2}{k}\int_0^T e^{-t}\sin Q(t)dt, \quad T=k\ln(m^{-1}), \\ \alpha'_{2k-1} = -\frac{k-1}{2}(\alpha'^2_{k-1} - \beta'^2_{k-1}) - \frac{2}{k}\int_0^T e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$I'(\Phi) = \alpha'_{k-1} + i\left[-\frac{k+1}{2}(\alpha'^2_{k-1} - \beta^2_{k-1}) + \alpha\cdot\alpha'_{k-1} - \frac{2}{k}\int_0^{k\ln(m^{-1})} e^{-2t}, \cos 2Q(t)dt\right]. \tag{5.3}$$

Niech

$$\begin{cases} U' = \alpha'_{k-1} \\ V' = -\frac{k+1}{2}(U'^2 - \beta'^2_{k-1}) + \alpha U' - \frac{4}{k}\int_0^{k\ln(m^{-1})} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt + \frac{1}{k}(1-m^{2k}), \end{cases} \tag{5.4}$$

a $\overline{V}'(U')$ i $\underline{V}'(U')$ niech będzie odpowiednio największą i najmniejszą wartością $V'(U')$ przy ustalonym $U' \in \langle -\frac{2}{k}(1-m^k), \frac{2}{k}(1-m^k)\rangle$.

T w i e r d z e n i e 10

Jeżeli $\beta'_{k-1} = 0$, to dla każdego ustalonego

$$U \in \langle -\frac{2}{k}(1-m^k), \frac{2}{k}(1-m^k)\rangle, \quad \alpha' \in (-\infty, +\infty),$$

$\overline{V}'(U')$ ma postać:

$$\begin{cases} \pm U' = \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - m^k\right], \\ \overline{V}'(U') = -\frac{k+1}{2}U'^2 + \alpha U' - \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+m^{2k}), \end{cases} \tag{5.5}$$

jeśli $0 \leqslant s \leqslant k\ln(m^{-1})$,

$$\begin{cases} \pm U' = 2e^{-s}\ln(m^{-1}), \\ \overline{V}'(U') = -\frac{k+1}{2}U'^2 + \alpha U' - 4e^{-2s}\ln(m^{-1}) + \frac{1}{k}(1-m^{2k}), \end{cases} \tag{5.6}$$

jeśli $s \geqslant k\ln(m^{-1})$,

przy czym funkcjami ekstremalnymi są tylko funkcje (2.12) i (2.13).
Dowód jest analogiczny do dowodu tw. 1.

T w i e r d z e n i e 11

Dla każdego ustalonego

$$U' \in \left\langle -\frac{2}{k}(1-m^k), \frac{2}{k}(1-m^k)\right\rangle, \quad \alpha \in (-\infty, +\infty)$$

$\underline{V}'(U')$ wyraża się równością:

$$\underline{V}'(U') = -\frac{k+1}{2}U'^2 + \alpha U' - \frac{1}{k}(1-m^{2k}). \tag{5.7}$$

Równość zachodzi tylko dla funkcji (2.16).
Dowód wynika z (4.12).

T w i e r d z e n i e 12

Zbiór $\Delta'_{\alpha m}$ ograniczony krzywymi $\overline{V}'(U')$ i $\underline{V}'(U')$ jest zbiorem domkniętym i spójnym.
Dowód twierdzenia jest analogiczny do dowodu tw. 3.

LITERATURA

[1] Bazilewicz I.E.: Obłasti naczalnych koefficientow ograniczJennych odnolistnych funkcij p-kratnoj simetrii. Mat. Sbornik T. 43(85): 4, (1957).

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji 20.12.1986 r.

ОБ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ k-КРАТНОЙ СИММЕТРИИ

Р е з ю м е

В настоящей работе, методом К. Левнера при помощи известной вариационной леммы И.Е. Базилевича [1], исследуется задача об определении множества значений одного функционала на классе $S_k(M)$ и $\sum_k(m)$. Показано, что множество $D_{\alpha M}$ значений функционала

$$I(f) = \operatorname{Re}(c_{k+1}) + i\ \operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \quad \text{на классе } S_k(M)$$

замкнуто и связно. Его сечение вертикальной прямой в плоскости $I=X+iY$ дается в параметрической форме условиями:

a) если $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$, to

$$X = \pm \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right]$$

$$\frac{k-1}{2}X^2 + X-(1-M^{-k}) \leqslant Y \leqslant \frac{k-1}{2}X^2+\alpha X - \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}),$$

b) если $s \geqslant k\ln M$, to

$$X = \pm 2e^{-s}\ln M$$

$$\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-(1-M^{-k}) \leqslant Y \leqslant \frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-4e^{-2s}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

где α произвольное вещественное число.

Аналогично показано, что множество $\Delta_{\alpha m}$ значений функционала

$$I(F) = \operatorname{Re}(\gamma_{k-1}) + i\ \operatorname{Re}(\gamma_{2k-1} - \gamma_{k-1}^2 + \alpha\gamma_{k-1})$$

на классе $\sum_k(m)$ замкнуто и связно. Кроме того его сечение вертикальной прямой в плоскости $I = U+iV$ определяется в параметрической форме условиями

a) если $0 \leqslant s \leqslant k\ln(m^{-1})$, to

$$U = \pm\left[(1 + s)e^{-s} - m^k\right]$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}-\frac{1}{k}(1+m^{2k}) \leqslant V \leqslant -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k}),$$

b) если $s \geqslant k\ln(m^{-1})$, to

$$U = \pm 2e^{-s}\ln(m^{-1})$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+4e^{-2s}\ln(m^{-1})-\frac{1}{k}(1-m^{2k})\leqslant V\leqslant -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k}).$$

ON THE SET OF VALUES OF A FUNCTIONAL DEFINED IN CLASSES OF k-SYMMETRICAL AND BOUNDED UNIVALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

Using the parametric Loewners'method and the I.E. Bazilewiczs'lemma it was defined the value of a functional in the classes $S_k(M)$ and $\sum_k(m)$. It was demonstrated that the set of values of the functional:

$$I(f) = \mathrm{Re}(c_{k+1}) + \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}), \quad -\infty < \infty < \infty$$

in the class $S_k(M)$ of function

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1}, \ |z|<1 \text{ is a connected and closed set.}$$

Its section by vertical stright line in the plane $I = X + iY$ is defined by parametrical conditions:

a) If $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$, then

$$X = \pm\frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right]$$

$$\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-(1-M^{-2k})\leqslant Y\leqslant\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}+\frac{1}{k}(1+M^{-2k})$$

b) If $s \geqslant k\ln M$, then

$$X = \pm 2e^{-s}\ln M$$

$$\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-(1-M^{-2k})\leqslant Y\leqslant\frac{k-1}{2}X^2+\alpha X-4e^{-2s}\ln M+\frac{1}{4}(1-M^{-2k}).$$

It was also demonstrated, that the set of values $\Delta_{\alpha m}$ of the functional

$$I(F) = \mathrm{Re}(\gamma_{k-1}) + i\,\mathrm{Re}(\gamma_{2k-1} - \gamma_{k-1}^2 + \alpha\gamma_{k-1}),$$

in the class $\sum_k(m)$ of function $F(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nk-1} \zeta^{-nk+1}$, $|\zeta| > 1$, is coherent and closed.

It's section by vertical stright line in the plane $I = U + iV$ is defined by conditions

a) If $0 \leqslant s \leqslant k\ln(m^{-1})$, then

$$U = \pm \frac{2}{k}(1+s)e^{-s} - m^{2k}$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}-\frac{1}{k}(1+m^{2k}) \leqslant V \leqslant -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k})$$

b) If $s \geqslant k\ln(m^{-1})$, then

$$U = \pm 2e^{-s}\ln(m^{-1})$$

$$-\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+4e^{-2s}\ln(m^{-1})-\frac{1}{k}(1-m^{2k}) \leqslant V \leqslant -\frac{k+1}{2}U^2+\alpha U+\frac{1}{k}(1+m^{2k}),$$