ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Karol PETHE

MAKSIMUM FUNKCJONAŁU $\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ W KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH k-SYMETRYCZNYCH I OGRANICZONYCH W KOLE JEDNOSTKOWYM I

Streszczenie. Dla dowolnej funkcji

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1} \in S_k(M), \quad k \geq 2, \quad 1 < M \leq e^{\frac{2}{k-1}}$$

metodą Löwnera oraz za pomocą twierdzenia 1, udowodnionego w pracy [3], otrzymano dla funkcjonału

$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ następujące oszacowanie:

a) gdy $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$, to

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) \\ \text{dla} \quad \alpha \leq 0, \\ \\ \dfrac{\alpha^2 \ln M}{2[2-(k-1)\ln M]} + \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) \\ \text{dla} \quad 0 < \alpha \leq 2M^{-k}[2-(k-1)\ln M], \\ \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \dfrac{\alpha^2}{2(k-1)} + \dfrac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \\ \text{dla } 2M^{-k}[2-(k-1)\ln M] < \alpha \leq \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} \\ \\ \frac{1}{k}(1-M^{-k})[1+2\alpha-3M^{-k} - \frac{2}{k}(1 - M^{-k})] \\ \text{dla} \quad \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} < \alpha \end{cases}$$

Wykazano również, że uzyskane nierówności są dokładne oraz podane zostały wszystkie funkcje ekstremalne.

b) gdy $M = e^{\frac{2}{k-1}}$, to

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}) \\ \text{dla} \quad \alpha \leqslant 0, \\ \frac{2}{k}(e^{-s_0} - e^{-\frac{2k}{k-1}})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-e^{-\frac{4k}{k-1}}) \\ \text{dla} \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}}, \\ \frac{1}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}}) \left[1+2\alpha - 3 e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}})\right] \\ \text{dla} \quad \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} < \alpha \end{cases}$$

gdzie s_0 jest pierwiastkiem równania

$$-\frac{2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha = 0.$$

1. Niech $S_k(M)$ będzie klasą funkcji postaci

$$f(z) = z + c_{k+1} z^{k+1} + c_{2k+1} z^{2k+1} + \dots, \quad k=1,2,\dots, \tag{1.1}$$

jednolistnych i k-symetrycznych w kole $\{|z| < 1\}$, spełniających warunek $|f(z)| < M$, >1.

Zauważmy, że dotąd znane było tylko oszacowanie funkcjonału $\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2)$ w klasach funkcji S i $S(M)$ przy $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$, przy czym w dowodach stosowane były różne metody. I tak, J.A. Jenkins [1] pierwszy podał oszacowanie tego funkcjonału w klasie S, korzystając z ogólnego twierdzenia o współczynnikach, zaś D.W. De Temple [4] podał oszacowanie w klasie $S(M)$, korzystając z metody wariacyjnej. Metodę parametrycznych przedstawień Löwnera pierwszy zastosował G.B. Leeman [2] dla funkcji należących do klasy S, a później D.W. De Temple i J.A. Jenkins [5] uzyskali oszacowanie tego funkcjonału w klasie $S(M)$ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

W niniejszej pracy również przy użyciu metody Löwnera, zostanie podany dowód ostrego oszacowania funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ w klasie $S_k(M)$, lecz już dla $-\infty < \alpha < +\infty$.

Współczynniki c_{2k+1}, c_{k+1} funkcji (1.1) wyrażają się wzorami:

$$\begin{cases} c_{k+1} = -\frac{2}{k}\int\limits_0^T e^{-t}\, k(t)dt\,, \quad T = k\ln M\,, \\ c_{2k+1} = \frac{k+1}{2}\, c_{k+1}^2 - \frac{2}{k}\int\limits_0^T e^{-2t}\, k^2(t)dt, \end{cases} \tag{1.2}$$

w których $k(t) = e^{i\,Q(t)}$, gdzie $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w przedziale $\langle 0,T\rangle$.

Połóżmy $c_{k+1} = a_{k+1}\, i\, b_{k+1}$, $c_{2k+1} = a_{2k+1} + i\, b_{2k+1}$,

$$X = a_{k+1}, \quad Y = \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}).$$

Wówczas ze wzorów (1.2) otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_{k+1} = -\frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad b_{k+1} = -\frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-t}\sin Q(t)dt \\ a_{2k+1} = \frac{k+1}{2}(a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) - \frac{2}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} X = a_{k+1} \\ Y = \frac{k-1}{2}(X^2 - b_{k+1}^2) + \alpha X - \frac{4}{k}\int\limits_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \end{cases} \tag{1.4}$$

W dalszym ciągu będziemy korzystali z tw. 1, udowodnionego w pracy [3]. W myśl tego twierdzenia w klasie $S_k(M)$ maksymalna wartość $\overline{Y}(X)$ przy ustalonym X z przedziału $\langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}), \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$ wyraża się parametrycznie równościami:

$$\begin{cases} \pm\ X = \frac{2}{k}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right] \\ \overline{Y}(X) = \frac{k-1}{2}X^2 + \alpha X - \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \end{cases} \tag{1.5}$$

jeżeli $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$,

$$\begin{cases} \pm X = 2\, e^{-s} \ln M, \\ \overline{Y}(X) = \frac{k-1}{2} X^2 + \alpha X - 4\, e^{-2s} \ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \end{cases} \tag{1.6}$$

jeżeli $s \geqslant k\ln M$, gdzie s zależy tylko od X.

Równości (1.5) są osiągnięte tylko dla funkcji:

$$\pm e^{-t} \cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t \leqslant k\ln M, \end{cases} \tag{1.7}$$

a równości (1.6) tylko dla funkcji:

$$\pm e^{-t} \cos Q(t) = e^{-s}, \qquad s \geqslant k\ln M \tag{1.8}$$

2. Obecnie wyznaczymy $\max\limits_{f \in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}$

dla każdej ustalonej wartości $1 < M < \frac{2}{e^{k-1}}$ i $-\infty < \alpha < \infty +$.

Wystarczy w tym celu rozpatrywać $X = a_{k+1}$ tylko z przedziału $\langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$, ponieważ na podstawie (1.5) i (1.6) maksimum to nie zależy od znaku X, a tylko od znaku iloczynu $\alpha \cdot X$, gdy α rozważa się w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Tak więc

$$\max_{f \in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) = \max_{X \in \langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle} \overline{Y}(X). \tag{2.1}$$

Jeżeli teraz wyrugujemy X z (1.5) i (1.6), a następnie położymy:

$$g(s) = Y(s) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha\left[(1+s)e^{-s} - M^{-k}\right] -$$

$$- \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \tag{2.2}$$

gdy $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$, oraz

$$h(s) = \overline{Y}(s) = 2e^{-2s}\ln M\left[(k-1)\ln M - 2\right] + 2\alpha e^{-s}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{2.3}$$

gdy $s \geqslant k\ln M$,

to wobec (2.1)

$$\max_{f \in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) = \max\left\{ \max_{0 \le s \le k\ln M} g(s) \; ; \; \max_{s \ge k\ln M} h(s) \right\} \tag{2.4}$$

Pochodne funkcji $g(s)$ i $h(s)$ wyrażają się:

$$g'(s) = \frac{2}{k} s\, e^{-s} u(s), \qquad 0 \le s \le k\ln M, \tag{2.5}$$

$$h'(s) = 2\, e^{-s} \ln M.\ v(s), \qquad s \ge k\ln M, \tag{2.6}$$

gdzie

$$u(s) = -\frac{2(k-1)}{k} s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha, \quad 0 \le s \le k\ln M \tag{2.7}$$

$$v(s) = 2\, e^{-s}\left[2 - (k-1)\ln M\right] - \alpha. \qquad s \ge k\ln M. \tag{2.8}$$

Znaki funkcji $u(s)$ i $v(s)$ pokrywają się odpowiednio ze znakami pochodnych $g'(s)$ i $h'(s)$, zaś wartości graniczne oraz pochodne $u(s)$ i $v(s)$ są postaci:

$$\begin{cases} u(0) = \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha, \quad u(k\ln M) = 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] - \alpha \\ u'(s) = 2\,\frac{k-1}{k}\, e^{-s} \left(s - \frac{2k}{k-1}\right), \qquad 0 \le s \le k\ln M, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} v(k\ln M) = 2\, M^{-k}\left[2 - (k-1)\ln M\right] - \alpha, \quad v(\infty) = -\alpha, \\ v'(s) = -2\, e^{-s}\left[2 - (k-1)\ln M\right] < 0, \qquad s \ge k\ln M. \end{cases} \tag{2.10}$$

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli $k \ge 2$, $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$, $\alpha \le 0$, to dla dowolnej funkcji $f \in S_k(M)$ zachodzi oszacowanie:

$$\operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \le \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}). \tag{2.11}$$

Oszacowanie to jest dokładne, przy czym znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{\left(1 - \frac{f^{2k}(z)}{M^{2k}}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{z}{(1 - z^{2k})^{\frac{1}{k}}} \tag{2.12}$$

D o w ó d

Ponieważ warunek $M < e^{\frac{2}{k-1}}$ jest równoważny warunkowi $k\ln M < \frac{2k}{k-1}$, to wobec (2.9) $u'(s) < 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$ oraz $u(0) > u(k\ln M) > 0$, więc $u(s) > 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$.
Oznacza to, że $g'(s) > 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$ i

$$\max_{0 \leq s \leq k\ln M} g(s) = g(k\ln M) = -2M^{-2k}\ln M\left[2-(l-1)\ln M\right] + 2\alpha M^{-k}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.13}$$

Z drugiej strony, na podstawie (2.10) stwierdzamy, że $v'(s) < 0$ dla $s \in \langle k\ln M, +\infty)$, $v(k\ln M) > v(\infty) \geq 0$, czyli $v(s) > 0$ dla $s \in \langle k\ln M, +\infty)$. Zatem $h'(s) > 0$ dla $s \in \langle k\ln M, +\infty)$ i

$$\max_{s \geq k\ln M} h(s) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.14}$$

Porównując teraz (2.13) z (2.14) łatwo zauważyć, że $h(\infty) > g(k\ln M)$, więc

$$\max\left\{g(k\ln M), h(\infty)\right\} = h(\infty) = \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

skąd już wynika nierówność (2.11) twierdzenia. Prostym rachunkiem sprawdzamy, że funkcja (2.12) realizuje znak równości w (2.11).

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli $k \geq 2$, $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$ i $0 < \alpha \leq 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]$, to dla dowolnej funkcji $f \in S_k(M)$ zachodzi oszacowanie.

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq \frac{\alpha^2 \ln M}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.15}$$

Oszacowanie to jest dokładne. Znak równości realizuje funkcja $f \in S_k(M)$, przyporządkowana takiej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia związek:

$$e^{-t}\cos Q^*(t) = \frac{\alpha}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]}, \tag{2.16}$$

D o w ó d

Na podstawie (2.9) stwierdzamy, że

$u'(s) < 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$, $u(0) > u(k\ln M) \geq 0$, więc $u(s) \geq 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$ i również $g'(s) > 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$, zatem

$$\max_{0\leq s\leq k\ln M} g(s) = g(k\ln M) = -2M^{-2k}\ln M\left[2-(k-1)\ln M\right]+2\alpha M^{-k}\ln M+\frac{1}{k}(1-M^{-2k}).$$

Ażeby wyznaczyć $\max\limits_{s\geq k\ln M} h(s)$, rozważmy dwa przypadki:

1° niech $0<\alpha<2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]$, wówczas wobec (2.10) $v(k\ln M)>0$, $v(\infty)<0$ oraz $v'(s)<0$ dla $s\in\langle k\ln M,\infty)$, więc z ciągłości funkcji $v(s)$ wynika, że równanie

$$2e^{-s}\left[2-(k-1)\ln M\right]-\alpha=0 \tag{2.17}$$

ma w przedziale $(k\ln M,\infty)$ dokładnie jeden pierwiastek s_0 i

$$s_0 = -\ln\frac{\alpha}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]}. \tag{2.18}$$

Ponieważ $h'(s)>0$ dla $s<s_0$, $h'(s_0)=0$, $h'(s)<0$ dla $s>s_0$, to

$$\max_{s\geq k\ln M} h(s) = h(s_0) = \frac{\alpha^2\ln M}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]}+\frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.19}$$

Zauważmy, że dla $s=k\ln M$, $g(k\ln M)=h(k\ln M)$, wobec czego $h(s_0)>g(k\ln M)$ i $\max\{g(k\ln M,\ h(s_0)\}=h(s_0)$, więc

$$\mathrm{Re}(c_{2k-1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})\leq\frac{\alpha^2\ln M}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]}+\frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.20}$$

2° Jeżeli $\alpha=2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]$, wówczas z (2.6) wynika, że $h'(s)<0$ w $\langle k\ln M,\infty)$, więc $\max\limits_{s\geq k\ln M} h(s)=h(k\ln M)$.

Z drugiej strony, jeżeli $\alpha\to 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]$, to wobec (2.18) i (2.19) $s_0\to k\ln M$, zaś $h(s_0)\to h(k\ln M)$. Ponieważ $g(k\ln M)=h(k\ln M)$, więc dla $\alpha=2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]$

$\max\limits_{0\leq s\leq k\ln M} g(s)=\max\limits_{s\geq k\ln M} h(s)=h(k\ln M)$, co oznacza że nierówność (2.20) zachodzi również w tym przypadku.

Musimy jeszcze wykazać, że oszacowanie (2.15) jest dokładne. Istotne, jeżeli w miejsce s wstawimy do (1.8) s_0 dane wzorem (2.18), a następnie obliczymy $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$, to otrzymamy prawą stronę (2.15). Oznacza to, że istnieje taka funkcja $Q^*(t)$, spełniająca równanie (1.8), dla której zachodzi równość w (2.15). Z drugiej strony wobec twierdzenia Löwnera

istnieje w klasie $S_k(M)$ funkcja $f^*(z)$ przyporządkowana funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, która dla maksimum rozważanego funkcjonału jest funkcją ekstremalną.

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli $k \geq 2$, $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$ oraz $2M^{-k}[2-(k-1)\ln M] < \alpha \leq \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k}$, to dla dowolnej funkcji $f \in S_k(M)$ zachodzi oszacowanie.

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{2.21}$$

gdzie s_1 jest pierwiastkiem równania

$$\frac{2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0. \tag{2.22}$$

Oszacowanie to jest dokładne.

Znak równości realizuje funkcja $f^* \in S_k(M)$ przyporządkowana, w myśl twierdzenia Löwnera, takiej funkcji $k^*(T) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia równanie:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s_1}, & 0 \leq t \leq s_1 \\ e^{-t}, & s_1 < t \leq k\ln M. \end{cases} \tag{2.23}$$

D o w ó d

Opierając się na związkach (2.9) łatwo zauważyć, że $u(0) > 0$, $u(k\ln M) < 0$ i $u'(s) < 0$ dla $s \in \langle 0, k\ln M\rangle$. Ponieważ funkcja $u(s)$ określona przez (2.7), jest funkcją ciągłą w $\langle 0, k\ln M\rangle$, to równanie

$$-\frac{2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0 \tag{2.24}$$

ma w przedziale $\langle 0, k\ln M\rangle$ dokładnie jeden pierwiastek s_1.

Z równości znaków $u(s)$ i $g'(s)$ wynika, że $g'(s) > 0$ dla $s < s_1$, $g'(s_1) = 0$, $g'(s) < 0$ dla $s > s_1$, co oznacza, że $g(s)$ posiada w punkcie s_1 maksimum i

$$\max_{0 \leq s \leq k\ln M} g(s) = g(s_1) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s_1)e^{-s_1} - M^{-k}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha. \tag{2.25}$$

$$\cdot \left[(1+s_1)e^{-s_1} - M^{-k}\right] - \frac{2}{k}(1+2s_1)e^{-2s_1} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}). \tag{2.25}$$

Po uwzględnieniu na s_1 warunku (2.24) otrzymujemy:

$$\max_{0\leq s\leq k\ln M} = g(s_1) = \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(k-M^{-2k}). \tag{2.26}$$

Z warunków (2.10) wynika, że $v(s)<0$ dla $s\in\langle k\ln M,\infty)$, więc również $h'(s)<0$ dla $s\in\langle k\ln M,\infty)$, zatem $\max\limits_{s\geq k\ln M} h(s) = h(k\ln M)$.

Ponieważ $g(k\ln M = h(k\ln M)$, to, wobec (2.26), $\max\{g(s_1), h(k\ln M\} = g(s_1)$, skąd już wynika nierówność (2.21) twierdzenia.

Do wykazania ostrości oszacowania (2.21) wystarczy wstawić do prawej strony (1.7) s_1 w miejsce s i powtórzyć rozumowanie przedstawione w tw. 2.

T w i e r d z e n i e 4

Jeżeli $k\geq 2$, $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$ i $\frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} < \alpha$, to dla dowolnej funkcji $f\in S_k(M)$ zachodzi oszacowanie:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha - 3M^{-k} - \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right]. \tag{2.27}$$

Oszacowanie to jest dokładne, przy czym znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{\left(1-\frac{f^k(z)}{M^k}\right)^{\frac{2}{k}}} = \frac{z}{(1-z^k)^{\frac{2}{k}}}. \tag{2.28}$$

D o w ó d

Ponieważ, wobec (2.9) i (2.10), $u(0)\leq 0$, $u(k\ln M)<0$, $u'(s)<0$ dla $s\in\langle 0,k\ln M\rangle$, $v(k\ln M)<0$, $v(\infty)<0$, $v'(s)<0$ dla $s\in\langle k\ln M,\infty)$, to również $g'(s)<0$ dla $s\in\langle 0,k\ln M\rangle$ oraz $h'(s)<0$ dla $s\in\langle k\ln M,\infty)$. Zatem $\max\limits_{0\leq s\leq k\ln M} g'(s) = g(0)$ oraz $\max\limits_{s\geq k\ln M} h(s) = h(k\ln M)$. Uwzględniając następnie równość $g(k\ln M) = h(k\ln M)$, otrzymujemy $\max\{g(0), h(k\ln M)\} = g(0)$, więc:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha - 3M^{-k} - \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right]. \tag{2.29}$$

Łatwym rachunkiem sprawdzamy, że funkcja (2.28) realizuje znak równości w (2.29).

Rozpatrzmy jeszcze przypadek $M = e^{\frac{2}{k-1}}$.

T w i e r d z e n i e 5

Jeżeli $k \geqslant 2$ oraz $M = e^{\frac{2}{k-1}}$, to:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}), \text{ jeżeli } \alpha \leqslant 0, \\ g(s_0), \text{ jeżeli } 0 < \alpha < \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} \cdot e^{-\frac{2k}{k-1}}, \\ \frac{1}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}}) \left[1+2\alpha-3e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}})\right], \end{cases} \tag{2.30}$$

gdzie:

$$g(s_0) = \frac{2}{k}(e^{-s_0} - e^{-\frac{2k}{k-1}})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}), \tag{2.31}$$

a s_0 jest pierwiastkiem równania:

$$\frac{-2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha = 0. \tag{2.32}$$

Znaki równości zachodzą w pierwszym i trzecim przypadku odpowiednio dla funkcji (2.12) i (2.28), zaś w drugim przypadku dla funkcji $f \in S_k(M)$ przyporządkowanej według twierdzenia Löwnera funkcji $k^*(t) = e^{iQ}(t)$, gdzie $Q^*(t)$ spełnia równanie (1.7), gdy $s = s_0$.

D o w ó d

Zauważmy, że obecnie funkcja $h(s)$ jest postaci:

$$h(s) = \frac{4\alpha e^{-s}}{k-1} + \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}), \tag{2.33}$$

$g(s)$ postaci (2.2) oraz, wobec (2.9) i (2.10),

$$\begin{aligned} &g(0) = \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha, \quad u(\frac{2k}{k-1}) = -\alpha, \\ &\lim_{s \to M} = \frac{2k}{k-1}, \quad u'(s) = \frac{2(k-1)}{k} e^{-s}(s - \frac{2k}{k-1}), \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$v(\tfrac{2k}{k-1}) = v(\infty) = -\alpha, \qquad v(s) = -\alpha \text{ w } < \tfrac{2k}{k-1}, \infty) . \tag{2.35}$$

Jeżeli $\alpha \leqslant 0$, wówczas, wobec (2.34), $u(0) > u(\frac{2k}{k-1}) \geqslant 0$, $u'(s) < 0$, stąd $u(s) \geqslant 0$ i jednocześnie $g'(s) \geqslant 0$ dla $s \in <0, \frac{2k}{k-1}>$, więc

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant \frac{2k}{k-1}} g(s) = g(\tfrac{2k}{k-1}) = \frac{4}{k-1} e^{-\frac{2k}{k-1}} \alpha + \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}). \tag{2.36}$$

Funkcja $h(s)$, wobec (2.33), jest funkcją rosnącą, więc

$$\max_{s \geqslant \frac{2k}{k-1}} h(s) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}). \tag{2.37}$$

Porównując teraz (2.36) z (2.37) otrzymujemy:

$$\max\left\{ \max_{0 \leqslant s \leqslant \frac{2k}{k-1}} g(s), \max_{s \geqslant \frac{2k}{k-1}} \right\} h(s) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}).$$

Jeżeli $0 < \alpha < \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}}$, to na podstawie (2.34) $u(0) > 0$, $u(\frac{2k}{k-1}) < 0$ i $u'(s) \leqslant 0$, więc wobec (2.7) równanie (2.37)

$$-\frac{2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha = 0$$

ma w przedziale $<0, \frac{2k}{k-1}>$ jeden pierwiastek s_o i $u(s) > 0$ dla $s < s_o$ oraz $u(s) < 0$ dla $s > s_o$. Zatem $g'(s) > 0$ dla $s < s_o$ $g'(s_o) = 0$, $g'(s) < 0$ dla $s > s_o$, więc:

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant \frac{2k}{k-1}} g(s) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s_o)e^{-s_o} - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha\left[(1+s_o)e^{-s_o} - \right. \tag{2.38}$$

$$\left. - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right] - \frac{2}{k}(1+2s_o)e^{-2s_o} + \frac{1}{k}(1 + e^{-\frac{4k}{k-1}}) ,$$

stąd i wobec (2.37) przy $s = s_0$ otrzymamy:

$$\max_{0 \leq s \leq \frac{2k}{k-1}} g(s) = g(s_0) = \frac{2}{k}\left(e^{-s_0} - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}\right). \tag{2.39}$$

Z (2.33) wynika, że $h'(s) = \frac{-4\alpha e^{-s}}{k-1} < 0$ dla $\alpha > 0$, więc

$$\max_{s \geq \frac{2k}{k-1}} h(s) = h\left(\frac{2k}{k-1}\right) = \frac{4}{k-1} e^{-\frac{2k}{k-1}} \alpha + \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}\right). \tag{2.40}$$

Ponieważ $g\left(\frac{2k}{k-1}\right) = h\left(\frac{2k}{k-1}\right)$, to

$$\max\left\{g(s_0),\ h\left(\frac{2k}{k-1}\right)\right\} = g(s_0),$$

gdzie $g(s_0)$ jest równe prawej stronie (2.38) bądź (2.39).

Jeżeli $\frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} \leq \alpha$, wówczas z (2.34) i (2.35) wynika, że $g'(s) < 0$ dla $s \in \langle 0, \frac{2k}{k-1} \rangle$ i $h'(s) < 0$ dla $s \in \langle \frac{2k}{k-1}, \infty)$, wobec tego

$$\max_{0 \leq s \leq \frac{2k}{k-1}} = g(0) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)\left[1 + 2\alpha - 3e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)\right],$$

$$\max_{s \geq \frac{2k}{k-1}} h(s) = h\left(\frac{2k}{k-1}\right) = g\left(\frac{2k}{k-1}\right),$$

skąd wynika, że

$$\max\left\{g(0),\ h\left(\frac{2k}{k-1}\right)\right\} = g(0) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)\left[1 + 2\alpha - 3e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)\right],$$

co kończy dowód twierdzenia.

LITERATURA

[1] Jenkins J.A.: On certain coefficients of univalent functions. Analytic Functions. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1960, 159--194.

[2] Leeman G.B.: A new proff an inequality of Jenkins. Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), pp. 114-116.

[3] Pethe K.: O zbiorze wartości jednego funkcjonału określonego w klasach funkcji jednolistnych k-symetrycznych i ograniczonych (praca w druku, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat.-Fiz.).

[4] De Temple D.W.: Generalizations of the Grunsky-Nehari inequalities. Arch. Rational Mech. Anal. 44 (1971), pp. 93-120.

[5] De Temple D.W., Jenkins J.A.: A Lowner approach to a coefficient inequality for bounded univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 1977 65 Nr 1, pp 125-126.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

МАКСИМУМ ФУНКЦИОНАЛА $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}$ НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ, к-СИММЕТРИЧНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ /I

Р е з ю м е

Для произвольной функции

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1}\, z^{nk+1} \in S_k(M),\quad k \geq 2,\quad 1 < M \leq \frac{2}{e^{k-1}},$$

получена методом параметрических представлений К. Левнера и с помощью теоремы 1 из [3], точная оценка функционала $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$, $-\infty<\alpha<\infty$, в виде:

а. если $1 \leq M \leq e^{\frac{2}{k-1}}$, то

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}), & \text{для} \quad \alpha \leq 0, \\ \frac{\alpha^2 \ln M}{2[2-(k-1)\ln M]} + \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) & \\ \text{для} \quad 0 < \alpha \leq 2M^{-k}[2-(k-1)\ln M], & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) \\ \text{для} \qquad 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] < \alpha \leq \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}, \\ \frac{1}{k}(1 - M^{-k}) \left[1+2 -3M^{-k} - \frac{2}{k}(1 - M^{-k})\right] \\ \text{для} \qquad \alpha > \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}. \end{cases}$$

b. если $M = e^{\frac{2}{k-1}}$, то

$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}) \qquad \text{для} \qquad \alpha \leq 0, \\ \frac{2}{k}(e^{-s_0} - e^{-\frac{2k}{k-1}})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}}) \\ \text{для} \qquad 0 < \alpha < \frac{1(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}}, \\ \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{2k}{k-1}})\left[1+2\alpha-3e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}})\right] \\ \text{для} \qquad \alpha \geq \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}}, \end{cases}$$

где s_0 - корень уравнения

$$-\frac{2(k-1)}{k} s e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha = 0.$$

MAXIMUM OF THE FUNCTIONAL $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ IN THE CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS, k-SYMETRICAL AND BOUNDED IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

For the optimal function

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1} \in S_k(M), \quad k \geq 2, \quad 1 < M \leq \frac{2}{e^{k-1}}$$

it was obtained for the functional $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ the follwing sharp estimation:

a) If $1 < M < e^{\frac{2}{k-1}}$, then

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) \\ \text{for} \quad \alpha \leqslant 0, \\ \dfrac{\alpha^2 \ln M}{2\left[2-(k-1)\ln M\right]} + \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}) \\ \text{for} \quad 0 < \alpha \leqslant 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]; \\ \frac{2}{4}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \dfrac{\alpha^2}{2(k-1)} + \dfrac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \\ \text{for} \quad 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] < \alpha \leqslant \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}, \\ \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3\, M^{-k} - \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right] \\ \text{for} \quad \alpha > \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}. \end{cases}$$

b) If $M = e^{\frac{2}{k-1}}$, then

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - e^{-\frac{4k}{k-1}} \\ \text{for} \quad \alpha \leqslant 0, \\ \frac{2}{k}(e^{-s_0} - e^{-\frac{2k}{k-1}})^2 - \dfrac{\alpha^2}{2(k-1)} + \dfrac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-e^{-\frac{4k}{k-1}}) \\ \text{for} \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}}, \\ \frac{1}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}})\left[1+2\alpha-3\, e^{-\frac{2k}{k-1}} - \frac{2}{k}(1-e^{-\frac{2k}{k-1}})\right] \\ \text{for} \quad \alpha \geqslant \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} e^{-\frac{2k}{k-1}} \end{cases}$$

where s_0 is the root of the equation:

$$-\frac{2(k-1)}{k}\, s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}\, e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k}\, e^{-\frac{2k}{k-1}} - \alpha = 0.$$