ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Karol PETHE

MAKSIMUM FUNKCJONAŁU $\operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ W KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH k-SYMETRYCZNYCH I OGRANICZONYCH W KOLE JEDNOSTKOWYM II

Streszczenie. Dla dowolnej funkcji

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1} \in S_k(M), \quad k \geq 2, \quad M > e^{\frac{2}{k-1}}$$

otrzymano dla funkcjonału $\operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ następujące oszacowanie dokładne:

1. $\operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leq \frac{1}{k}(1-M^{-2k})$, dla $\alpha \leq \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k}-e^{-\frac{2k}{k-1}})$.

2. $$\operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), & \text{jeżeli } (M, \alpha) \in D_1 \\ \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), & \text{jeżeli } (M, \alpha) \in D_2 \\ \frac{2}{k}(e^{-s_1}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \\ \text{jeżeli } (M, \alpha) \in D_3, & \end{cases}$$

gdzie zbiory D_1, D_2, D_3 zostały określone na str. 5.

3. $$\operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1M^{-2k}), & \text{jeżeli } (M, \alpha) \in \Delta_1 \\ g(s_o), & \text{jeżeli } (M, \alpha) \in \Delta_2 \\ g(s_o), & \text{jeżeli } (M, \alpha) \in \Delta_3 \end{cases}$$

gdzie:

$$g(s_o) = \frac{2}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 określone na str. 10.

$$4.\ \operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \begin{cases} \frac{2}{k}(e^{-s_0}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \\ \text{dla} \quad 0 < \alpha < \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}, \\ \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3\,M^{-k} - \frac{2}{k}(1-M^{-k})\right] \\ \text{dla} \quad \alpha \geq \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k}, \end{cases}$$

gdzie s_0 jest pierwiastkiem równania

$$-\frac{2(k-1)}{k} s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0.$$

1. W niniejszej pracy skorzystamy z tw. 1 [1] oraz z niektórych wyników uzyskanych w pracy [2], używając jednocześnie tych samych oznaczeń. Przeto niech $S_k(M)$ oznacza klasę funkcji

$$f(z) = z + c_{k+1} z^{k+1} + c_{2k+1} z^{2k+1} + \cdots \tag{1.1}$$

jednolistnych k-symetrycznych spełniających w kole $\{|z| < 1\}$ warunek $|f(z)| < M$, $M = \text{const.} > 1$.

Ze znanego równania Löwnera dla funkcji $f \in S_k(M)$ otrzymujemy dla $\operatorname{Re}(c_{k+1}) = a_{k+1}$, $\operatorname{im}(c_{k+1}) = b_{k+1}$, $\operatorname{Re}(c_{2k+1} = a_{2k+1}$ następujące przedstawienie:

$$\begin{cases} a_{k+1} = -\frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad b_{k+1} = -\frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-t}\sin Q(t)dt, \\ a_{2k+1} = \frac{k+1}{2}(a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) - \frac{2}{k}\int_0^{k\ln M} e^{-2t}\cos 2\,Q(t)dt, \end{cases} \tag{1.2}$$

gdzie $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą i przedziałami ciągłą.

Korzystając ze wzorów (1.2) możemy przedstawić

$$Y = \operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$$

w postaci

$$\begin{cases} X = a_{k+1} \\ Y = \frac{k-1}{2}(X^2 - b_{k+1}^2) + \alpha X - \frac{4}{k}\int\limits^{k\ln M} e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \end{cases} \tag{1.3}$$

Jeżeli oznaczymy przez $\overline{Y}(X)$ największą wartość Y przy ustalonym X z przedziału $\langle -\frac{2}{k}(1-M^{-k}),\ \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$, to w myśl tw. 1 [1] otrzymamy dla $\overline{Y}(X)$ następujące przedstawienie parametryczne:

$$\begin{cases} \pm X = \frac{2}{k}\left[(1-s)e^{-s} - M^{-k}\right], \\ \overline{Y}(X) = \frac{k-1}{2}X^2 + \alpha X - \frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \end{cases} \tag{1.4}$$

jeżeli $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$,

$$\begin{cases} \pm X = 2e^{-s}\ln M \\ Y(X) = \frac{k-1}{2}X^2 + \alpha X - 4e^{-2s}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \end{cases} \tag{1.5}$$

jeżeli $s \geqslant k\ln M$, gdzie s zależy tylko od X.
Równości (1.4) są osiągnięte tylko dla funkcji:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ e^{-t}, & s \leqslant t \leqslant k\ln M, \end{cases} \tag{1.6}$$

zaś równości (1.5) tylko dla funkcji:

$$e^{-t}\cos Q(t) = e^{-s}, \qquad s \geqslant k\ln M. \tag{1.7}$$

Celem pracy jest wyznaczenie $\max\limits_{f\in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ dla każdej ustalonej wartości $M > e^{\frac{2}{k-1}}$ i $-\infty < \alpha < +\infty$.
Zauważmy, że przy poszukiwaniu $\max\limits_{f\in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ wystarczy rozpatrywać X tylko z przedziału $\langle 0, \frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle$, ponieważ wobec (1.4) i (1.5) maksimum to zależy tylko od znaku iloczynu $\alpha \cdot X$, pod warunkiem, że α jest rozpatrywane w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Tak więc

$$\max_{f\in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) = \max_{X\in\langle 0,\frac{2}{k}(1-M^{-k})\rangle} Y(X). \tag{1.8}$$

Po wyrugowaniu X z (1.4) i (1.5) otrzymujemy:

$$g(s) = \overline{Y}(s) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s)e^{-s}-M^{-k}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha\left[(1-s)e^{-s}-M^{-k}\right] -$$

$$-\frac{2}{k}(1+2s)e^{-2s}+\frac{1}{k}(1+M^{-2k}), \tag{1.9}$$

jeżeli $0 \leqslant s \leqslant k\ln M$,

$$h(s) = \overline{Y}(s) = 2e^{-2s}\ln M\left[(k-1)\ln M-2\right] + 2\alpha e^{-s}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{1.10}$$

jeżeli $s \geqslant k\ln M$.

Pochodne funkcji $g(s)$ i $h(s)$ wyrażają się:

$$g'(s) = \frac{2}{k}\, s\, e^{-s}\, u(s)\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant k\ln M, \tag{1.11}$$

$$h'(s) = 2e^{-s}\ln M\; v(s)\,, \quad s \geqslant k\ln M, \tag{1.12}$$

gdzie:

$$u(s) = -\frac{2(k-1)}{k}\, s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}\, e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k}\, M^{-k} - \alpha,\ 0\leqslant s \leqslant k\ln M \tag{1.13}$$

$$v(s) = 2\, e^{-s}\left[2-(k-1)\ln M\right] - \alpha \qquad ,\ s \geqslant k\ln M. \tag{1.14}$$

Wartości graniczne i pochodne funkcji $u(s)$ i $v(s)$ mają postać:

$$\begin{cases} u(0) = \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k}-\alpha, \quad u(k\ln M) = 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] - \alpha \\ u'(s) = 2\,\frac{k-1}{k}\, e^{-s}\left(s-\frac{2k}{k-1}\right), \qquad 0 \leqslant s \leqslant k\ln M, \end{cases} \tag{1.15}$$

przy czym $k\ln M > \frac{2k}{k-1}$

$$\begin{cases} v(k\ln M) = 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] - \alpha, \qquad v(\infty) = -\alpha \\ v\ (s) = 2\, e^{-s}\left[(k-1(\ln M-2\right], \qquad s \geqslant k\ln M. \end{cases} \tag{1.16}$$

2. Z (1.8), (1.9) i (1.10) wynika, że

$$\max_{f\in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) = \max\left\{\max_{0\leq s\leq k\ln M} g(s)\ ,\ \max_{s\geq k\ln M} h(s)\right\}. \tag{2.1}$$

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli $k\geq 2$, $M > e^{\frac{2}{k-1}}$ oraz $\alpha\leq \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}})$, to dla dowolnej funkcji $f\in S_k(M)$ zachodzi oszacowanie ostre.

$$\operatorname{Re}(c_{2k-1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) \leq \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{2.2}$$

przy czym znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{\left(1 - \frac{f^{2k}(z)}{M^{2k}}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{z}{(1-z^{2k})^{\frac{1}{k}}} .$$

D o w ó d

Ponieważ $\frac{2k}{k-1} \leq k\ln M$, to z (1.15) wynika, że $u'(s) < 0$ dla $s<\frac{2k}{k-1}$, $u'(\frac{2k}{k-1}) = 0$, $u'(s) > 0$ dla $s>\frac{2k}{k-1}$, co oznacza, że funkcja $u(s)$ ma w przedziale $\langle 0,k\ln M\rangle$ minimum i

$$u_{min} = u\left(\frac{2k}{k-1}\right) = \frac{2(k-1)}{k}\left(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right) - \alpha .$$

Jeżeli zatem $\alpha\leq \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}})$, to z (1.15) wynika, że

$$u(0) > u(k\ln M) > \frac{2(k-1)}{k}\left(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}\right) \geq 0,$$

stąd i wobec (1.11) $g'(s)>0$ w $\langle 0,k\ln M\rangle$, więc

$$\max_{0\leq s\leq k\ln M} g(s) = g(k\ln M) = 2M^{-2k}\ln M\left[(k-1)\ln M-2\right]+2\alpha M^{-k}\ln M+ \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.4}$$

Z warunku $M > e^{\frac{2}{k-1}}$ oraz (1.16) wynika, że $v'(s) > 0$ w $\langle k\ln M, +\infty)$. Nadto dla $\alpha \leq \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}})$ wobec (1.15) i (1.16) $v(\infty) > v(k\ln M) = u(k\ln M) > 0$, więc $h'(s) > 0$ w $\langle k\ln M, +\infty)$, zatem

$$\max_{s \geq k\ln M} h(s) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1-M^{-2}).$$

Zauważmy następnie, że $h(k\ln M) = g(k\ln M)$, więc w myśl (2.1)

$$\max_{f \in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha \cdot c_{k+1}) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

a stąd wynika już nierówność (2.2) twierdzenia.

Prostym rachunkiem sprawdzamy, że funkcja (2.3) realizuje znak równości w (2.2).

Niech D_1, D_2, D_3 oznaczają następujące zbiory:

$$D_1 = \left\{(M,\alpha): e^{\frac{2}{k-1}} < M \leq M_0,\ \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}) < \alpha \leq 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]\right\}$$

$$D_2 = \left\{(M,\alpha): M_0 < M,\ \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}) < \alpha \leq 2e^{-s_1} - 2\sqrt{e^{-2s_1} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})}\right\}$$

$$D_3 = \left\{(M,\alpha): M_0 < M,\ 2e^{-s_1} - 2\sqrt{e^{-2s_1} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2} < \alpha \leq 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right]\right\}$$

gdzie s_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania:

$$-\frac{2(k-1)}{k} s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0,$$

i M_0 spełnia równanie:

$$e^{-s_1} + M^{-k}\left[(k-1)\ln M - 2\right] - \sqrt{e^{-2s_1} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2} = 0.$$

T w i e r d z e n i e 2

Dla każdej funkcji $f(z)$ należącej do klasy $S_k(M)$ ma miejsce następujące oszacowanie dokładne:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{jeżeli} \quad (M,\alpha) \in D_1 \\ \frac{1}{k}(1-M^{-2k} & \text{"} \quad (M,\alpha) \in D_2 \\ g(s_1) & \text{"} \quad (M,\alpha) \in D_3, \end{cases} \tag{2.6}$$

gdzie $g(s_1) = \frac{2}{k}(e^{-s_1}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k})$.

Znaki równości realizuje w pierwszych dwóch przypadkach funkcja (2.3), zaś w trzecim przypadku funkcja $f^*(z) \in S_k(M)$, która na mocy twierdzenia Löwnera jest przyporządkowana takiej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia związek:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 < t \leqslant s_1, \\ e^{-t}, & s_1 < t \leqslant k\ln M. \end{cases} \tag{2.7}$$

D o w ó d

Połóżmy

$$a(k,M) = \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}), \quad b(k,M) = 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right].$$

Wówczas dla każdej wartości $a(k,M) < \alpha < b(k,M)$ wobec (1.15) $u(0) > u(k\ln M) \geqslant 0$ oraz funkcja $u(s)$ posiada w przedziale $\langle 0, k\ln m\rangle$ minimum i

$$u_{min} = u(\tfrac{2k}{k-1}) = \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k} - e^{-\frac{2k}{k-1}}) - \alpha < 0.$$

Stąd i wobec (1.13) wynika, że równanie

$$-\frac{2(k-1)}{k} s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0 \tag{2.8}$$

posiada w $\langle 0, k\ln M\rangle$ dwa pierwiastki $s_1 < s_2$.

Ze względu na to, że $u(s)$ i $g'(s)$ mają w $\langle 0, k\ln M\rangle$ takie same znaki, więc

$$g'(s) > 0 \quad \text{dla} \quad s < s_1, \quad g'(s_1) = 0, \quad g'(s) < 0 \quad \text{dla} \quad s > s_1,$$

oraz

$$g'(s) > 0 \quad \text{dla} \quad s_2 < s < k\ln M,$$

zatem

$$\max_{0 \leq s \leq k\ln M} g(s) = \max\left\{g(s_1),\ g(k\ln M)\right\}, \tag{2.9}$$

gdzie:

$$g(s_1) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s_1)e^{-s_1} - M^{-k}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha\left[(1+s_1)e^{-s_1} - M^{-k}\right] - \frac{2}{k}(1+2s_1)e^{-s_1} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k})$$

bądź po uwzględnieniu (2.8):

$$g(s_1) = \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)}e^{-s_1} + \frac{2\alpha}{k-1}e^{-s_1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.10}$$

Z drugiej strony ze związków (1.16) wynika, że $v(\infty) > v(k\ln M) > 0$ oraz $v'(s) > 0$, więc również $h'(s) > 0$ i

$$\max_{s \geq k\ln M} h(s) = h(\infty) = \frac{1}{k}(1 - M^{-2k}). \tag{2.11}$$

Ponieważ $g(k\ln M) = h(k\ln M)$ i ze względu na (2.1) wobec (2.9) i (2.11):

$$\max_{f \in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2k+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) = \max\left\{g(s_1),\ h(\infty)\right\}. \tag{2.12}$$

Zauważmy, że do wyznaczenia $\max\left\{g(s_1),\ h(\infty)\right\}$ wystarczy określić w przedziale $a(k,M) < \alpha \leq b(k,M)$ znak następującej funkcji kwadratowej:

$$\varphi(\alpha, M) = g(s_1) - h(\infty) = \frac{2}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha}{k-1}e^{-s_1}, \tag{2.13}$$

przy każdym $e^{\frac{2}{k-1}} < M < \infty$ i całkowitym $k \geq 2$.

Funkcja $\varphi(\alpha, M)$ ma dwa miejsca zerowe $\alpha_1(k,M)$, $\alpha_2(k,M)$, lecz tylko:

$$\alpha_1(k,M) = 2e^{-s_1} - 2\sqrt{e^{-2s_1} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2} < 0.$$

Nadto zauważmy, że gdy M rośnie od $e^{\frac{2}{k-1}}$ do $+\infty$, to

$$\left\{\begin{array}{lll} s_1 & \text{maleje i} & \frac{k+1}{k-1} < s_1 < \frac{2k}{k-1}, \\ \alpha_1(k,M) & \text{"} & \text{od } 0 \text{ do } 2e^{-s_1}\left(1-\sqrt{1+\frac{k-1}{k}}\right), \\ a(k,M) & \text{"} & \text{od } 0 \text{ do } -\frac{2(k-1)}{k}e^{-\frac{2k}{k-1}}, \\ \text{zaś} & & \\ \multicolumn{3}{l}{b(k,M) \text{ osiąga w } M = e^{\frac{3k-1}{k(k-1)}} \text{ minimum i } b(k,e^{\frac{2}{k-1}}) = b(k,+\infty) = 0.} \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Aby określić znak funkcji $\varphi(\alpha,M)$ wystarczy zbadać w zależności od M położenie jej miejsca zerowego $\alpha_1(k,M)$ względem $a(k,M)$ i $b(k,M)$. Rozpatrzmy w tym celu kolejno dwie funkcje:

$$A(k,M)=\alpha_1(k,M)-a(k,M)=2\left[e^{-s_1}+\frac{k-1}{k}\left(e^{-\frac{2k}{k-1}}-M^{-k}\right)-\sqrt{e^{-2s_1}+\frac{k-1}{k}\left(e^{-s_1}-M^{-k}\right)^2}\right],$$

$$B(k,M)=\alpha_1(k,M)-b(k,M)=2\left[e^{-s_1}+M^{-k}((k-1)\ln M-2)-\sqrt{e^{-2s_1}+\frac{k-1}{k}\left(e^{-2s_1}-M^{-k}\right)^2}\right].$$

Ponieważ przy $M \to e^{\frac{2}{k-1}}$ wobec (2.13), $A(k,M) \to A(k,e^{\frac{2}{k-1}}) = 0$

oraz

$$\frac{dA}{dM} = 2(k-1)M^{-k-1}\left[1-\frac{e^{-s_1}-M^{-k}}{\sqrt{e^{-2s_1}+\frac{k-1}{k}\left(e^{-s_1}-M^{-k}\right)^2}}\right] > 2(k-1)M^{-k-1}\,\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{e^{-s_1}-M^{-k}}{e^{-s_1}}\right] = 2(k-1)e^{s_1}M^{-2k-1} > 0,$$

więc

$$\alpha_1(k,M > a(k,M) \quad \text{dla} \quad M > e^{\frac{2}{k-1}}. \tag{2.15}$$

Biorąc pod uwagę pochodną

$$\frac{dB}{dM} = 2(k-1)M^{-k-1}\left[- \frac{e^{-s_1} - M^{-k}}{\sqrt{e^{-2s_1} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_1} - M^{-k})^2}} + k(-\ln M + \frac{3k-1}{k(k-1)}) \right] .$$

Łatwo zauważyć, że gdy $M \; e^{\frac{2}{k-1}}$, to

$$\frac{dB(k,M)}{dM} \; \frac{dB(k,e^{\frac{2}{k-1}})}{dM} = 2(k-1)M^{-k-1} > 0, \quad \text{zaś} \quad \text{dla} \quad M \geqslant e^{\frac{3k-1}{k(k-1)}} \; \frac{dB}{dM}(k,M) < 0.$$

Oznacza to, że dla pewnego $M \in (e^{\frac{2}{k-1}}, \; e^{\frac{3k-1}{k(k-1)}})$ funkcja $B(k,M)$ osiąga maksimum.

Z drugiej strony wobec (2.13)

$$B(k, e^{\frac{2}{k-1}}) = 0 \quad \text{oraz przy} \quad M \to +\infty$$

$$B(k,M) \to B(k,+\infty) = 2\,e^{-s_1}(1 - \sqrt{1 + \frac{k-1}{k}}) < 0.$$

Stąd wynika, że istnieje taka wartość $M_0 \in (e^{\frac{2}{k-1}}, +\infty)$, dla której $B(k,M_0) = 0$. Ponadto

$$\begin{cases} \alpha_1(k,M) \geqslant b(k,M) & \text{dla} \quad e^{\frac{2}{k-1}} < M \leqslant M_0, \quad \text{oraz} \\ \alpha_1(k,M) < b(k,M) & \text{dla} \quad M > M_0 . \end{cases} \tag{2.16}$$

Z nierówności (2.15) i (2.16) wynika, że jeżeli $e^{\frac{2}{k-1}} \leqslant M \leqslant M_0$, wówczas $\varphi(\alpha,M) \leqslant 0$ dla $a(k,M) < \alpha \leqslant b(k,M)$, jeżeli zaś $M > M_0$, to $\varphi(\alpha,M) \leqslant 0$ dla $a(k,M) < \alpha \leqslant \alpha_1(k,M)$ oraz $\varphi(\alpha,M) > 0$ dla $\alpha_1(k,M) < \alpha \leqslant b(k,M)$.

Stąd i wobec (2.12) otrzymujemy:

$$\max_{f\in S_k(M)} \operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) = \begin{cases} h(\infty), & \text{jeżeli} \quad (\alpha,M)\in D_1 \\ h(\infty) & \quad " \quad (\alpha,M)\in D_2 \\ g(s_1) & \quad " \quad (\alpha,M)\in D_3 , \end{cases}$$

co kończy dowód twierdzenia.

Oznaczmy dalej przez Δ_1, Δ_2, Δ_3 następujące zbiory:

$$\Delta_1 = \Big\{(\alpha,M): e^{\frac{2}{k-1}} \leqslant M \leqslant M_1, 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] < \alpha \leqslant 2e^{-s_o} -$$

$$- 2\sqrt{e^{-2s_o} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2}\Big\},$$

$$\Delta_2 = \Big\{(\alpha,M): e^{\frac{2}{k-1}} < M \leqslant M_1, 2e^{-s_o} - 2\sqrt{e^{-2s_o} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2} < \alpha \leqslant 0\Big\},$$

$$\Delta_3 = \Big\{(\alpha,M): M > M_1, \quad 2M^{-k}\left[2-(k-1)\ln M\right] < \alpha \leqslant 0\Big\},$$

gdzie s_o jest pierwiastkiem równania

$$-\frac{2(k-1)}{k}\, s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}\, e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k}\, M^{-k} - \alpha = 0 ,$$

oraz M_1 spełnia równanie:

$$e^{-s_o} + M^{-k}\left[(k-1)\ln M - 2\right] - \sqrt{e^{-2s_o} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2} = 0 .$$

T w i e r d z e n i e 3

Dla dowolnej funkcji f klasy $S_k(M)$ ma miejsce następujące oszacowanie dokładne:

$$\operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), & \text{jeżeli } (\alpha,M)\in\Delta_1, \\ g(s_o), & \text{jeżeli } (\alpha,M)\in\Delta_2, \\ g(s_o), & \text{jeżeli } (\alpha,M)\in\Delta_3, \end{cases} \qquad (2.17)$$

gdzie:

$$g(s_o) = \frac{2}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}).$$

Funkcją ekstremalną w pierwszym przypadku jest funkcja (2.3), zaś w drugim i trzecim przypadku funkcja $f^*(z) \in S_k(M)$ przyporządkowana odpowiedniej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, gdzie $Q^*(t)$ spełnia równanie (1.6) dla $s = s_o$.

D o w ó d

Z (1.15) wynika, że $u(0)>0$, $u(k\ln M)<0$ i funkcja $u(s)$ posiada w $\langle 0,k\ln M\rangle$ minimum mniejsze od zera.
Z ciągłości funkcji $u(s)$ równanie

$$\frac{2(k-1)}{k} s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{1} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0$$

posiada w przedziale $\langle 0,k\ln M\rangle$ dokładnie jeden pierwiastek s_o.
Stąd i wobec (1.11) wynika, że $g'(s) > 0$ dla $s < s_o$, $g'(s_o) = 0$, $g'(s)<0$ dla $s > s_o$, zatem

$$\max_{0\leq s \leq k\ln M} g(s) = g(s_o). \tag{2.18}$$

Jeżeli $\alpha < 0$, to z (1.16) wynika, że $v(k\ln M)<0$, $v(\infty)>0$ i $v'(s)>0$, zatem istnieje w $\langle k\ln M, +\infty)$ taka wartość s_1, dla której $v(s_1) = 0$. Wobec tego w myśl (1.12) funkcja $h(s)$ posiada w punkcie s_1 minimum i dlatego

$$\max_{s\geq k\ln M} h(s) = \max\{h(k\ln M),\ h(\infty)\}. \tag{2.19}$$

Gdy $\alpha = 0$, to wobec (1.12) i (1.14) $h'(s) < 0$ dla $s \geq k\ln M$, więc równość (2.19) również zachodzi.
Z (2.18), (2.19) i wobec (2.1) otrzymujemy:

$$\max_{f\in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) = \max\{g(s_o),\ h(k\ln M),\ h(\infty)\},$$

a ponieważ $h(k\ln M) = g(k\ln M)$, to

$$\max_{f\in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) = \max\{g(s_o),\ h(\infty)\}. \tag{2.20}$$

Dalej postępujemy już analogicznie do tw. 2.

Aby znaleźć $\max\{g(s_0), h(\infty)\}$ wystarczy określić w przedziale $2M^{-k}[2-(k-1)\ln M] < \alpha \leq 0$ znak funkcji kwadratowej $\varphi(\alpha,M) = g(s_0) - h(\infty)$ dla każdego $M > e^{\frac{2}{k-1}}$. Podobnie jak w tw. 2 rozpatrujemy w tym celu funkcję $B(k,M) = \alpha_1(k,M) - b(k,M)$,

gdzie:

$$\alpha_1(k,M) = 2e^{-s_0} - 2\sqrt{e^{-2s_0} + \frac{k-1}{k}(e^{-s_0} - M^{-k})^2}, \quad b(k,M) = 2M^{-k}[2-(k-1)\ln M].$$

$B(k,M)$ pokrywa się z odpowiadającą jej funkcją rozpatrywaną w tw. 2, gdy w tej ostatniej w miejsce s_1 wstawimy s_0. Wobec tego istnieje taka wartość $M_1 \in (e^{\frac{2}{k-1}}, +\infty)$, dla której $B(k,M_1) = 0$ i

$$B(k,M) \geq 0 \quad \text{dla} \quad e^{\frac{2}{k-1}} < M \leq M_1,$$
$$B(k,M) < 0 \quad \text{dla} \quad M > M_1.$$

Z nierówności tych wynika, że jeżeli $e^{\frac{2}{k-1}} < M \leq M_1$, to

$$\varphi(\alpha,M) = g(s_0) - h(\infty) \leq 0 \quad \text{dla} \quad b(k,M) < \alpha \leq \alpha_1(k,M)$$

i

$$\varphi(\alpha,M) = g(s_0) - h(\infty) > 0 \quad \text{dla} \quad \alpha_1(k,M) < \alpha \leq 0.$$

Jeżeli zaś $M > M_1$, wówczas $\varphi(\alpha,M) = g(s_0) - h(\infty) > 0$ dla $b(k,M) < \alpha \leq 0$. Stąd i wobec (2.20) wynika, że

$$\max_{f\in S_k(M)} \mathrm{Re}(c_{2+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1}) = \begin{cases} h(\infty), & \text{jeżeli} \quad (\alpha,M)\in\Delta_1, \\ g(s_0), & \quad " \quad (\alpha,M)\in\Delta_2, \\ g(s_0), & \quad " \quad (\alpha,M)\in\Delta_3, \end{cases}$$

a to kończy już dowód twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 4

Jeżeli $k \geq 2$, $M > e^{\frac{2}{k-1}}$ oraz $0 < \alpha < \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k}$, to dla dowolnej funkcji $f \in S_k(M)$ ma miejsce następujące oszacowanie dokładne

$$\operatorname{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \frac{2}{k}(e^{-s_0}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}), \tag{2.21}$$

gdzie s_0 jest pierwiastkiem równania

$$-\frac{2(k-1)}{k}\, s\, e^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}\, e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0. \tag{2.22}$$

Znak równości realizuje funkcja $f^*(z)\in S_k(M)$ przyporządkowana takiej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia związek (1.6) dla $s = s_0$.

D o w ó d

Z założenia oraz z (1.15) wynika, że $u(0) > 0$ i $u(k\ln M) < 0$, więc wobec ciągłości $u(s)$ równanie (2.22) posiada w przedziale $(0,k\ln M)$ dokładnie jeden pierwiastek s_0. Ponieważ $u(s)$ i $g'(s)$ mają w przedziale $\langle 0,k\ln M\rangle$ takie same znaki, więc $g'(s) > 0$ dla $s < s_0$, $g'(s_0) = 0$, $g'(s) < 0$ dla $s > s_0$. Zatem

$$\max_{0\leqslant s\leqslant k\ln M} g(s) = g(s_0) = \frac{2(k-1)}{k^2}\left[(1+s_0)e^{-s_0}-M^{-k}\right]^2 + \frac{2}{k}\alpha\left[(1+s_0)e^{-s_0}-M^{-k}\right] -$$

$$-\frac{2}{k}(1+2s_0)e^{-2s_0} + \frac{1}{k}(1+M^{-2k}),$$

albo, uwzględniając warunek (2.22),

$$\max_{0\leqslant s\leqslant k\ln M} g(s) = \frac{2}{k}(e^{-s_0}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.23}$$

Zauważmy, że dla $0 < \alpha < \frac{2(k+1)}{k} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k}$ w myśl (1.14) $v(s) < 0$ dla $s \geqslant k\ln M$, więc wobec (1.12) również $h'(s) < 0$, wobec tego:

$$\max_{s\geqslant k\ln M} h(s) = h(k\ln M) = 2M^{-2k}\ln M\left[(k-1)\ln M-2\right] + 2\alpha M^{-k}\ln M + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}). \tag{2.24}$$

Ponieważ $g(k\ln M) = h(k\ln M)$, to z (2.23) i (2.24) otrzymujemy, że

$$\max\left\{g(s_0),h(k\ln M)\right\} = g(s_0) = \frac{2}{k}(e^{-s_0}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}).$$

Stąd i wobec (2.1) wynika, że

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})\leq \frac{2}{k}(e^{-s_0}-M^{-k})^2-\frac{\alpha^2}{2(k-1)}+\frac{2\alpha e^{-s_0}}{k-1}+\frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

tj. nierówność (2.21) twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 5

Jeżeli $k\geq 2$, $M>e^{\frac{2}{k-1}}$ i $\alpha\geq \frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}$, to dla dowolnej funkcji $f\in S_k(M)$ ma miejsce następujące oszacowanie dokładne:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})\leq \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3M^{-k}-\frac{2}{k}(1-M^{-k})\right], \tag{2.25}$$

przy czym znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{\left(1-\frac{f^k(z)}{M^k}\right)^{\frac{2}{k}}}=\frac{z}{(1-z^k)^{\frac{2}{k}}}. \tag{2.26}$$

D o w ó d

Łatwo zauważyć, że dla $\alpha\geq\frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}$ z (1.15) wynika, że $u(s)\leq 0$ w $\langle 0,k\ln M\rangle$, zaś wobec (1.14) $v(s)<0$ w $\langle k\ln M,+\infty)$, więc również $g'(s)<0$ w $\langle 0,k\ln M\rangle$ i $h'(s)<0$ w $\langle k\ln M,+\infty)$.

Stąd wynika, że

$$\max_{0\leq s\leq k\ln M} g(s)=g(0) \quad \text{i} \quad \max_{s\geq k\ln M} h(s)=h(k\ln M).$$

A ponieważ $g(k\ln M)=h(k\ln M)$, to

$$\max\{g(0),h(k\ln M)\}=g(0)=\frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3M^{-k}-\frac{2}{k}(1-M^{-k})\right].$$

Zatem, w myśl (2.1) otrzymujemy, że:

$$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})\leq\frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3M^{-k}-\frac{2}{k}(1-M^{-k})\right],$$

tj. nierówność (2.25) twierdzenia.

LITERATURA

[1] Pethe K.: O zbiorze wartości jednego funkcjonału określonego w klasach funkcji jednolistnych k-symetrycznych i ograniczonych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Matematyka-Fizyka z. 58 (w druku).

[2] Pethe K.: Maksimum funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-ck_{+1}+\alpha c_{k+1})$ w klasie funkcji jednolistnych k-symetrycznych w kole jednostkowym. Cz. I. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Matematyka-Fizyka z. 58 (w druku).

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji 3.11.1987 r.

МАКСИМУМ ФУНКЦИОНАЛА $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ, к-СИМЕТРИЧНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Р е з ю м е

В статье получено методом К. Левнера для любой функции

$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1} \in S_k(M), \quad k \geq 0, \quad M > e^{\frac{2}{k-1}}$$

точную оценку функционала $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$, $-\infty < \alpha < \infty$ в виде:

1. $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leq \frac{1}{k}(1-M^{-2k})$, для $\alpha \leq \frac{2(k-1)}{k}(M^{-k}-e^{-\frac{2k}{k-1}})$,

2. $$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leq \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{если} \quad (M,\alpha) \in D_1 \\ \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{если} \quad (M,\alpha) \in D_2 \\ \frac{2}{k}(e^{-s_1}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \\ \text{если} \quad (M,\alpha) \in D_3, & \end{cases}$$

где D_1, D_2, D_3 множества определённые на пятой страницы, S_1 - корень уравнения

$$-\frac{2(k-1)}{k} se^{-s} + \frac{2(k+1)}{k} e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k} M^{-k} - \alpha = 0 .$$

$$3.\ \mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{если} \quad (M,\alpha)\in\Delta_1 \\ g(s_o) & \text{"} \quad (M,\alpha)\in\Delta_2 \\ g(s_o) & \text{"} \quad (M,\alpha)\in\Delta_3 \end{cases}$$

где

$$g(s_o) = \frac{2}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 это множества определённые на стр. 10.

$$4.\ \mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{2}{k}(e^{-s_o}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \\ \text{для} \qquad 0<\alpha<\frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}, \\ \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3M^{-k}-\frac{2}{k}(1-M^{-k})\right] \\ \text{для} \qquad \alpha\geqslant\frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}, \end{cases}$$

где s_o - корень уравнения

$$-\frac{2(k-1)}{k}se^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k} - \alpha = 0.$$

MAXIMUM OF THE FUNCTIONAL $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ IN THE CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS, k-SYMETRICAL AND BOUNDED IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

For the optimal function

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1} z^{nk+1} \in S_k(M), \quad k\geqslant 2, \quad M>e^{\frac{2}{k-1}},$$

it was obtained for the functional $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ the following sharp estimation:

1. $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \frac{1}{k}(1-M^{-2k})$, for $\alpha \leqslant \frac{2(k-1)}{k}\left(m^{-k}-e^{-\frac{2k}{k-1}}\right)$.

2. $$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{if} \quad (M,\alpha)\in D_1 \\ \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \text{if} \quad (M,\alpha)\in D_2 \\ \frac{2}{k}(e^{-s_1}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_1}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) & \\ \text{if} \quad (M,\alpha)\in D_3, & \end{cases}$$

where the sets D_1, D_2, D_3 were defined on the page 5.

3. $$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{k}(1-M^{-2k} & \text{if} \quad (M,\alpha)\in \Delta_1 \\ g(s_o) & \text{if} \quad (M,\alpha)\in \Delta_2 \\ g(s_o) & \text{if} \quad (M,\alpha)\in \Delta_3 \end{cases}$$

where

$$g(s_o) = \frac{2}{k}(e^{-s_o} - M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}),$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 were defined on the page 10.

4. $$\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1}) \leqslant \begin{cases} \frac{2}{k}(e^{-s_o}-M^{-k})^2 - \frac{\alpha^2}{2(k-1)} + \frac{2\alpha e^{-s_o}}{k-1} + \frac{1}{k}(1-M^{-2k}) \\ \text{for} \quad 0<\alpha<\frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}, \\ \frac{1}{k}(1-M^{-k})\left[1+2\alpha-3M^{-k}-\frac{2}{k}(1-M^{-k})\right] \\ \text{for} \quad \alpha \geqslant \frac{2(k+1)}{k}+\frac{2(k-1)}{k}M^{-k}, \end{cases}$$

where s_o is the root of the equation

$$-\frac{2(k-1)}{k}se^{-s} + \frac{2(k+1)}{k}e^{-s} + \frac{2(k-1)}{k}M^{-k} - \alpha = 0.$$