ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Karol PETHE

OSZACOWANIE FUNKCJONAŁU $\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2)$ W KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH I OGRANICZONYCH W KOLE JEDNOSTKOWYM

Streszczenie. W pracy został przedstawiony metodą Löwnera i za pomocą twierdzenia 1 z pracy [1] nowy dowód dokładnego oszacowania funkcjonału $\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2)$, określonego w klasie $S(M)$ dla $0 \leq \alpha \leq 4$. Uzyskano również oszacowanie dokładne tego funkcjonału dla pozostałych rzeczywistych α. Otrzymane oszacowanie wyraża się w postaci następujących nierówności:

$$\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2) \leq \begin{cases} 1-M^{-2}, & \text{jeżeli} \quad \alpha \leq 0 \\ \frac{\alpha^2}{4}\ln M + 1 - M^{-2} & \text{dla} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{4}{M} \\ -\frac{\alpha^2}{4}\ln\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{8}\alpha^2 - 2\alpha M^{-1} + 1 + M^{-1} & \text{dla} \quad \frac{4}{M} < \alpha \leq 4 \\ (1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1}) & \text{dla} \quad \alpha > 4. \end{cases}$$

Znaki równości mają miejsce dla funkcji:

$$\frac{f(z)}{1-\frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1-z^2} \quad \text{gdy} \quad \alpha \leq 0, \quad \frac{f(z)}{(1-\frac{f(z)}{M})^2} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{gdy} \quad \alpha > 4.$$

Jeżeli $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$ bądź $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$, to znak równości realizuje funkcja $f^* \in S_M$ przyporządkowana takiej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia związek:

$$e^{-t} \cos Q(t) = \frac{\alpha}{4},$$

gdy $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$

bądź

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4}, & 0 \leq t \leq -\ln\frac{\alpha}{4} \\ e^{-t}, & -\ln\frac{\alpha}{4} < t \leq \ln M \end{cases}$$

gdy $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$.

Niech S_M będzie klasą funkcji

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{1}$$

jednolistnych w kole $\{|z| < 1\}$, spełniających warunek $|f(z)| < M$, $M > 1$.

W pracach [2] i [3] uzyskałem oszacowanie ostre funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{2+1} - c_{k+1}^2 + \alpha c_{k+1})$ w klasie $S_k(M($, dla $k \geqslant 2$ i $-\infty < \alpha < +\infty$. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie oszacowania ostrego tego funkcjonału dla $k = 1$ i $-\infty < \alpha < +\infty$, jak również przedstawienie nowego dowodu tych nierówności, jakie uzyskali D.W. Temple i J.A. Jenkins w pracy [4]. W tym celu skorzystamy z parametrycznego przedstawienia współczynników c_2 i c_3 funkcji (1) następującymi wzorami Löwnera:

$$\begin{cases} c_2 = -2 \displaystyle\int_0^{\ln M} e^{-t} k(t)dt, \\ c_3 = c_2^2 - 2 \displaystyle\int_0^{\ln M} e^{-2t} k^2(t)dt, \end{cases} \tag{2}$$

w których $k(t) = e^{iQ(t)}$, gdzie $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w przedziale $\langle 0, \ln M \rangle$.

Jeżeli położymy $c_2 = a_2 + i\, b_2$, $c_3 = a_3 + i\, b_3$ oraz $X = a_2$, $Y = \mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2)$, wówczas ze wzorów (2) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} a_2 = -2 \displaystyle\int_0^{\ln M} e^{-t} \cos Q(t)dt, \qquad b_2 = -2 \int_0^{\ln M} e^{-t} \sin Q(t)dt \\ a_3 = a_2^2 - b_2^2 - 2 \displaystyle\int_0^{\ln M} e^{-2t} \cos Q(t)dt \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} X = a_2 \\ Y = \alpha X - 4 \displaystyle\int_0^{\ln M} e^{-2t} \cos^2 Q(t)dt + 1 - M^{-2}. \end{cases} \tag{4}$$

Tak więc zadanie sprowadza się do znalezienia:

$$\max_{f \in S_M} \left\{ \alpha X - 4 \int_0^{\ln M} e^{-2t} \cos^2 Q(t)dt + 1 - M^{-2} \right\} . \tag{5}$$

Wystarczy w tym celu rozpatrywać X tylko z przedziału $\langle 0, 2(1-M^{-1}) \rangle$, ponieważ z jednej strony zamiana $Q(t)$ na $Q(t) + \pi$ zmienia X na $-X$, a nie zmienia znaku całki

$$\int_0^{\ln M} e^{-2t} \cos^2 Q(t)dt,$$

z drugiej zaś strony (5) zależy od znaku iloczynu αX, $-\infty < \alpha < +\infty$, a nie od znaku wartości X.

Niech $\overline{Y}(X)$ oznacza największą wartość prawej strony (4) przy ustalonej wartości X z przedziału $\langle 0, 2(1-M^{-1}) \rangle$.
Wówczas wobec tw. 1 [1], gdy $k=1$, otrzymujemy dla $Y(X)$, $X \in \langle 0, 2(1-M^{-1}) \rangle$ następujące przedstawienie:

$$\begin{cases} X = 2\left[1+s(e^{-s} - M^{-1}\right], \\ \overline{Y} = \alpha X - 2(1+2s)e^{-2s} + 1 + M^{-2}, \end{cases} \tag{6}$$

jeżeli $0 \leq s \leq \ln M$,

$$\begin{cases} X = 2\, e^{-s} \ln M, \\ Y = \alpha X - 4\, e^{-2s} \ln M + 1 - M^{-2}, \end{cases} \tag{7}$$

jeżeli $s \geqslant \ln M$,
gdzie s zależy tylko od X.
Równości (6) są osiągnięte tylko dla funkcji:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & 0 \leq t \leq s \\ e^{-t} & s < t \leq \ln M, \end{cases} \tag{8}$$

zaś równości (7) tylko dla funkcji:

$$e^{-t}\cos Q(t) = e^{-s}, \qquad s \geqslant \ln M, \tag{9}$$

Jeżeli obecnie wyrugujemy X z (6) i (7), a następnie położymy:

$$\overline{Y}(s) = \begin{cases} g(s), & 0 \leqslant s \leqslant \ln M, \\ h(s), & s \geqslant \ln M, \end{cases}$$

gdzie:

$$g(s) = 2\alpha\left[(1+s)e^{-s}-M^{-1}\right]-2(1+2s)e^{-2s}+1+M^{-2}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \ln M, \tag{10}$$

$$h(s) = 2\alpha e^{-s}\ln M-4e^{-2s}\ln M + 1-M^{-2}, \qquad s \geqslant \ln M, \tag{11}$$

to wówczas:

$$\max_{f \in S_M} \operatorname{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2) = \max\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant \ln M} g(s), \quad \max_{s \geqslant \ln M} h(s)\right\}. \tag{12}$$

Zauważmy, że pochodne

$$g'(s) = 2\, se^{-s}\, u(s), \quad h'(s) = 2\, e^{-s}\ln M\, u(s) \tag{13}$$

mają taki sam znak co funkcja:

$$u(s) = 4\, e^{-s} - \alpha\ , \tag{14}$$

dla której

$$u(0) = 4 - \alpha\ , \quad u(\ln M) = \frac{4}{M} - \alpha, \quad u(\infty) = -\alpha\ . \tag{15}$$

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli $\alpha \leqslant 0$, to dla dowolnej funkcji $f \in S_M$ zachodzi oszacowanie dokładne

$$\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2) \leqslant 1 - M^{-2}\ . \tag{16}$$

Znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{1-\frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1-z^2}. \tag{17}$$

D o w ó d

Dla $\alpha \leq 0$ z (15) wynika, że

$u(0) > u(\ln M) > u(\infty) \geq 0$, zatem dla $s \geq 0$ $u(s) > 0$, więc wobec (13) $g'(s) > 0$, gdy $0 \leq s \leq \ln M$ oraz $h'(s) > 0$, gdy $s \geq \ln M$.

Wobec tego

$$\max_{0 \leq s \leq \ln M} g(s) = g(\ln m) = 2\alpha M^{-1}\ln M - 4M^{-2}\ln M + 1 - M^{-2},$$

$$\max_{s \geq \ln M} h(s) = h(\infty) = 1 - M^{-2}.$$

Ponieważ $g(\ln M) < 1 - M^{-2} = h(\infty)$, to

$$\max\{g(\ln M),\ h(\infty)\} = h(\infty) = 1 - M^{-2},$$

a stąd już wynika nierówność (15).
Prostym rachunkiem sprawdzamy, że funkcja (16) realizuje znak równości w (15).

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$, to w klasie funkcji S_M ma miejsce następujące oszacowanie dokładne:

$$\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2) \leq \frac{\alpha^2}{4}\ln M + 1 - M^{-2}. \tag{17}$$

Znak równości realizuje funkcja f^* (S_M przyporządkowana takiej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia związek:

$$e^{-t}\cos Q(t) = \frac{\alpha}{4} \tag{18}$$

D o w ó d

Jeżeli $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$, to wobec (15) $u(0) > u(\ln M) \geq 0$ i $u(\infty) < 0$, nadto $u(s)$ jest funkcją malejącą w $(0, +\infty)$. Jeżeli $0 \leq s \leq \ln M$, to wobec (13) $g'(s) > 0$ i

$$\max_{0 \leq s \leq \ln M} g(s) = g(\ln M), \tag{19}$$

gdy zaś $s \geqslant \ln M$, wówczas równanie

$$4\, e^{-s} - \alpha = 0$$

posiada w przedziale $\langle \ln M, +\infty)$ jeden pierwiastek $s_0 = -\ln \frac{\alpha}{4}$.
Zatem wobec (13)

$h'(s) > 0$ dla $s < -\ln \frac{\alpha}{4}$, $h'(-\ln \frac{\alpha}{4}) = 0$, $h'(s) < 0$ dla $s > -\ln \frac{\alpha}{4}$.
Oznacza to, że funkcja $h(s)$ posiada w punkcie $s_0 = -\ln \frac{\alpha}{4}$ maksimum i

$$\max_{s \geqslant \ln M} h(s) = h(-\ln \tfrac{\alpha}{4}) = \frac{\alpha^2}{4} \ln M + 1 - M^{-2}. \tag{20}$$

Z (19), (20) i wobec tego, że $g(\ln M) = h(\ln M)$, otrzymujemy:

$$\max \left\{ g(\ln M),\ h(-\ln \tfrac{\alpha}{4}) \right\} = h(-\ln \tfrac{\alpha}{4}) = \frac{\alpha^2}{4} \ln M + 1 - M^{-2},$$

skąd wynika nierówność (17) twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli $f(z)$ jest funkcją klasy S_M, to dla każdego α, $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$ ma miejsce następujące oszacowanie dokładne:

$$\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2 + \alpha c_2) \leq -\frac{\alpha^2}{4} \ln \frac{\alpha}{4} + \frac{3}{8}\alpha^2 - 2\alpha M^{-1} + 1 + M^{-2}. \tag{21}$$

Znak równości realizuje funkcja $f^* \in S_M$, przyporządkowana odpowiedniej funkcji $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, dla której $Q^*(t)$ spełnia równanie:

$$e^{-t} \cos Q(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4}, & 0 \leq t \leq -\ln \frac{\alpha}{4}, \\ e^{-t}, & -\ln \frac{\alpha}{4} < t \leq \ln M. \end{cases}$$

D o w ó d

Zauważmy, że z (15) wynika, że dla każdego α, $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$, $u(0) \geqslant 0$, $u(\infty) < u(\ln M) < 0$ oraz $u'(s) < 0$.
Tak więc w przedziale $0 \leq s \leq \ln M$, wobec ciągłości funkcji $u(s)$, równanie $4\, e^{-s} - \alpha = 0$ posiada jeden pierwiastek $s_0 = -\ln \frac{\alpha}{4}$, zaś dla $s > \ln M$ $u(s) < 0$. Zatem

$g'(s)>0$ dla $s<-\ln\frac{\alpha}{4}$, $g'(-\ln\frac{\alpha}{4})=0$, $g'(s)<0$ dla $-\ln\frac{\alpha}{4}<s\leqslant\ln M$

oraz $h'(s)<0$ dla $s\geqslant\ln M$, więc

$$\max_{0\leqslant s\leqslant\ln M} g(s)=g(-\ln\tfrac{\alpha}{4})$$

$$\max_{s\geqslant\ln M} h(s)=h(\ln M)\ ,$$

a ponieważ $g(\ln M)=h(\ln M)$, to:

$$\max\left\{g(-\ln\tfrac{\alpha}{4}),\ h(\ln M)\right\}=g(-\ln\tfrac{\alpha}{4})=-\frac{\alpha^2}{4}\ln\frac{\alpha}{4}+\frac{3}{8}\alpha^2-2\alpha M^{-1}+1+M^{-2},$$

skąd już wynika nierówność (21).

T w i e r d z e n i e 4

Jeżeli $f\in S_M$, to dla każdego α, $\alpha>4$, ma miejsce następujące oszacowanie dokładne.

$$\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)\leqslant(1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1}), \tag{22}$$

przy czym znak równości realizuje funkcja:

$$\frac{f(z)}{(1-\frac{f(z)}{M})^2}=\frac{z}{(1-z)^2}\ . \tag{23}$$

D o w ó d

Z (15), (14) i (13) wynika, że $g'(s)<0$ w $\langle 0,\ln M\rangle$ i $h'(s)<0$ w $\langle\ln M,+\infty)$, więc

$\max\limits_{0\leqslant s\leqslant\ln M} g(s)=g(0)$, $\max\limits_{s\geqslant\ln M} h(s)=h(\ln M)$, stąd i wobec tego, że

$$g(\ln M)=h(\ln M),$$

$\max\left\{g(0),\ h(\ln M)\right\}=g(0)=(1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1})$, więc

$\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)\leqslant(1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1})$.

Ponadto łatwo sprawdzić, że równość zachodzi dla funkcji (23).

LITERATURA

[1] Pethe K.: O zbiorze wartości jednego funkcjonału określonego w klasach funkcji jednolistnych k-symetrycznych i ograniczonych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat.-Fiz., nr 58 (w druku).

[2] Pethe K.: Maksimum funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ w klasie funkcji jednolistnych k-symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Cz. I, s. Mat.-Fiz., z. 58, (w druku).

[3] Pethe K.: Maksimum funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{2k+1}-c_{k+1}^2+\alpha c_{k+1})$ w klasie funkcji jednolistnych k-symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym. Cz. II, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat.-Fiz., z. 58, (w druku).

[4] De Temple D.W., Jenkins J.A.: A Loewner approach to a coefficient inequality for bounded univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 1977, 65 Nr 1, pp. 125-126.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji 3.01.1987 r.

ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛА $\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)$ НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Р е з ю м е

В статье методом параметрических представлений К. Левиера дается новое доказательство точной оценки функционала $\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)$ на классе S_M для $0 \leq \alpha \leq 4$. Получено также точную оценку этого функционала для остальных действительных α.

И так, полученные оценки представляются в виде:

$$\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2) \leq \begin{cases} 1-M^{-2} & \text{для} \quad \alpha \leq 0, \\ \frac{\alpha^2}{4}\ln M + 1 - M^{-2} & \text{для} \quad 0 < \alpha \leq \frac{4}{M}, \\ -\frac{\alpha^2}{4}\ln\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{8}\alpha^2 - 2\alpha M^{-1} + 1 + M^{-1} & \\ \text{для} \quad \frac{4}{M} < \alpha \leq 4, & \\ (1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1}) & \text{для} \quad \alpha > 4. \end{cases}$$

Равенства достигаются для функций

$$\frac{f(z)}{1-\frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1-z^2} \quad \text{если} \quad \alpha \leq 0, \qquad \frac{f(z)}{\left(1-\frac{f(z)}{M}\right)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{если} \quad \alpha > 4.$$

Если $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$ или $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$, то экстремальными функциями служат функции $f^* \in S_M$ сопоставленные такой функции $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$, для которой $Q^*(t)$ удовметворяет уравнению

$$e^{-t}\cos Q(t) = \frac{\alpha}{4},$$

если $0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$, или

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4}, & 0 \leq t \leq \ln\frac{\alpha}{4} \\ e^{-t}, & -\ln\frac{\alpha}{4} < t \leq \ln M \end{cases}$$

если $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$.

THE ESTIMATION OF THE FUNCTIONAL $\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)$ IN THE CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS BOUNDED IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

In this paper it was presented, using the Loewner's method and theorem from the paper [1], a new proof of the sharp estimation of the functional $\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2)$ defined in the class $S(M)$ for $0 \leq \alpha \leq 4$.
It was obtained also the sharp estimation of this functional for the rest rakues of the real α. The estimation is presented in the form of the following inequality:

$$\mathrm{Re}(c_3-c_2^2+\alpha c_2) \leq \begin{cases} 1-M^{-2} & \text{if} \quad \alpha \leq 0 \\ \frac{\alpha^2}{4}\ln M+1-M^2 & \text{for} \quad 0 < \alpha \leq \frac{4}{M} \\ -\frac{\alpha^2}{4}\ln\frac{\alpha}{4}+\frac{3}{8}\alpha^2-2\alpha M^{-1}+1+M^{-1} & \text{for} \quad \frac{4}{M} < \alpha \leq 4 \\ (1-M^{-1})(2\alpha-1-M^{-1}) & \text{for} \quad \alpha > 4. \end{cases}$$

The equality signs are valid for the function

$$\frac{f(z)}{1-\frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1-z^2} \quad \text{when} \quad \alpha \leq 0, \qquad \frac{f(z)}{\left(1-\frac{f(z)}{M}\right)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{when} \quad \alpha > 4.$$

If $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{M}$ or $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$ then the equality sign is realised by the function $f^* \in S_M$ ascribed to such function $k^*(t) = e^{iQ^*(t)}$ for which $Q^*(t)$ fullfils the equality

$$e^{-t}\cos Q(t) = \frac{\alpha}{4}, \qquad \text{when} \quad 0 < \alpha \leq \frac{4}{M}$$

or

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4} & 0 < t \leq -\ln\frac{\alpha}{4} \\ e^{-t} & -\ln\frac{\alpha}{4} < t \leq \ln M \end{cases}$$

when $\frac{4}{M} < \alpha \leq 4$.