ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Damian BRÜCKNER

UKŁAD FUNDAMENTALNY ROZWIĄZAŃ UOGÓLNIONEGO STOCHASTYCZNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO DRUGIEGO RZĘDU

Streszczenie. Praca jest kontynuacją opracowania [1]. Rozważa się w niej uogólnione stochastyczne liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu $X'' + W' \cdot X = 0$, gdzie W' jest pochodną uogólnionego procesu stochastycznego na przestrzeni $D(a,b)$ funkcji zespolonych lub rzeczywistych określonych na przedziale (a,b) o nośniku zwartym, zawartym w przedziale (a,b) i nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. W pracy wykazano, że Wrońskian dwóch dowolnych rozwiązań rozważanego uogólnionego stochastycznego równania różniczkowego drugiego rzędu jest uogólnionym procesem stochastycznym wyznaczonym przez zmienną losową.
Udowodniono także, że dwa rozwiązania tego równania są układem fundamentalnym wtedy i tylko wtedy, gdy Wrońskian tych rozwiązań nie jest zerowym uogólnionym procesem stochastycznym.
W pracy podano układ fundamentalny rozwiązań dla uogólnionego stochastycznego równania różniczkowego $X'' + \delta(t-\xi)X = 0$, gdzie $\delta(t-\xi)$ jest pochodną uogólnionego procesu stochastycznego $H(t-\xi)$ wyznaczonego przez zwykły proces stochastyczny $H(t-\xi(\omega))$, $t \in (a,b)$, $\omega \in \Omega$, którego realizacje są funkcjami Heavisidea. Twierdzenia pracy uogólniają odpowiednie twierdzenia z pracy [4] na przypadek stochastyczny.

Rozważmy uogólnione stochastyczne liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$X'' + W' \cdot X = 0 , \tag{1}$$

przy czym W' jest pochodną uogólnionego procesu stochastycznego W wyznaczonego przez zwykły, rzeczywisty, mierzalny proces stochastyczny $W(t,\omega)$, $t \in (a,b)$, $\omega \in \Omega$, taki że dla p.w. $\omega \in \Omega$ realizacje $W(\cdot,\omega) \in L^2_{loc}(a,b)$.

Przez uogólniony proces stochastyczny na przestrzeni liniowej U rozumiemy funkcję X określoną na U, której wartościami $\langle X,u \rangle$ są rzeczywiste lub zespolone zmienne losowe na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$ taką, że dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$ i dowolnych rzeczywistych lub zespolonych liczb α_1, α_2

$$\langle X, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle = \alpha_1 \langle X,u_1 \rangle + \alpha_2 \langle X,u_2 \rangle .$$

Oznaczmy przez $D(a,b)$ przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych lub zespolonych określonych na przedziale (a,b) nieskończenie wiele razy różniczkowalnych i zerujących się na zewnątrz pewnego przedziału $[c,d]$, $[c,d] \subset (a,b)$.

Przy pewnych dodatkowych założeniach [1] zwykły proces stochastyczny wyznacza uogólniony proces stochastyczny na przestrzeni $D(a,b)$.

Każdy uogólniony proces stochastyczny na przestrzeni $D(a,b)$ jest różniczkowalny. Przez pochodną uogólnionego procesu stochastycznego X na przestrzeni $D(a,b)$ rozumiemy uogólniony proces stochastyczny X' na $D(a,b)$, określony wzorem:

$$\langle X', \varphi \rangle \overset{\text{p.w.}}{=} \langle X, -\varphi' \rangle$$

dla każdej funkcji $\varphi \in D(a,b)$.

Rozwiązaniem równania (1) w (a,b) nazywamy uogólniony proces stochastyczny X na $D(a,b)$, wyznaczony przez zwykły, rzeczywisty i mierzalny proces stochastyczny $X(t,\omega)$, $t \in (a,b), \omega \in \Omega$, o p.w. realizacjach absolutnie ciągłych i takich, że pochodna realizacji w sensie dystrybucyjnym $X'(\cdot,\omega) \in L^2_{loc}(a,b)$, spełniający równość

$$\langle X'' + W' \cdot X, \varphi \rangle = 0$$

dla $\varphi \in D(a,b)$.

Iloczyn $W' \cdot X$ rozumiemy jako $(W \cdot X)' - W \cdot X'$, czyli

$$\langle W'X, \varphi \rangle (\omega) = -\int_a^b W(t,\omega)X(t,\omega)\varphi'(t)dt - \int_a^b W(t,\omega)X'(t,\omega)\varphi(t)dt.$$

Niech X będzie rozwiązaniem równania (1) w (a,b). Zdefiniujmy uogólniony proces stochastyczny Y wzorem:

$$Y = X' + W \cdot X \,. \tag{2}$$

W pracy [1] wykazano, że proces Y jest wyznaczony przez zwykły rzeczywisty proces stochastyczny $Y(t,\omega)$, $t \in (a,b), \omega \in \Omega$, którego p.w. realizacje są absolutnie ciągłe.

D e f i n i c j a 1

Wrońskianem dwóch rozwiązań X_1 i X_2 równania (1) nazywamy uogólniony proces stochastyczny Z na przestrzeni $D(a,b)$, wyznaczony przez zwykły rzeczywisty proces stochastyczny $Z(t,\omega)$ dany wzorem:

$$Z(t,\omega) = X_1(t,\omega)X_2'(t,\omega) - X_2(t,\omega)X_1'(t,\omega).$$

T w i e r d z e n i e 1

Wrońskian Z dwóch dowolnych rozwiązań równania (1) jest uogólnionym procesem stochastycznym wyznaczonym przez zmienną losową.

D o w ó d

Niech X_1 i X_2 będą rozwiązaniami równania (1) wyznaczonymi odpowiednio przez zwykłe procesy stochastyczne $X_1(t,\omega)$ i $X_2(t,\omega)$ $t \in (a,b), \omega \in \Omega$. Dla p.w. $\omega \in \Omega$

$$Z(\cdot,\omega) = X_1(\cdot,\omega)X_2'(\cdot,\omega) - X_2(\cdot,\omega)X_1'(\cdot,\omega) \in L^2_{loc}(a,b).$$

Niech Z będzie uogólnionym procesem stochastycznym na $D(a,b)$ wyznaczonym przez $Z(t,\omega)$.
Różniczkując równość

$$Z = X_1 \cdot X_2' - X_2 \cdot X_1'$$

i uwzględniając równość (1) otrzymujemy:

$$Z' = X_1 \cdot X_2'' - X_2 \cdot X_1'' = -X_1(W' \cdot X_2) + X_2(W' \cdot X_1) = 0.$$

Zerowy uogólniony proces stochastyczny oraz uogólniony proces stochastyczny Z są pierwotnymi uogólnionego procesu stochastycznego Z'. Wiadomo [1], że różnica $Z - 0 = Z$ jest uogólnionym procesem stochastycznym na $D(a,b)$, wyznaczonym przez zmienną losową, co kończy dowód.

T w i e r d z e n i e 2

Dla dwóch dowolnych rozwiązań X_1 i X_2 równania (1) i odpowiednio utworzonych uogólnionych procesów stochastycznych Y_1 i Y_2 danych wzorem (2) zachodzi równość:

$$Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1, \tag{3}$$

gdzie Z oznacza Wrońskian rozwiązań X_1 i X_2.

D o w ó d

$$Y_1 = X_1' + W \cdot X_1,$$

$$Y_2 = X_2' + W \cdot X_2.$$

Stąd

$$X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1 = X_1 \cdot (X_2' + W \cdot X_2) - X_2 \cdot (X_1' + W \cdot X_1) = X_1 \cdot X_2' - X_2 \cdot X_1' = Z.$$

D e f i n i c j a 2

Dwa rozwiązania X_1 i X_2 równania (1) nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań równania (1), gdy każde rozwiązanie tego równania daje się zapisać jako $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, gdzie λ_1, λ_2 są zmiennymi losowymi.

T w i e r d z e n i e 3

Dwa rozwiązania X_1 i X_2 równania (1) są układem fundamentalnym rozwiązań tego równania wtedy i tylko wtedy, gdy Wrońskian Z rozwiązań X_1 i X_2 nie jest zerowym uogólnionym procesem stochastycznym.

D o w ó d

Niech X_1 i X_2 będą układem fundamentalnym rozwiązań równania (1). Wówczas dowolne rozwiązanie X równania (1) daje się zapisać:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2.$$

Dalej, niech

$$Y_1 = X_1' + W \cdot X_1 ,$$

$$Y_2 = X_2' + W \cdot X_2 .$$

Obliczmy pochodną uogólnionego procesu stochastycznego X

$$X' = \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' .$$

Zauważmy, że

$$Y = X' + W \cdot X = \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' + W \cdot (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 =$$

$$= \lambda_1 (X_1' + W\, X_1) + \lambda_2 (X_2' + W\, X_2) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 .$$

Niech $X_1(t,\omega)$, $X_2(t,\omega)$, $Y_1(t,\omega)$ i $Y_2(t,\omega)$, $t \in (a,b), \omega \in \Omega$ będą zwykłymi procesami stochastycznymi wyznaczającymi odpowiednio uogólnione procesy stochastyczne X_1, X_2, Y_1, Y_2.

Pary $(X_1(t,\omega),\ Y_1(t,\omega))$ i $(X_2(t,\omega),\ Y_2(t,\omega))$, $t\in(a,b)$, $\omega\in\Omega$ są układem fundamentalnym rozwiązań układu stochastycznych równań różniczkowych

$$\begin{cases} X'(t,\omega) = -W(t,\omega)X(t,\omega) + Y(t,\omega) \\ Y'(t,\omega) = -W^2(t,\omega)X(t,\omega) + W(t,\omega)Y(t,\omega). \end{cases} \tag{5}$$

Stąd

$$X_1\cdot Y_2 - X_2\cdot Y_1 \neq 0 .$$

Dalej, uwzględniając twierdzenie 2, otrzymujemy, że Wrońskian Z rozwiązań X_1, X_2 równania (1) nie jest zerowym uogólnionym procesem stochastycznym.

Załóżmy, że Wrońskian Z rozwiązań X_1 i X_2 równania (1) nie jest zerowym uogólnionym procesem stochastycznym.
Uwzględniając twierdzenie 2 otrzymujemy, że:

$$X_1\cdot Y_2 - X_2\cdot Y_1 \neq 0,$$

gdzie:

$$Y_1 = X_1' + W\cdot X_1 ,$$

$$Y_2 = X_2' + W\cdot X_2 .$$

Stąd pary $(X_1(t,\omega),\ Y_1(t,\omega))$ i $(X_2(t,\omega),\ Y_2(t,\omega))$ $t\in(a,b)$, $\omega\in\Omega$ są układem fundamentalnym rozwiązań układu (4).
Zatem każde rozwiązanie $(X(t,\omega),\ Y(t,\omega))$ układu (4) daje się zapisać:

$$X(t,\omega) = \lambda_1(\omega)X_1(t,\omega) + \lambda_2X_2(t,\omega) ,$$

$$Y(t,\omega) = \lambda_1(\omega)Y_1(t,\omega) + \lambda_2(\omega)Y_2(t,\omega).$$

Tak więc uogólniony proces stochastyczny X wyznaczony przez $X(t,\omega)$ $t\in(a,b),\omega\in\Omega$ daje się zapisać:

$$X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2,$$

gdzie X_1 i X_2 są uogólnionymi procesami stochastycznymi wyznaczonymi przez procesy stochastyczne $X_1(t,\omega)$ i $X_2(t,\omega)$ $t\in(a,b)$, $\omega\in\Omega$.

P r z y k ł a d

Niech ξ będzie taką zmienną losową, że $P(\xi \in [c,d]) = 1$, $[c,d] \subset (a,b)$. Rozważmy równanie:

$$X'' + \delta(t-\xi) \cdot X = 0 \tag{5}$$

$\delta(t-\xi)$ jest pochodną uogólnionego procesu stochastycznego $H(t-\xi)$, wyznaczonego przez proces stochastyczny $H(t-\xi(\omega))$ $t \in (a,b), \omega \in \Omega$.
$H(t-\xi(\omega)) = 1$ dla $t > \xi(\omega)$, $H(t-\xi(\omega)) = 0$ dla $t \leq \xi(\omega)$.

Jasne jest, że dla p.w. $\omega \in \Omega$ realizacje $H(\cdot, \xi(\omega)) \in L^2_{loc}(a,b)$.
Uogólnione procesy stochastyczne X_1 i X_2

$$X_1 = t - \xi$$

$$X_2 = 1 - (t-\xi) \cdot H(t-\xi)$$

są układem fundamentalnym rozwiązań równania (5).
Istotnie, Wrońskian Z rozwiązań X_1 i X_2 nie jest zerowym uogólnionym procesem stochastycznym, gdyż

$$Z = X_1 \cdot X_2' - X_2 \cdot X_1' = (t-\xi)\, H(t-\xi) - (1-(t-\xi) \cdot H(t-\xi)) \cdot 1 = -1.$$

LITERATURA

[1] Brückner D.: Równania różniczkowe drugiego rzędu o współczynnikach będących uogólnionymi procesami stochastycznymi, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Matematyka-Fizyka, z. 58, Gliwice 1987.

[2] Bunke H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Akademie - Verlag, Berlin 1972.

[3] Gelfand I.M., Wilenkin N.J.: Generalized functions, 4. Applications of harmonic analysis, Acad. Press, New York and London 1964.

[4] Pfaff R.: Zur Theorie der Gewöhnlichen Linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Distributionskoefizient. Von Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt 1978.

[5] Zemanian A.H.: Teoria dystrybucji i analiza transformat. PWN, Warszawa 1959.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski

Wpłynęło do Redakcji 04.03.1987 r.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЁННОГО СЛУЧАЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

Работа является продолжением работы [1]. В ней рассматривается обобщонное случайное линейное уравнение второго порядка $X''+W'\cdot X=0$, где W' означает производную обобщённого случайного процеса на пространстве $D(a,b)$ действительных или комплексных безконечно дифференцируемых функций определенных на интервале (a,b) ровных нулью вне некоторого интервала $[c,d]\subset(a,b)$. В работе доказано, что определитель Вронского двух любых решений обобщённого случайного дифференциального уравнения второго порядка является обобщённым случайным процессом назначённым случайной переменной. Доказано также, сто два решения этого уравнения являются фундаментальной системой тогда и только тогда, когда определитель Вронского не является нулевым обобщённым случайным процессом. В работе подано фундаментальную систему решений обобщённого случайного дифференциального уравнения $X''+\delta(t-\xi)X=0$, где $\delta(t-\xi)$ это производна обобщённого процесса $H(t-\xi)$, которого реализации являются функциями Хевисайда. Работа обобщает теореты их работы [4] на стохастический случай.

THE FUNDAMENTAL SYSTEM OF SOLUTIONS OF THE GENERALIZED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

S u m m a r y

This paper is the continuation of the paper [1]. It possesives consideration about the generalized linear stochastic differential equation of the second order of the form $X''+W'\cdot X=0$.
The coefficient W' is the derivative of the generalized stochastic process defined on the space $D(a,b)$ of infinitely differentiable functions defined on the interval (a,b) with values in the set of real or complex numbers, of the compact support contained in the interval (a,b).

In this paper it is proved that Wronski's determinant of two optional solutions of the considered generalized stochastic differential equation of the second order is the generalized stochastic process defined by the random function.

It is also proved that two solutions of the equation are the fundamental system if and only if the Wronski's determinant of the solutions is the non-zero generalized stochastic process.

In the paper it is also given the fundamental system of solutions for generalized stochastic differential equation $X''+\delta(t-\xi)X=0$ where $\delta(t-\xi)$ is the generalized derivative of the stochastic process $H(t-\xi)$ defined by the stochastic process $H(t-\xi(\omega))$, $t\in(a,b),\omega\in\Omega$ which reali-