ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Kajetan TOCHOWICZ

LOKALNE WŁASNOŚCI KRZYWYCH, NA KTÓRYCH $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)}\,dz = \mathrm{const}$

Streszczenie. W [3] A.C. Schaeffer i D.C. Spencer wprowadzili teorię Γ-struktur dla kilku typów funkcji wymiernych. Zostało to uogólnione przez J.A. Jenkinsa i nazwane teorią różniczek kwadratowych. Podstawowym pojęciem tych teorii jest trajektoria, która w pracy [3] jest globalnym rozwiązaniem równania różniczkowego $\sqrt{R(z(t))}\,z'(t) = i\gamma(t)$; w pracy [1] pojęciem podstawowym jest maksymalna krzywa, na której $R(z(t))\,z'^2(t) > 0$, gdzie $R(z)$ jest wymierną, a $\gamma(t)$ - rzeczywistą funkcją. Autor zaproponował konstrukcję trajektorii opartą na elementach analitycznych. Metoda ta jest naturalna, prosta i efektywna w użyciu. Praca [5] i ta praca (która jest kontynuacją [5], są wstępem do tej konstrukcji - lematy i uwagi będą wykorzystane w następnych opracowaniach.

Autor definiuje, kiedy na krzywej $\varrho(t)$ $t\in(a,b)$ zachodzi wzór $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}} = \mathrm{const.}$, gdzie $\xi_{\sqrt{R}}$ jest rodziną jedno- lub wielowartościowych funkcji analitycznych pierwotnych dla jedno- lub wielowartościowych analitycznych funkcji $\sqrt{R(z)}$.

Definicja: Mówimy, że na krzywej $\varrho(t)$ $t\in(a,b)$, $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}} = \mathrm{const}$, jeśli dla każdej funkcji typu $\xi_{\sqrt{R}}$ istnieje skalar c i rodzina elementów analitycznych (należących do tej funkcji) $(W(t), \varrho(t))$ t (a,b) tak, że:

(i) $\mathrm{Re}\,W(t)(\varrho(t)) = c, \qquad t\in(a,b),$

(ii) jeśli $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, wówczas $(W(t),\varrho(t))$ jest łańcuchem łączącym $(W(\alpha),\varrho(\alpha))$, $(W(\beta),\varrho(\beta))$.

Następnie badane są własności lokalne takich krzywych.

1. Wprowadzenie

W [3] A.C. Schaeffer i D.C. Spencer stworzyli teorię Γ-struktur związanych z kilkoma typami funkcji wymiernych. Teoria ta została uogólniona przez J.A. Jenkinsa [2] i została nazwana teorią różniczek kwadratowych. Jej fundamentalnym pojęciem jest "trajektoria" - w [3] jest nią globalne rozwiązanie równania różniczkowego $\sqrt{R(z(t))}\,z'(t) = i\gamma(t)$, w [1] jest nią maksymalna krzywa spełniająca nierówność $R(z(t))z'(t)^2 > 0$, gdzie R jest funkcją wymierną, a γ rzeczywistą. Autor pracy proponuje konstrukcję trajektorii opartą na elementach analitycznych i ich łańcuchach. Jest to sposób naturalny i efektywny w zastosowaniach, pozwalający wykorzystać warunki analityczności w pewnym sąsiedztwie trajektorii.

Praca niniejsza jest wstępem do sygnalizowanej konstrukcji - lematy, uwagi, konstrukcje i rozważania w niej zawarte będą zastosowane w pracach następnych. Autor prowadząc konstrukcję trajektorii od podstawowego wprowadzonego przez siebie pojęcia (funkcja pierwotna pełnej funkcji analitycznej [5]) zmuszony był dowodzić także rzeczy proste, lecz niezbędne dla zachowania ciągłości i poprawności konstrukcji - taki charakter posiada niniejsza praca.

2. Definicje, twierdzenia i lematy

Podamy definicje i twierdzenia z [5], na które będziemy się powoływać.

D e f i n i c j a

Mówimy, że funkcja analityczna ξ_β jest funkcją pierwotną funkcji analitycznej β, jeśli istnieją dwa elementy analityczne $(W,z_0)\in\xi_\beta$, $(U,z_0)\in\beta$, takie, że w pewnym otoczeniu punktu z_0 mamy $W'=U$.

T w i e r d z e n i e 1

(O istnieniu funkcji pierwotnej). Dla dowolnej funkcji analitycznej istnieje funkcja pierwotna ξ_β.

L e m a t 1

Niech (U,z), $(\tilde{U},\tilde{z})$ będą dwoma elementami funkcji β, przy czym $z\notin B_U\cup\{\infty\}$, $\tilde{z}\notin B_{\tilde{U}}\cup\{\infty\}$. Załóżmy dalej, że (W,z) jest elementem analitycznym takim, iż $W'=U$ w otoczeniu z. Wówczas istnieje łańcuch elementów, łączący element (W,z) z pewnym elementem $(\tilde{W},\tilde{z})$, gdzie $\tilde{W}'=\tilde{U}$ w otoczeniu $\tilde{z}$. Symbole B_U, $B_{\tilde{U}}$, oznaczają zbiory biegunów funkcji meromorficznych U, $\tilde{U}$.

T w i e r d z e n i e 2

(O jednoznaczności). Funkcja pierwotna ξ_β funkcji β wyznaczona jest z dokładnością do stałej. Ponadto funkcje $\xi_\beta+c$ są również funkcjami pierwotnymi funkcji β.

L e m a t 2

Niech H_β oraz H_{ξ_β} oznaczają obszary naturalne funkcji β i ξ_β. Wówczas dla dowolnego z należącego do H_{ξ_β} oraz elementu $(W,z)\in\xi_\beta$ element $(W',z)\in\beta$, czyli $H_\beta\supset H_{\xi_\beta}$. Ponadto zbiór $H_\beta\setminus H_{\xi_\beta}$ jest co najwyżej przeliczalny.

U w a g a

Jeśli ξ jest funkcją pierwotną funkcji β i $\widetilde{\beta}$, wówczas $\beta = \widetilde{\beta}$.

T w i e r d z e n i e 3

(O liniowości). Dla dowolnych liczb λ, τ oraz funkcji analitycznych $\beta, \widetilde{\beta}$, mających ten sam obszar naturalny, zachodzi wzór:

$$\xi_{\tau\beta+\lambda\beta} = \tau\xi_{\beta} + \lambda\xi_{\widetilde{\beta}}.$$

T w i e r d z e n i e 4

(O podstawianiu). Niech D będzie dowolnym obszarem, a f funkcją na nim holomorficzną. Wówczas dla dowolnej funkcji analitycznej β oraz jej funkcji pierwotnej ξ_{β} zachodzi:

$$\xi_{\beta} \circ f = \xi_{(\beta \circ f)f'}.$$

T w i e r d z e n i e 5

Dla dowolnej funkcji analitycznej β oraz jej funkcji pierwotnej ξ_{β} prawdziwe są implikacje:

1. Jeśli na obszarze D, ξ_{β_D} jest jednoznaczną gałęzią funkcji ξ_{β}, wówczas $\xi'_{\beta_D} = \beta_D$ jest gałęzią jednoznaczną funkcji β na D.
2. Jeśli na obszarze jednospójnym D, rozłącznym ze zbiorem $B_{\beta} \cup \{\infty\}$, β_D jest jednoznaczną gałęzią funkcji β, wówczas istnieje w D jednoznaczna gałąź ξ_{β_D} funkcji ξ_{β} oraz $\xi'_{\beta_D} = \beta_D$.
3. W obu przypadkach gdy z(t) jest krzywą gładką przebiegającą w D, wówczas $\xi_{\beta_D}(z(t)) = \int \beta_D\ (z(t))\ z'(t)dt$.

3. Krzywe, na których $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)}dz = \mathrm{const}$.

Nasze rozważania prowadzić będziemy dla funkcji ξ_{β}, gdy β jest funkcją postaci $\Psi \circ R$, przy czym Ψ oznacza funkcję $\sqrt{\ }$, natomiast R - funkcję wymierną. Niech N_R oznacza zbiór jej zer i biegunów. Okazuje się, że funkcji typu $\Psi \circ R$ przy ustalonej funkcji R nie może być zbyt wiele. Zanim bliżej przyjrzymy się temu problemowi, odnotujmy wynikającą z własności funkcji $\sqrt{\ }$ prostą uwagę:

U w a g a 1

Jeśli $z, \widetilde{z}$ nie należą do N_R, wówczas każdy element $(P \circ R, z)$ gdzie $(P, R(z)) \in \Psi$ można połączyć łańcuchem wzdłuż dowolnej krzywej łączącej z i $\widetilde{z}$ oraz nie przechodzącej przez punkty zbioru N_R, z pewnym elementem $(\widetilde{P} \circ R, \widetilde{z})$, gdzie $(\widetilde{P}, R(\widetilde{z})) \in \Psi$.

Możemy teraz dowieść lemat mówiący o ilości funkcji typu $\Psi \circ R$ i zależności między nimi.

L e m a t 1

Niech R będzie funkcją wymierną. Zbiór funkcji $\Psi \circ R$ składa się bądź z dwu funkcji jednoznacznych różniących się znakiem, bądź z jednej funkcji analitycznej takiej, że w każdym obszarze jednospójnym D rozłącznym z N_R istnieją dokładnie dwie jej jednoznaczne gałęzie. Różnią się one jedynie znakiem. Ponadto, jeśli $z \notin N_R$, wówczas każdy element $(U,z) \in \Psi \circ R$ jest postaci $(P \circ R, z)$, gdzie $(P, R(z)) \in \Psi$.

D o w ó d

Niech dla $z \notin N_R$ element $(U,z) \in \beta$, gdzie β jest pewną funkcją typu $\Psi \circ R$. Ponieważ funkcja β jest również wyznaczona przez pewien element $(P \circ R, z')$, gdzie $(P, R(z')) \in \Psi$ i $z' \notin N_R$, więc z faktu, iż element analityczny wzdłuż krzywej może posiadać co najwyżej jedno przedłużenie oraz z uwagi 1 wynika, że (U,z) jest postaci, o jakiej mówi ostatnie zdanie tezy lematu. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

a) Istnieje punkt $z' \in N_R$ taki, iż elementy $(P \circ R, z')$, $(-P \circ R, z')$, gdzie $(P, R(z))$, $(-P, R(z')) \in \Psi$, wyznaczają tę samą funkcję β.
b) Punkt taki nie istnieje.

a) Niech $\tilde{\beta}$ będzie funkcją typu $\Psi \circ R$. Jest ona wówczas wyznaczona przez pewien element $(\tilde{P} \circ R, \tilde{z})$, gdzie $\tilde{z} \notin N_R$ i $(\tilde{P}, R(\tilde{z})) \in \Psi$. Ponieważ $(P, R(z'))$, $(-P, R(z'))$ są jedynymi elementami funkcji Ψ w punkcie $R(z')$, więc na mocy uwagi 1 element $(\tilde{P} \circ R, \tilde{z})$ można połączyć łańcuchem z $(P \circ R, z')$ bądź $(-P \circ R, z')$, co natychmiast daje $\beta = \tilde{\beta}$, czyli istnieje jedna funkcja $\Psi \circ R$. Niech teraz D oznacza obszar jednospójny, rozłączny z N_R, a $\Psi_{R(D)}$ względnie $-\Psi_{R(D)}$ jednoznaczne gałęzie Ψ na $R(D)$. Wówczas $\Psi_{R(D)} \circ R$, $-\Psi_{R(D)} \circ R$ są dwiema gałęziami jednoznacznymi funkcji $\Psi \circ R$ na D. Ponieważ każdy element $(P \circ R, z)$, $z \in D$, $(P, R(z)) \in \Psi$ wyznacza którąś z funkcji $\Psi_{R(D)} \circ R$ lub $-\Psi_{R(D)} \circ R$ (gdyż $(P, R(z))$ wyznacza bądź $\Psi_{R(D)}$, bądź $-\Psi_{R(D)}$) więc innych gałęzi funkcji $\Psi \circ R$ na D nie ma.

b) Niech element $(P \circ R, z')$ wyznacza funkcję β_1, a $(-P \circ R, z')$ funkcję β_2. Zauważmy, że $\beta_1 = -\beta_2$. Wynika to z faktu, iż $(P \circ R, z')$ należy zarówno do β_1, jak i $-\beta_2$. Niech β będzie teraz dowolną funkcją typu $\Psi \circ R$. Jest ona wyznaczona przez pewien element $(\tilde{P} \circ R, \tilde{z})$, gdzie $\tilde{z} \notin N_R$, a $(\tilde{P}, R(\tilde{z})) \in \Psi$. Wówczas, jak w (a) otrzymujemy $\beta = \beta_1$ lub $\beta = -\beta_1 = \beta_2$. Pozostaje tedy do wykazania jednoznaczność funkcji β_1. Niech $z \notin N_R$ i niech (W_1, z), (W_2, z) będą dwoma różnymi elementami funkcji β_1 w z. Wówczas byłyby one postaci $(P \circ R, z)$, $(\tilde{P} \circ R, z)$, a z własności Ψ $\tilde{P} = -P$ w otoczeniu z. Lecz takie elementy wyznaczają na mocy założenia różne funkcje, co daje sprzeczność świadczącą o tym, iż w dowolnym punkcie

$z \notin N_R$ funkcja β_1 posiada dokładnie jeden element. Ponieważ zbiór N_R jest skończony, otrzymujemy żądaną jednoznaczność funkcji β_1 i funkcji β_2 równej $-\beta_1$.

Powyższy lemat wykorzystamy przy badaniu funkcji $\xi_{\Psi \circ R}$.

L e m a t 2

a) Każde dwie funkcje $\xi^1_{\Psi\circ R}$, $\xi^2_{\Psi\circ R}$ pierwotne dla funkcji typu $\Psi \circ R$ różnią się co najwyżej stałą i znakiem.

b) Niech D oznacza obszar, a β_o ustaloną furkcję typu $\Psi \circ R$. Wówczas każde dwie gałęzie na D ustalonej funkcji pierwotnej $\xi^o_{\beta_o}$ różnią się co najwyżej stałą i znakiem.

c) Jeśli $z_o \notin N_R$, a (W, z_o) jest ustalonym pewnym elementem funkcji $\xi^o_{\beta_o}$, przy czym β_o jest ustaloną funkcją typu $\Psi \circ R$, wówczas wszystkie elementy wszystkich funkcji $\xi_{\Psi\circ R}$ w punkcie z_o są postaci $(\varepsilon W + c, z_o)$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a $c \in C$. Ponadto $W' = P \circ R$ w otoczeniu z_o, a $(P, R(z_o)) \in \Psi$.

D o w ó d

a) W przypadku, gdy istnieje jedna funkcja typu $\Psi \circ R$, teza wynika natychmiast z (2. tw. 2), w przypadku przeciwnym z lematu 1 (2. tw. 2, 3).

b) Niech $\hat{\xi}^o_{\beta_o}$, $\tilde{\xi}^o_{\beta_o}$ oznaczają dwie gałęzie funkcji $\xi^o_{\beta_o}$ na D, a $(\hat{W}, z)$, $(\tilde{W}, z)$, $z \notin N_R$ - elementy, które je wyznaczają.
W pewnym otoczeniu z mamy $\hat{W}' = \hat{U}$, $\tilde{W}' = \tilde{U}$, przy czym $(\hat{U}, z)$, $(\tilde{U}, z)$ są elementami funkcji β_o. Z lematu 1 otrzymujemy, że w pewnym jednospójnym otoczeniu z funkcje $\hat{U}$ i $\tilde{U}$ różnią się co najwyżej znakiem, a więc funkcje $\hat{W}$, $\tilde{W}$ różnią się tam co najwyżej znakiem i stałą. To samo możemy powiedzieć o funkcjach $\hat{\xi}^o_{\beta_o}$, $\tilde{\xi}^o_{\beta_o}$.

c) Niech $z_o \notin N_R$. Weźmy element (W, z_o), o którym mówią założenia. Niech $(\tilde{W}, z_o)$ będzie dowolnym elementem pewnej funkcji typu $\xi_{\Psi\circ R}$. Wówczas, na mocy (a), (b) w otoczeniu z_o funkcje W, $\tilde{W}$ różnią się co najwyżej znakiem i stałą, czyli $\tilde{W} = \varepsilon W + c$, $\varepsilon = \pm 1$. Mamy ponadto $W' = U$ w otoczeniu z_o, gdzie $(U, z_o) \in \beta_o$, a więc z lematu 1 $W' = U = P \circ R$ w tym otoczeniu, przy czym $(P, R(z_o)) \in \Psi$.

Z punktu (c) lematu 2 natychmiast otrzymujemy:

U w a g a 2

Jeśli $z_o \notin N_R$, to istnieje otoczenie $V(z_o)$ punktu z_o takie, że jeśli (W, z_o) jest dowolnym elementem dowolnej funkcji typu $\xi_{\Psi\circ R}$, wówczas funkcja W jest jednokrotna na $V(z_o)$, a W' jest tam postaci $P \circ R$, przy czym $(P, R(z_o)) \in \Psi$.

W dalszej części pracy zajmować się będziemy krzywymi, na których $\operatorname{Re} \xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$.

D e f i n i c j a 1

Powiemy, że na krzywej φ: $\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$, jeśli dla każdej funkcji typu $\xi_{\Psi\circ R}$ istnieje rodzina elementów $(W(t), \varphi(t))$ do niej należąca oraz stała c, tak że:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathrm{Re}\left\{W(t)\quad(\varphi(t))\right\} = c, \qquad t\in(a,b), \\ &2)\ \text{jeśli}\ [\alpha,\beta]\subset(a,b),\ \text{to}\ (W(t),\ \varphi(t)),\ t\in[\alpha,\beta] \end{aligned} \tag{1}$$

jest łańcuchem łączącym elementy $(W(\alpha), \varphi(\alpha))$ i $(W(\beta), \varphi(\beta))$.

W pracy nie będziemy odróżniać krzywej od jej opisu parametrycznego ewentualnie od zbioru jej punktów, jeśli tylko z kontekstu wynikać będzie, że chodzi o ten opis lub ten zbiór. Pisać tedy będziemy: krzywa $\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, krzywa φ leży w obszarze itp. Podobnie pisząc o kawałku lub części krzywej w zależności od kontekstu będziemy mieć na myśli bądź opis parametryczny krzywej obciętej do mniejszego przedziału określoności, bądź też jej obraz geometryczny, odpowiadający temu przedziałowi.

Odnotujmy wynikającą wprost z definicji 1 i lematu 2 uwagę:

U w a g a 3

Niech krzywa $\varphi = \varphi(t)$, $t\in(a,b)$ przebiega w obszarze D. Jeśli istnieje w tym obszarze przynajmniej jedna gałąź pewnej funkcji typu $\xi_{\Psi\circ R}$, rodzina elementów $(W(t), \varphi(t))$, $t\in(a,b)$, które do niej należą, tak że spełnione jest (1) ze stałą $c\in C$, wówczas na φ $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$.

Dodajmy jeszcze, że jeśli D jest obszarem jednospójnym, rozłącznym z N_R, wówczas z tego, co powiedzieliśmy wyżej oraz (2. tw. 5) wynika, że krzywa $\varphi(t)$, na której $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$, przebiegając w D, spełniać musi równanie:

$$\mathrm{Re}\int\sqrt{R(\varphi(t))}\quad\varphi'(t)dt = \mathrm{const}, \tag{2}$$

gdzie $\sqrt{R(z)}$ oznacza ustaloną i jednoznaczną gałąź dowolnej funkcji typu $\Psi\circ R$ na D. Aby równanie miało sens, o krzywej $\varphi(t)$ zakładamy, że jest kawałkami gładka.

D e f i n i c j a 2

Punktami krytycznymi funkcji $\xi_{\Psi\circ R}$ nazywać będziemy punkty zbioru N_R. Stopniem punktu krytycznego nazywać będziemy jego rząd jako zera lub bieguna funkcji R.

Weźmy punkt $z_0\notin N_R$, dowolny element $(W,z_0)\in\xi_{\Psi\circ R}$ oraz jednospójne i rozłączne z N_R otoczenie $V(z_0)$, o którym mówi uwaga 2. Istnieje takie α, iż dla $t\in(-\alpha,\alpha)$ prosta $\varphi(t) = W(z_0) + it$ przebiega całkowicie w obszarze $W(V(z_0))$.

Możemy tedy zdefiniować krzywą $\rho(t) = W^{-1} \circ \varphi(t)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$, przechodzącą przez z_0 i przebiegającą w $V(z_0)$. Łatwo zauważyć, że jest to gładki homeomorfizm oraz że $\operatorname{Re} W(\rho(t)) = \operatorname{Re} W(z_0)$, $t \in (-\alpha, \alpha)$. Ponieważ $W|_{V(z_0)}$ jest gałęzią na $V(z_0)$, pewnej funkcji typu $\xi_{\psi \circ R}$, więc z uwagi 3 mamy, iż na $\rho(t)$ $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$ i spełnione jest równanie (2).

Rozważania powyższe zbierzemy we wniosek.

W n i o s e k 1

Przez każdy punkt $z_0 \notin N_R$ przechodzi krzywa ρ, na której $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$. Krzywa ta jest gładkim homeomorfizmem, nie przechodzi przez punkty zbioru N_R, a także spełnione jest na niej równanie (2).

Niech teraz $\tilde{\rho}(t)$, $t \in (a,b)$ będzie dowolną inną krzywą, na której $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, przechodzącą przez punkt $z_0 = \tilde{\rho}(t_0)$. Wówczas jednokrotna funkcja W przekształca część tej krzywej zawartą w $V(z_0)$ na odcinek leżący na prostej $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} W(z_0)$ tak, że $W(z_0)$ jest punktem wewnętrznym tego odcinka. Odcinek ten ma więc niepusty przekrój z odcinkiem $[W(\rho(-\alpha)), W(\rho(\alpha))]$, co świadczy o tym, że w pewnym otoczeniu punktu z_0 krzywe $\tilde{\rho}$ oraz ρ pokrywają się. Rozważania te pozwolą nam uzupełnić wniosek 1, przed tym jednak podamy jeszcze jedną definicję:

D e f i n i c j a 3

Powiemy, że na łuku Jordana L $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, jeśli istnieje krzywa Jordana $z = z(t)$, $t \in (\alpha, \beta) \supset [\alpha', \beta']$ taka, że na niej $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$ i $L = z([\alpha', \beta'])$.

W n i o s e k 2

Z każdego punktu $z_0 \notin N_R$ wychodzą dokładnie dwa łuki Jordana, na których $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$.

W dalszej części pracy niejednokrotnie interesować nas będzie zachowanie się łuków bądź krzywych, na których $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$ w otoczeniach punktów ze zbioru N_R. Odpowiedź na to czerpać będziemy z monografii [3]. Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, łuki takie w dowolnym sąsiedztwie punktu z N_R można przedstawić lokalnie jako obrazy geometryczne krzywych, o których mówi wniosek 1, w szczególności krzywe te spełniać będą równanie (2). Dzięki temu, mimo formalnej różnicy w definicji krzywej, na której $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, możemy powoływać się na wyniki rozdziału III tej monografii, gdyż dowody tam przedstawione bazują na faktach ujętych we wniosku 1. Formułowanie tych twierdzeń oraz ich dowodzenie w niniejszej pracy byłoby więc, poza drobnymi zmianami w terminologii, wiernym przeniesieniem. Będziemy wię powoływać na lematy IX, X oraz pewne fakty z § 3 rozdz. III [3].

W niniejszej pracy korzystać będziemy z następującego faktu z [3], który sformułujemy uwzględniając stosowane u nas oznaczenia.

T w i e r d z e n i e 1

Jeśli $z_0 \neq \infty$ jest punktem krytycznym stopnia $n \geqslant 0$ (zerem rzędu n funkcji R), wówczas z z_0 wychodzą $n+2$ krzywe $z(t)$, na których $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z(t))}\, z'(t)dt = \mathrm{const}$. Dzielą one koło $|z - z_0| < \delta$ dla δ dostatecznie małego na $n+2$ obszary jednospójne, z których każdy może być odwzorowany przez istniejącą na nim jednoznaczną i jednokrotną gałąź funkcji $\xi_{\Psi\circ R}$ w półpłaszczyznę $\mathrm{Re}\,\xi < c$ lub $\mathrm{Re}\,\xi > c$.

Powiemy, że z_0 jest zerem rzędu 0 funkcji R, jeśli $R(z_0) \neq 0$.

Odnotujmy jeszcze oczywistą uwagę:

U w a g a 4

Wszystko, co powiedzieliśmy o krzywych, na których $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$, można przenieść na krzywe, na których $\mathrm{Im}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$ (łącznie z definicją 1). Możemy tedy rozpatrywać takie krzywe i stosować odpowiednie twierdzenia, sformułowane dla krzywych, na których $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej lokalnemu rozmieszczeniu krzywych, na których $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$, w otoczeniu punktów, które nie są biegunami funkcji R.

D e f i n i c j a 4

Otwarte otoczenie $V_R(z_0)$ punktu z_0 nazywać będziemy otoczeniem uniwersalnym punktu z_0 ze względu na funkcję R, jeśli:

1) $V_R(z_0)$ nie zawiera punktów krytycznych funkcji $\xi_{\Psi\circ R}$, tzn. $V_R(z_0) \cap N_R = \emptyset$, oraz jest obszarem Jordana;

2) $(W, z_0) \in \xi_{\Psi\circ R}$, wówczas W jest funkcją jednokrotną na $V_R(z_0)$, oraz posiada tam pochodną postaci $P\circ R$, gdzie $(P, R, (z_0)) \in \Psi$. Funkcję W można również rozszerzyć w sposób holomorficzny na $\partial V_R(z_0)$;

3) istnieje rodzina krzywych $\gamma_z(t)$ dla $z \in V_R(z_0)$ o następujących własnościach:

a) krzywe $\gamma_z(t)$ są określone na $[0,1]$, przy czym $\gamma_z((0,1)) \subset V_R(z_0)$ a $\gamma_z(0)$ oraz $\gamma_z(1)$ leżą na brzegu $\partial V_R(z_0)$,

b) krzywa γ_z przechodzi przez z i jest gładkim homeomorfizmem oraz $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$ na niej,

c) jeśli ciąg $(z_n) \in V_R(z_0)$ jest zbieżny do $z \in V_R(z_0)$, wówczas $\gamma_{z_n}(t) \rightrightarrows \gamma_z(t)$ jednostajnie na $[0,1]$.

D e f i n i c j a 5

Obszar jednospójny $S_R(z_0)$ nazywać będziemy sektorem uniwersalnym punktu z_0 ze względu na funkcję R, jeśli:

1) $\partial S_R(z_0)$ składa się z punktu z_0, dwóch łuków L_1, L_2 z niego wychodzących, na których $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$ oraz pewnego łuku Jordana L, który je łączy.

2) Każdy łuk wychodzący z z_o, na którym $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R} = \mathrm{const}$ jest rozłączny z $S_R(z_o)$.

3) Każda gałąź na $S_R(z_o)$ funkcji typu $\xi_{\Psi\circ R}$ jest jednoznaczna i jednokrotna, posiada holomorficzne rozszerzenie na $\partial S_R(z_o)$ poza punktem z_o, gdzie rozszerzenie to jest tylko ciągłe.

4) Jedynym punktem krytycznym zawartym w $\overline{S_R(z_o)}$ jest punkt z_o, przy czym stopień jego musi być dodatni.

5) Istnieje rodzina krzywych $\gamma_z(t)$, $z \in \overline{S_R(z_o)} \setminus L$ taka, że:

a. Krzywe $\gamma_z(t)$ są określone na $[0,1]$, przy czym, jeśli $z \in S_R(z_o)$, wówczas $\gamma_z((0,1)) \subset S_R(z_o)$, a $\gamma_z(1)$ i $\gamma_z(0)$ leżą na L; jeśli natomiast $z \in L_1 \cup L_2$, to $\gamma_z((0,1))$ pokrywa $L_1 \cup L_2$ a $\gamma_z(0)$, $\gamma_z(1)$ są punktami przecięcia się $L_1 \cup L_2$ z L.

b. Każda z krzywych γ_z, $z \in S_R(z_o)$, przechodzi przez punkt z i jest gładkim homeomorfizmem, a $\mathrm{Re}\,\xi_{\Psi\circ R}$ jest na niej stały.

c. Jeśli ciąg $(z_n) \in \overline{S_R(z_o)} \setminus L$ jest zbieżny do $z \in \overline{S_R(z_o)} \setminus L$, wówczas $\gamma_{z_n}(t) \Longrightarrow \gamma_z(t)$ jednostajnie na $[0,1]$.

W dalszej części pracy przyjmujemy, iż R jest ustaloną funkcją wymierną, będziemy zatem pisać $V(z_o)$ i $S(z_o)$ zamiast $V_R(z_o)$ i $S_R(z_o)$. Ponadto symbole $\gamma_z(t)$, γ_z rezerwujemy do końca pracy dla krzywych, o których mówią powyższe definicje.

Z definicji wynika, iż otoczenia uniwersalne mogą istnieć jedynie dla punktów nie będących punktami krytycznymi, a sektory uniwersalne dla punktów nie będących punktami krytycznymi stopnia ujemnego. Okazuje się, że z każdym punktem $z \notin N_R$ można związać otoczenie uniwersalne, a z każdym punktem krytycznym stopnia dodatniego - sektor uniwersalny.

L e m a t 3

Jeśli punkt $z_o \notin N_R$, a Q jest jego otoczeniem otwartym, wówczas można w nie wpisać otoczenie uniwersalne $V(z_o)$.

D o w ó d

Z uwagi 2 oraz definicji 2 wynika, że w Q można wpisać otoczenie Q punktu z_o tak, by były spełnione punkty 1 i 2 definicji 4. Aby zakończyć dowód, wystarczy w Q wpisać takie otoczenie z_o, by był spełniony także punkt 3. W celu wyznaczenia tego otoczenia rozważmy element $(W, z_o) \in \xi_{\Psi\circ R}$ $W(z_o) = a + ib$; w obszar $W(Q)$ można wpisać kwadrat o środku w $W(z_o)$ i bokach równoległych do osi współrzędnych. Niech długość boku kwadratu wynosi ε. Wówczas $V(z_o) = W^{-1}(K)$ jest pewnym otoczeniem z_o zawartym w Q. Mamy także $\overline{V(z_o)} \subset Q$. Dla $z \in V(z_o)$ zdefiniujmy rodziny krzywych:

$$\Phi_z(t) = \mathrm{Re}\,W(z) + it(\varepsilon + b) + i(1-t)(b-\varepsilon), \gamma_z(t) = W^{-1}(\Phi_z(t)), t \in [0,1].$$

Zauważmy, że $W \circ \gamma_z([0,1]) = \overline{K} \cap \{w: \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} W(z)\}$. Na krzywych γ_z $\operatorname{Re} W = \text{const}$, a więc także $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$. Łatwo też spostrzec, iż spełnione są inne warunki występujące 3(a) oraz 3(b) definicji 4. Weźmy teraz ciąg $(z_n) \in V(z_0)$ zbieżny do $z \in V(z_0)$ oraz obierzmy dowolne $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $\delta > 0$ taka, że $|W^{-1}(w) - W^{-1}(\tilde{w})| < \varepsilon$, jeśli tylko $|w - \tilde{w}| < \delta$, a $w, \tilde{w} \in \overline{K}$. Dla tak dobranej δ możemy wybrać N tak, aby dla $n > N$ $\operatorname{Re}|W(z_n) - \operatorname{Re} W(z)| < \delta$. Ponieważ dla $t \in [0,1]$ mamy $|\Phi_{zn}(t) - \Phi_z(t)| = |\operatorname{Re} W(z_n) - \operatorname{Re} W(z)|$, więc dla $t \in [0,1]$ oraz $n > N$ otrzymujemy $|\gamma_{zn}(t) - \gamma_z(t)| = |W^{-1} \circ \Phi_{zn}(t) - W^{-1} \circ \Phi_z(t)| < \varepsilon$. Dowodzi to jednostajnej zbieżności ciągu $(\gamma_{zn}(t))$ do $\gamma_z(t)$ i kończy dowód lematu.

L e m a t 4

Dla dowolnego punktu krytycznego z_0 stopnia dodatniego oraz dwóch ustalonych sąsiednich łuków L_1', L_2' z niego wychodzących, na których $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, istnieje sektor uniwersalny $S(z_0)$, zawierający na brzegu kawałki L_1, L_2 tych łuków.

D o w ó d

Z twierdzenia 1 wynika istnienie δ takiej, że koło $K(z_0, \delta)$ dzielone jest przez łuki wychodzące z z_0, na których $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, na jednospójne obszary, które można odwzorować za pomocą istniejących na nich jednoznacznych i jednokrotnych gałęzi $\xi_{\psi \circ R}$ w półpłaszczyzny $\operatorname{Re} w > c$ bądź $\operatorname{Re} w < c$. Wybierzmy więc na naszych ustalonych łukach po jednym punkcie leżącym w $K(z_0, \delta)$ i połączmy je łukiem Jordana L^* przebiegającym całkowicie w jednym ze wspomnianych obszarów. Kawałki L_1'', L_2'' łuków L_1', L_2' wychodzące z z_0 oraz łuk L^* ograniczają tedy obszar jednospójny B. Ustalamy na nim gałąź $\xi^{\circ}_{\psi \circ R}$ jednoznaczną i jednokrotną. Odwzorowuje ona obszar B na pewien obszar G. Bez trudu stwierdzamy, że funkcję $\xi^{\circ}_{\psi \circ R}$ w sposób ciągły można przedłużyć na łuki L_1'', L_2'' jak i łuk L^*. Wówczas ich obrazem jest odcinek leżący na prostej $\operatorname{Re} w = c$, zawierający w swym wnętrzu punkt $w_0 = \lim_{z \to z_0} \xi^{\circ}_{\psi \circ R}(z)$ oraz pewien łuk Jordana, położony całkowicie w jednej z półpłaszczyzn $\operatorname{Re} w < c$ lub $\operatorname{Re} w > c$ i łączący końce tegoż odcinka. Funkcja $\xi^{\circ}_{\psi \circ R}$ jest tedy homeomorfizmem $\overline{B}$ na $\overline{G}$. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi $w_0 = 0$ a $G \subset \{w: \operatorname{Re} w > 0\}$. Wówczas istnieje ε takie, iż kwadrat $\overline{K} = [-i, i\varepsilon, \varepsilon + i\varepsilon, \varepsilon - i\varepsilon] \subset G$. Oznaczmy przez $S(z_0)$ obszar $\xi^{-1}_{\psi \circ R}(K)$. Bez trudu stwierdzamy, iż obszar ten spełnia warunki 1.2.3.4 definicji 5. Dla punktów z z sumy zbiorów $S(z_0)$, $L_1 = \xi^{\circ\,-1}_{\psi \circ R}([-\varepsilon i, 0])$, $L_2 = \xi^{\circ\,-1}_{\psi \circ R}([0, \varepsilon i])$ definiujemy rodziny krzywych: $\Phi_z(t) = (\operatorname{Re} \xi^{\circ}_{\psi \circ R}(z) + i\varepsilon)\, t + (\operatorname{Re} \xi^{\circ}_{\psi \circ R}(z) - i\varepsilon)(1 - t)$, $\gamma_z(t) = \xi^{\circ\,-1}_{\psi \circ R} \circ \Phi_z(t)$, $t \in [0,1]$. Rozważania zupełnie analogiczne jak w dowodzie lematu 3 prowadzą nas do wniosku, iż spełniony jest również punkt 5 definicji 5.

O rodzinie krzywych γ_z odnotujmy jeszcze pewne ważne stwierdzenie:

S t w i e r d z e n i e 1

Jeśli $\partial(\tau), \tau \in (a,b)$ jest dowolną krzywą Jordana, na której $\operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R} = \text{const}$, przechodzącą przez punkt $z \in V(z_0)$ $(S(z_0))$, wówczas zbiór $T = \{\tau \in (a,b) : \exists\, t \in (0,1)\ \gamma_z(t) = \delta(\tau)\}$ jest równy bądź przedziałowi $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, bądź sumie dwóch przedziałów $(a,\alpha) \cup (\beta,b)$.

D o w ó d

Dowód przeprowadzimy dla $z \in V(z_0)$ (dla $z \in S(z_0)$ przebiegałby analogicznie). Wykażemy otwartość zbioru T.
Zauważmy, że $W(\delta(T))$, gdzie $(W,z_0) \in \xi_{\psi \circ R}$ leży na odcinku $L = W(\gamma_z((0,1)))$, położonym na prostej $\operatorname{Re} w = \text{const}$. Jeśli tedy $\tau_0 \in T$, to wówczas $W(\delta(\tau_0)) \in L$, a dla τ z pewnego otoczenia τ_0 mamy $\operatorname{Re} W(\delta(\tau_0)) = \operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R}(\delta(\tau_0)) = \operatorname{Re} \xi_{\psi \circ R}(\delta(\tau)) = \operatorname{Re} W(\delta(\tau))$. Tak więc $\delta(\tau) \in L$, czyli zawiera się w T wraz z pewnym otoczeniem. Załóżmy teraz, iż (α,β), $\alpha \neq a$, $\beta \neq b$ jest składową zbioru T. Mamy wtedy $W \circ \delta((\alpha,\beta)) = L$, gdyż w przeciwnym razie α i β należałyby do T. Ze względu na definicję zbioru T oraz różnowartościowość δ otrzymujemy $T = (\alpha,\beta)$. Jeśli teraz T przedstawimy jako sumę składowych, to w przypadku, gdy istnieje ich więcej niż jedna, muszą one mieć postać (a,α), (β,b). Tak więc bądź $T = (\alpha,\beta)$ bądź $T = (a,\alpha) \cup (\beta,b)$.

LITERATURA

[1] Pommerenke C.H.: Univalent function; Vandenhoeck and Ruprecht, Gettingen 1975.
[2] Jenkins J.A.: Univalent functions and corformal mappiny - Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1965.
[3] Schaeffer A.C., Spencer D.C.: Coefficient regions for schlicht functions - Amer. Math. Soc. Coll. Publ 35/1950/New York.
[4] Saks A., Zygmund A.: Funkcje analityczne. PWN, Warszawa 1959.
[5] Tochowicz K.: Funkcja pierwotna pełnej funkcji analitycznej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mat.-Fiz., z. 43, Gliwice 1985.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji 11.04.1987 r.

МЕСТНЫЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ НА КОТОРЫХ $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)dz} = \mathrm{const}$

Р е з ю м е

В [3] A.C. Schaeffer u D.C. Spencer построили теорию Γ-структур для несколько типов рациональных функции. Эту теорию обобщил J.A. Jenkins и названо её теорией квадратичных дифференциалов. Основным понятем этих теории является - в работе [3] это решение дифференциального уравнения $\sqrt{R(z(t))}z'(t)=i\ (t)$, в работе [1] всновным понямел являемся максимальная крива на которой $R(z(t))z'^2(t)>0$ - где R рациональная и γ децствительная функция.
Автор предложил конструкцию траектории которая основывается на аналитических элементах. Этот простой, натуральный и эффективный в пользованию метод. Работа [5] и эта работа (которая есть продолжением [5]) являются вступлением в эту конструкцию - леммы, замечания и теоремы будет необходимые в дальших работах.

В работе автор определяет, когда на кривой $\varphi(t)t\in(a,b)$ заходить формула $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}} = \mathrm{const}$, где $\xi_{\sqrt{R}}$ это семья одно или многозначных аналитических функции, первообразных для одно или многозначных аналитических функции $\sqrt{R(z)}$.

Определение. Говорим что на кривой $\varphi(t), t\in(a,b)$, $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}}=\mathrm{const.}$, если для любой функции типа $\xi_{\sqrt{R}}$ находятся число c и семья аналитических элементов (которые принадлежат этой функции) $(W(t),\varphi(t))t\in(a,b)$ так что:

(i) $\mathrm{Re}\,W(t)(\varphi(t)) = c \qquad t\in(a,b)$

(ii) если $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ тогда $(W(t),\varphi(t))$ являются цепом аналитических элементов, соединяемых $(W(\alpha),\varphi(\alpha))$, $(W(\beta),\varphi(\beta))$.

Дальше автор исследует местные свойства таких кривых.

LOCAD PROPERTIES OF THE CURVE ON WHICH $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)dz} = \mathrm{const}$

S u m m a r y

In [3] A.C. Schaeffer and D.C. Spencer described the theory of Γ-structure related to several types of rational functions. This was generalized by J.A. Jenkins and it was called "the theory of quadratic differentials". Trajectory is the fundamental notion in these theories, it is a global solution of differential equation $\sqrt{R(z(t))}z'(t) = i\,\gamma(t)$ in the work [3], in the work [1] a fundamential notion is a maximal curve, which satisfies $R(z(t))\,z'^2(t) > 0$, where $R(z)$ is rational and $\gamma(t)$ real function. The author aims of the construction of the trajectory relying on the analytic elements. This methos is natural, simple and effective in use. The work [5] and this work (which is continuation of [5]) are introduction at this construction - the lemmas and remarks will be used in a next works.

The author defines, when on the curve $\varphi(t) t\in(a,b)$ the formula $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}}$ = const. is satisfied where $\xi_{\sqrt{R}}$ is a family of single or many-valued analytic functions which are primitive for the single or many-valued analytic functions $\sqrt{R(z)}$.

Definition: We can say that on the curve $\varphi(t)$ $t\in(a,b)$, $\mathrm{Re}\,\xi_{\sqrt{R}}$ = const., if for every function of the type $\xi_{\sqrt{R}}$, there are a scalar c and a family of analytic elements (belonging to this function) $(W(t),\varphi(t))$, $t\in(\alpha,\beta)$ so that:

(i) $\mathrm{Re}\, W(t)(\varphi(t)) = c \qquad t\in(a,b)$

(ii) if $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ then $(W(t), \varphi(t))$, $t\in(\alpha,\beta)$ is a chain joining $(W(\alpha),\varphi(\alpha))$, $(W(\beta),\varphi(\beta))$.

Next the local structure of these curves is studied.