ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 58 Nr kol. 991

Stanisław KIEŁTYKA

O POCHODNEJ ROZWIĄZANIA RÓWNANIA FUNKCYJNEGO

$$f(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f\left[(a-b)y + bx\right]\right\}$$

Streszczenie. W pracy wykazano ścisłą zależność, jaka zachodzi pomiędzy postacią pochodnej rozwiązania badanego równania funkcyjnego a postacią ciągu pochodnych jego ciągu kolejnych przybliżeń. W dowodach twierdzeń wykorzystano wyniki zawarte w pracy [2]. Nowy rezultat uzyskany w pracy daje pełniejszą informację o różniczkowalności rozwiązania równania funkcyjnego programowania dynamicznego.

2. Wstęp

Przedmiotem badań są związki między pochodzą rozwiązania równania funkcyjnego

$$f(x) = \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f\left[(a-b)y + bx\right]\right\} \tag{1}$$

a ciągiem pochodnych ciągu kolejnych przybliżeń równania (1)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \max_{0\le y\le x}\left[g(y) + h(x-y)\right] \\ f_n(x) &= \max_{0\le y\le x}\left\{g(y) + h(x-y) + f_{n-1}\left[(a-b)y + bx\right]\right\} \quad n=2,3,\dots \end{aligned} \tag{2}$$

Rozważania przeprowadzane są w pewnym przedziale $[0, \bar{x}]$, $\bar{x} > 0$.

3. W całej pracy obowiązują założenia:

(a) g i h są funkcjami ciągłymi dla $x \geqslant 0$,

(b) $g(0) = h(0) = 0$,

(c) $0 < a < b < 1$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} m(b^n x) < +\infty$, $m(x) = \max_{0 \le y \le x} \max\{|g(y)|, |h(y)|\}$,

(e) dla każdego $x \geq 0$ zbiory,

$$F(x) = \{y \in [0,x] \mid f(x) = g(y)+h(x-y)+f[(a-b)y+bx]\},$$

$$F_1(x) = \{y \in [0,x] \mid f_1(x) = g(y)+h(x-y)\} ,$$

$$F_n(x) = \{y \in [0,x] \mid f_n(x) = g(y)+h(x-y)+f_{n-1}[(a-b)y+bx]\} \quad n = 2,3,\ldots$$

są jednoelementowe.

(i) funkcje g i h są różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geq 0$,

(j) w każdym punkcie przedziału $(0,x]$ istnieje pochodna rozwiązania równania (1).

Założenia (a)-(d) zapewniają istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (1) (patrz [1]).
W pracy [2] przy założeniach (a)-(i) pokazano, że istnieją pochodne wyrazów ciągu (2) i wyrażają się wzorami:

$$f_1'(x) = \max\{g'(y_1(x)), \quad h'(x-y_1(x))\}$$

$$f_n'(x) = \max\{g'(y_n(x)) + af_{n-1}'[(a-b)y_n(x) + bx], \tag{3}$$

$$h'(x-y_n(x)) + bf_{n-1}'[(a-b)y_n(x) + bx]\},$$

gdzie $\{y_n(x)\} = F_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$
W [3] znajduje się

T w i e r d z e n i e 1

Jeżeli spełnione są założenia (a)-(d) oraz (i), wtedy istnieje pochodna funkcji f w zerze i wyraża się wzorem:

$$f'(0) = \max\left\{\frac{g'(0)}{1-a}, \frac{h'(0)}{1-b}\right\}. \tag{4}$$

W [4] dowodzi się następujących dwóch twierdzeń:

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli funkcje g i h są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geq 0$ i jeżeli

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b},$$

to $y(x) = 0$ dla $x \geq 0$, gdy $\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(\infty)}{1-b}$

albo

$$y(x) = 0 \text{ dla } 0 \leq x \leq x_0 \quad \text{i} \quad 0 < y(x) < x \text{ dla } x > x_0,$$

gdy

$$\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(\infty)}{1-b},$$

gdzie x_0 jest jednoznacznym pierwiastkiem równania

$$g'(0) - h'(x) + (a-b) \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^{n+1}x) = 0 . \tag{5}$$

T w i e r d z e n i e 3

Jeżeli funkcje g i h są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geq 0$ i jeżeli

$$\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b}, \tag{6}$$

wtedy $0 < y(x) < x$ dla $x > 0$.

4. Zdefiniujemy zbiory

$$A_n = \{x \in [0,\bar{x}] : 0 < y_n(x) < x\}, \quad n=1,2,\ldots \tag{7}$$

$$B_n = \{x \in [0,\bar{x}] : y_n(x) = 0\}, \quad n=1,2,\ldots \tag{8}$$

$$C_n = \{x \in [0,\bar{x}] : y_n(x) = x\}, \quad n=1,2,\ldots \tag{9}$$

$$A = \{x \in [0,\bar{x}] : 0 < y(x) < x\} \tag{10}$$

$$B = \{x \in [0,\bar{x}] : y(x) = 0\} \tag{11}$$

$$C = \{x \in [0,\bar{x}] : y(x) = x\} . \tag{12}$$

Zauważmy, że

$$A_n \cup B_n \cup C_n = [0,\bar{x}] \text{ dla } n = 1,2,\ldots \tag{13}$$

$$A \cup B \cup C = [0,\bar{x}] . \tag{14}$$

Ze zbiorami (7)-(12) związane są zbiory:

$$A'_n = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ f'_n(x) = \frac{ah'(x-y_n(x)) - bg'(y_n(x))}{a-b} \right\}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{15}$$

$$B'_n = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ y_n(x) = 0 \ \text{ i } \ x \notin A'_n \right\}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{16}$$

$$C'_n = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ y_n(x) = x \ \text{ i } \ x \notin A'_n \right\}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{17}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 4

Zbiory A'_n $(n = 1,2,\ldots)$ są domknięte oraz dla każdego n $\bar{A}_n \subset A'_n$, gdzie $\bar{A}_n$ oznacza domknięcie zbioru A_n.

D o w ó d:

Domkniętość zbiorów A'_n $(n = 1,2,\ldots)$ wynika z ciągłości pochodnych f'_n, g' i h' oraz z ciągłości funkcji y_n.

Niech teraz $x_o \in \bar{A}_n$. Istnieje ciąg $\{x_k\} \subset A_n$ oraz $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_o$.

Z (7) wynikają nierówności $0 < y_n(x_k) < x_k$ dla $k = 1,2,\ldots$

Wobec tego z warunku optymalności otrzymujemy równanie:

$$g'(y_n(x_k)) + af'_{n-1}\left[(a-b)y_n(x_k) + bx_k\right] =$$

$$h'(x_k - y_n(x_k)) + bf'_{n-1}\left[(a-b)y_n(x_k) + bx_k\right].$$

Stąd i z (3) otrzymujemy równość:

$$f'_n(x_k) = \frac{ah'(x_k - y_n(x_k)) - bg'(y_n(x_k))}{a-b} \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots$$

Korzystając z ciągłości pochodnych f'_n, g', h' oraz z ciągłości y_n otrzymujemy w granicy przy $k\to\infty$ równość:

$$f'_n(x_o) = \frac{1}{a-b}\left[ah'(x_o - y_n(x_o)) - bg'(y_n(x_o))\right].$$

Wobec tego zgodnie z (15) punkt $x_o \in A'_n$.

T w i e r d z e n i e 5

$B'_n = B''_n$ oraz $C'_n = C''_n$, gdzie

$$B''_n = \left\{ x \in [0,\bar{x}] : y_n(x)=0 \text{ i } f'_n(x)=h'(x)+bf'_{n-1}(bx) > \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b} \right\}, \tag{18}$$

$$C''_n = \left\{ x \in [0,\bar{x}] : y_n(x)=x \text{ i } f'_n(x)=g'(x)+af'_{n-1}(ax) < \frac{ah'(0)-bg'(x)}{a-b} \right\}. \tag{19}$$

D o w ó d

Niech $x \in B'_n$, tj. $y_n(x) = 0$ i $x \notin A'_n$.

Zajdzie zatem jedna z nierówności:

$$f'_n(x) < \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b} \quad \text{albo} \quad f'_n(x) > \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b}.$$

Ponieważ $y_n(x) = 0$, to z warunku optymalności i z faktu, że $x \notin A_n$ wynika nierówność:

$$g'(0) - h'(x) + (a-b)f'_{n-1}(bx) < 0.$$

Z założenia (c) wynika, że

$$f'_{n-1}(bx) > \frac{h'(x) - g'(0)}{a-b}.$$

Z (3) wynika, że

$$f'_n(x) = \max\{g'(0) + af'_{n-1}(bx),\ h'(x) + bf'_{n-1}(bx)\}.$$

Zatem

$$f'_n(x)=h'(x)+bf'_{n-1}(bx) > h'(x)+b\,\frac{h'(x)-g'(0)}{a-b} = \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b}.$$

Oznacza to, że $x \in B''_n$.

Niech teraz $x \in B''_n$, tzn. $y_n(x) = 0$ i $f'_n(x) \neq \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b}$.

Oznacza to, że $y_n(x) = 0$ i $x \notin A'_n$, czyli $x \in B'_n$.

Analogicznie można wykazać, że $C'_n = C''_n$.

Z określenia mamy, że zbiory A'_n, B'_n i C'_n są parami rozłączne oraz

$$A'_n \cup B'_n \cup C'_n = [0,\bar{x}]. \tag{20}$$

Zdefiniujmy teraz następujące zbiory:

$$A' = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ f'(x) = \frac{ah'(x-y(x))-bg'(y(x))}{a-b} \right\} \tag{21}$$

$$B = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ y(x) = 0 \ \text{ i } \ x \notin A' \right\}, \tag{22}$$

$$C = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ y(x) = x \ \text{ i } \ x \notin A' \right\}. \tag{23}$$

T w i e r d z e n i e 6

$B' = B''$ i $C' = C''$, gdzie

$$B'' = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ f'(x) = h'(x) + bf'(bx) > \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b} \right\} \tag{24}$$

$$C'' = \left\{ x \in [0,\bar{x}] \ : \ f'(x) = g'(x) + af'(ax) < \frac{ah'(0)-bg'(x)}{a-b} \right\}. \tag{25}$$

D o w ó d

Niech teraz $x \in B'$. Wtedy $y(x) = 0$ i pochodna funkcji f (p. [2]) wyraża się wzorem:

$$f'(x) = \max \left\{ g'(0) + af'(bx), \ h'(x) + bf'(bx) \right\}.$$

Z warunku optymalności mamy nierówność:

$$h'(x) + bf'(bx) \geqslant g'(0) + af'(bx).$$

Stąd

$$f'(x) = h'(x) + bf'(bx) \geqslant \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b},$$

ale $x \notin A'$, więc

$$f'(x) = h'(x) + bf'(bx) > \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b}.$$

Oznacza to, że $x \in B''$.
Jeżeli $x \in B''$, to z faktu, że

$$f'(x) = h'(x) + bf'(bx) > \frac{ah'(x)-bg'(0)}{a-b},$$

wynika, że

$$x \notin A' \ \text{ i } \ g'(0) - h'(x) + (a-b)f'(bx) < 0.$$

Stąd $y(x) = 0$ i $x \notin A'$, czyli $x \in B'$.
Podobnie można wykazać, że $C' = C''$.

T w i e r d z e n i e 7

$B' \subset \mathrm{Li}\ B'_n$ oraz $C' \subset \mathrm{Li}\ C'_n$, Li ozn. dolną granicę topologiczną.

D o w ó d

Niech $x \in B'$. Wtedy

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad f'(x) = h'(x) + bf(bx) > \frac{ah'(x) - bg'(0)}{a-b} .$$

Ciąg $\{y_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny do $y(x)$ (p. [2]). Pokażemy, że dla n większych od pewnej liczby n_0 $y_n(x) = 0$ i $x \notin A'_n$.
Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieje więc podciąg $\{y_{n_k}(x)\}$ ciągu

$\{y_n(x)\}$ taki, że $0 \leq y_{n_k}(x) < x$ oraz $x \in A'_{n_k}$,

Wtedy

$$f'_{n_k}(x) = \frac{ah'(x - y_{n_k}(x)) - bg'(y_{n_k}(x))}{a-b} .$$

Stąd

$$\lim f'_{n_k}(x) = \frac{ah'(x) - bg'(0)}{a-b} .$$

Ciąg $\{f'_n(x)\}$ jest zbieżny do $f'(x)$ (p. [2]) i $f'(x) = \frac{ah'(x) - bg'(0)}{a-b}$,

co oznacza, że $x \in A'$.
Analogicznie można wykazać, że $C' \subset \mathrm{Li}\ C'_n$.

T w i e r d z e n i e 8

$A \subset \mathrm{Li}\ A'_n \subset A'$.

D o w ó d

Niech $x \in A$, wtedy $0 < y(x) < x$.
Z jednostajnej zbieżności ciągu $\{y_n(x)\}$ do $y(x)$ wynika istnienie $n_0 > 0$, że dla $n > n_0$ $0 < y_n(x) < x$.
Oznacza to, że dla $n > n_0$ $x \in A'_n$, a tym samym $x \in \mathrm{Li}\ A'_n$. Prawdziwe jest więc zawieranie $A \subset \mathrm{Li}\ A'_n$.
Z określenia zbiorów A', B', C' wynika, że

$$A' \cup B' \cup C' = [0, \bar{x}] . \tag{26}$$

Z (26) i z twierdzenia 7 wynika, że $\mathrm{Li}\ A'_n \subset A'$.

W dalszym ciągu oprócz założeń (a)-(j) obowiązywać będzie (k) funkcje g i h są silnie wklęsłe.
Wypiszmy następujące nierówności:

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b} \quad \text{i} \quad \frac{g'(0)}{1-a} \leq \frac{h'(\infty)}{1-b}, \tag{27}$$

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b} \quad \text{i} \quad \frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(\infty)}{1-b}. \tag{28}$$

Ma miejsce twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 9

Jeżeli zachodzi (27) albo (28) i pierwiastek równania (5) nie należy do $[0,\bar{x}]$, wtedy $B' = [0,\bar{x}]$ oraz istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ $B'_n = [0,\bar{x}]$. Jeżeli zachodzi (28) oraz $x_0 \in [0,\bar{x}]$ jest pierwiastkiem równania (5), wtedy $B' = [0,x_0)$ i $A' = [x_0, \bar{x}]$ oraz istnieje $n_1 > 0$, że dla $n > n_1$ $B'_n = [0,x_0)$ i $A'_n = [x_0,\bar{x}]$.

D o w ó d

Z twierdzenia 2 wynika, że w przypadku (27) $y(x) = 0$ dla $x \in [0,\bar{x}]$. Gdyby istniał punkt $x \in [0,\bar{x}] \cap A'$, wtedy:

$$f'(x) = \frac{ah'(x) - bg'(0)}{a-b}. \tag{29}$$

Ponieważ przy $y(x) = 0$, dla $x \in [0,\bar{x}]$ jest $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(b^n x)$,

to

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^n x). \tag{30}$$

Równoczesne zajście (29) i (30) oznacza, że x jest pierwiastkiem równania (5), co daje sprzeczność, gdyż równanie (5) w przypadku (27) nie posiada pierwiastków.
Zatem $B' = [0,\bar{x}]$.
Gdyby istniał punkt $x \in [0,\bar{x}]$ taki, że $x \in A'_{n_k}$, wtedy:

$$f'_{n_k}(x) = \frac{1}{a-b}\left[ah'(x - y_{n_k}(x)) - bg'(y_{n_k}(x))\right].$$

Ponieważ

$$\lim f'_{n_k}(x) = \frac{1}{a-b}\left[ah'(x) - bg'(0)\right],$$

więc pochodna funkcji f w punkcie x wyraziłaby się wzorem (29), co oznaczałoby, że x jest pierwiastkiem równania (5).
Zatem istnieje $n_0 > 0$, że dla $n > n_0$ jest $B'_n = [0,\bar{x}]$. Niech teraz zachodzi (28) oraz pierwiastek równania (5) należy do przedziału $[0,\bar{x}]$. Wówczas $y(x) = 0$ dla $x \in [0,x_0]$ i $0 < y(x) < x$ dla $x_0 < x \leq x$. Rozumując podobnie możemy pokazać, że $B' = [0,x_0)$.
Jeżeli $x \in (x_0,\bar{x}]$, wtedy $0 < y(x) < x$, a to oznacza, że $A = (x_0,\bar{x}]$.
Z twierdzenia 8 oraz z warunku (i) wynika, że $A' = [x_0,\bar{x}]$. Analogicznie jak w przypadku (27) można pokazać istnienie $n_1 > 0$ takiego, że dla $n > n_1$ jest $B'_n = [0,x_0)$ i $A'_n = [x_0,\bar{x}]$.
Udowodnimy twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 10

Jeżeli zachodzi warunek (6), wtedy $A' = [0,\bar{x}]$ oraz istnieje $n_0 > 0$, dla $n > n_0$ $A'_n = [0,\bar{x}]$.

D o w ó d

Z twierdzenia 3 wynika, że $A = (0,\bar{x}]$. Z twierdzenia 8 oraz z założenia (i) wynika, że $A' = [0,\bar{x}]$.
Ponieważ ciąg $\{y_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny do $y(x)$, więc istnieje $n_0 > 0$, że dla $n > n_0$ $0 < y_n(x) < x$ dla $x \in (0,x]$. Z warunku optymalności i (3) mamy, że $A'_n = [0,\bar{x}]$ dla $n > n_0$.

U w a g a 1

Jeżeli w (27) i (28) ulegną zmianie kierunki nierówności, wtedy można udowodnić odpowiednik twierdzenia 9, operując zbiorami A', C', A'_n i C'_n.

U w a g a 2

W przypadku, gdy g i h są silnie wklęsłe, o postaci zbiorów A', B', C' wyraźnie decyduje pochodna funkcji f w zerze.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Dynamic programming, Princeton 1957.
[2] Kiełtyka S.: On differentiability of the solution of some functional equation of the dynamic programming, Demonstratic Mathematica 3 (1981), pp. 669-686.
[3] Kiełtyka S., Sobieszek W.: A generalization of the theorem on directional derivative for the maximum functional and its application, Demonstratic Mathematica 9 (1976), pp. 47-59.

[4] Sobieszek W.: O rozwiązaniu równania $f(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f[(a-b)y + bx]\}$ w przypadku funkcji wklęsłych, Zeszyty Nauk. Pol. Śl., Mat.-Fiz., 15 (1970), ss. 125-146.

Recenzent: Prof. dr hab. Tadeusz Dłotko

Wpłynęło do Redakcji 2.07.1987 r.

О ПРОИЗВОДНОЙ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе доказано строгую зависимость между формой производной решения функционального уравнения.

$$f(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f[(a-b)y + bx]\} \tag{1}$$

И формой последовательности производных его последовательных приближений

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}[g(y) + h(x-y)]$$

$$f_n(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f_{n-1}[(a-b)x + bx]\}, \quad n=2,3,\dots \tag{2}$$

Кроме стандартных своиств каторыми должны обладать g и h используется следующие условия

(в) Множесства

$$F(x) = \{y\in[0,x] \mid f(x) = g(y)+h(x-y)+f[(a-b)y+bx]\}$$

$$F_1(x) = \{y\in[0,x] \mid f_1(x) = g(y)+h(x-y)\}$$

$$F_n(x) = \{y\in[0,x] \mid f_n(x) = g(y)+h(x-y)+f_{n-1}[(a-b)y+bx]\}, \quad n=2,3,\dots$$

имеют лишь один элемент

(i) $g,h \in C^1 \quad [0,\infty)$.

В доказательствах теорем исполезовано результаты получены в работе [2]. Новый результат полученый в работе дает Более полную информацию о возможности решения уравнения (1).

S u m m a r y

The strict relation between the form of the derivative of the solution of the functional equation

$$f(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f[(a-b)y + bx]\} \tag{1}$$

and the form of a sequence of derivatives of its successive approximations

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}[g(y) + h(x-y)]$$
$$f_n(x) = \max_{0\le y\le x}\{g(y) + h(x-y) + f_{n-1}[(a-b)x + bx]\}, \tag{2}$$

$n = 2,3,\ldots,$ is established.
Besides usual postulates on g and h the following properties ase assumed:

(a) the sets

$$F(x) = \{y\in[0,x] \mid f(x) = g(y)+h(x-y)+f[(a-b)y+bx]\}$$

$$F_1(x) = \{y\in[0,x] \mid f_1(x) = g(y)+h(x-y)\}$$

$$F_n(x) = \{y\in[0,x] \mid f_n(x) = g(y)+h(x-y)+f_{n-1}[(a-b)y+bx]\}$$

$n = 2,3,\ldots,$ have exactly one element for any $x \geqslant 0$

(i) $g, h \in C^1 [0,\infty)$.

The proofs of theorems are based on the paper [2]. The new result proved in paper gives some information about the problem of differentiability of the solution of (1).