ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Kajetan TOCHOWICZ

TRAJEKTORIA FUNKCJI $\int\sqrt{R(z)}$

Streszczenie. Schaeffer i Spencer wprowadzili w [5] teorię Γ - struktur dla kilku typów funkcji wymiernych. Zostało to uogólnione przez Jenkinsa [2] i nazwane teorią różniczek kwadratowych. Podstawowym pojęciem tych teorii jest trajektoria, globalne rozwiązanie różniczkowego równania [5] lub nierówności [3]. Autor niniejszej pracy proponuje konstrukcję trajektorii opartą na elementach analitycznych. [6], [7], [8] i ta praca (która jest kontynuacją [6], [7], [8]) stanowią elementy tej konstrukcji. Autor dowodzi:
Twierdzenie: Jeśli funkcja R(z) posiada nie więcej niż trzy bieguny, to przez każdy punkt, który nie jest krytyczny, przechodzi jakaś trajektoria.

W [5] A.C.Schaeffer i D.C.Spencer wprowadzili teorię Γ - struktur dla kilku typów funkcji wymiernych. Teoria ta została uogólniona przez I.A.Jenkinsa [1] i nazwana teorią różniczek kwadratowych. Podstawowym pojęciem tych teorii jest trajektoria - w [5] globalne rozwiązanie równania różniczkowego $\sqrt{R(z)}\,z'(t)=i\gamma(t)$; w [3] maksymalna krzywa, na której $R(z(t)z'^2(t)>0$, gdzie $R(z)$ jest wymierną, a $\gamma(t)$ rzeczywistą funkcją. Autor zaproponował konstrukcję trajektorii opartą na elementach analitycznych. Metoda ta jest naturalna, prosta i efektywna w użyciu. Temat ten jest rozwijany w [6],[7],[8]. Praca ta kończy ów cykl twierdzeniem o istnieniu trajektorii, twierdzeniem znanym [2], [3], lecz tu udowodnionym metodami wynikającymi z innej konstrukcji trajektorii.

Zanim podamy wprowadzające definicje i lematy, wprowadzimy pewne oznaczenia i informacje o zachowaniu się krzywych na płaszczyźnie.

Niech $L=[0,1]$, C oznacza płaszczyznę, a $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ będzie różnowartościową krzywą gładką. Oznaczmy przez Π skończony zbiór punktów płaszczyzny, które nie leżą na ρ i L. Niech $L(p,q)$ $p,q\in L$ oznacza część łuku L leżącą pomiędzy p i q, a więc któryś z odcinków $[p,q]$ lub $[q,p]$. Jeśli punkty $\rho(t'),\rho(t'')$ $a<t'<t''<b$ leżą na L oraz $\rho((t',t'')\cap L(\rho(t'),\rho(t''))=\emptyset$, wówczas $\rho((t',t'')\cup L(\rho(t'),\rho(t''))$ jest brzegiem ograniczonego obszaru Jordana, który oznaczać będziemy przez $H(\rho(t'),\rho(t''))$. Zakładać będziemy również, że spełniony jest warunek:

(W) Każdy z obszarów $H(\rho(t'),\rho(t''))$ oraz każde dopełnienie takiego obszaru ma punkty wspólne z Π.

Przy tych oznaczeniach i założeniach można dowieść:

<u>Lemat 1 [9].</u> Niech dany będzie obszar Jordana $H(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Jeśli spełniony jest warunek (W) oraz Π posiada co najwyżej trzy elementy, wówczas zbiór punktów skupienia zbioru $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))\cap\{\rho(t):\ t\in(\beta,b)\}$ jest skończony.

Obszary $H=H(\rho(t'),\rho(t''))$ można klasyfikować na różne sposoby. Pewne z nich zostały podane w [9]. Wyróżniono tam między innymi obszary typu (b1) i (b2):

(b1) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t'')$ dochodzi do L z różnych stron (tzn. Im $\rho(t)$ jest różnego znaku dla $t\in(t'-\varepsilon,t')$ oraz $t\in(t'',t''+\varepsilon)$) i w dalszym przebiegu pozostaje w H (tzn. $\rho((t'',t''+\varepsilon))\subset H$);

(b2) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t'')$ dochodzi do L z różnych stron i w dalszym przebiegu opuszcza H (tzn. $\rho((t'',t''+\varepsilon))\subset C\setminus\overline{H}$).

O obszarach typu (b1) oraz (b2) pokazano:

<u>Stwierdzenie 1 [9].</u> Jeśli $H=H(\rho(t'),\rho(t''))$ jest obszarem typu (b1), wówczas:

jeśli $\rho(t')<\rho(t'')$, to $[0,\rho(t'))\subset\overline{C}\setminus\overline{H}$; $(\rho(t''),1]\subset H$

jeśli $\rho(t')>\rho(t'')$, to $[0,\rho(t''))\subset H$; $(\rho(t'),1]\subset\overline{C}\setminus\overline{H}$.

Jeśli H jest obszarem typu (b2), wówczas:

jeśli $\rho(t')<\rho(t'')$, to $[0,\rho(t'))\subset H$; $(\rho(t''),1]\subset\overline{C}\setminus\overline{H}$

jeśli $\rho(t')>\rho(t'')$, to $[0,\rho(t''))\subset\overline{C}\setminus\overline{H}$; $(\rho(t'),1]\subset H$.

Lemat 2 [9]. Niech dany będzie odcinek $L=[0,1]$ oraz ciąg jego punktów $z_n\to 1$. Niech różnowartościowa krzywa $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ przechodzi przez wszystkie punkty z_n przecinając L, tzn. $z_n=\rho(t_n)$, przy czym $t_n<t_{n+1}$, gdzie $t_n\to b$. Załóżmy dalej, że są to wszystkie punkty przecięcia L przez ρ oraz że spełniony jest warunek (W) dla obszarów $H_n=H(z_n,z_{n+1})$. Wówczas poczynając od pewnego N ciąg z_n $n>N$ jest zbieżny do 1 monotonicznie, a obszary H_n tworzą ciąg zstępujący bądź wstępujący obszarów tylko typu (b1) bądź tylko typu (b2).

Po tych informacjach ogólnych możemy przystąpić do podania informacji potrzebnych przy sformułowaniu i dowodzie twierdzenia o istnieniu trajektorii.

Punktem startu do konstrukcji trajektorii za pomocą elementów analitycznych jest pojęcie funkcji pierwotnej pełnej funkcji analitycznej.

Definicja 1 [6] Mówimy, że funkcja analityczna ξ_β jest funkcją pierwotną funkcji analitycznej β, jeśli istnieją dwa elementy analityczne $(W,z_o)\in\xi_\beta$, $(U,z_o)\in\beta$ takie, że w pewnym otoczeniu z_o $W'(z)=U(z)$.

Niech $\beta=\sqrt{}$ i R będzie funkcją wymierną. Wówczas $\beta\circ R$ tworzy rodzinę funkcji analitycznych, a $\xi_{\beta\circ R}$ rodzinę funkcji pierwotnych dla funkcji z rodziny $\beta\circ R$. Można pokazać, że jeśli ξ_1, ξ_2 $\in\xi_{\beta\circ R}$, wówczas $\xi_1=\varepsilon\xi_2+c$, gdzie $c\in C$, a $\varepsilon\in\{-1,1\}$ [6].

Definicja 2[7]. Niech R będzie funkcją wymierną. Mówimy, że na krzywej ρ: $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ Re $\xi_{\beta\circ R}=$ const, jeśli dla każdej funkcji $\xi\in\xi_{\beta\circ R}$ istnieje skalar c oraz rodzina elementów analitycznych $(W(t),\rho(t))\in\xi$ $t\in(a,b)$ tak, że

i. Re $W(t)(\rho(t))=c$ $t\in(a,b)$

ii. Jeśli $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, wówczas $(W(t),\rho(t))$ $t\in[\alpha,\beta]$ jest łańcuchem elementów analitycznych łączących $(W(\alpha),\rho(\alpha))$ z $(W(\beta),\rho(\beta))$.

Łatwo wykazać, [7], że jeśli $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ leży w obszarze D, gdzie istnieje gałąź ξ_o pewnej funkcji $\xi\in\xi_{\beta\circ R}$, taka, że zachodzi dla niej (i) (ii), wówczas Re $\xi_{\beta\circ R}=$const na ρ. Analogicznie definiujemy Im $\xi_{\beta\circ R}=$const na ρ.

Uwaga 1. Jeśli $(W_1,z_o)\in\xi_1\in\xi_{\beta\circ R}$, $(W_2,z_o)\in\xi_2\in\xi_{\beta\circ R}$ to $W_1=\varepsilon W_2+c$, gdzie $c\in C$, a $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

Definicja 3 Zera i bieguny funkcji wymiernej R nazywać będziemy punktami krytycznymi $\xi_{\beta\circ R}$. Literą Π oznaczać będziemy zbiór biegunów funkcji R.

Zachodzi fundamentalne twierdzenie:

Twierdzenie 1 [5] Niech H będzie obszarem jednospójnym ograniczonym skończoną liczbą krzywych, nie przechodzących przez punkty krytyczne, na których $\xi_{\beta\circ R}$=const, a Im $\xi_{\beta\circ R}$ jest ograniczony i co najwyżej jedną krzywą, nie przechodzącą przez punkty krytyczne, na której Im $\xi_{\beta\circ R}$=const a Re $\xi_{\beta\circ R}$ jest ograniczony. Załóżmy ponadto, że ostatnia krzywa leży na $Fr(\overline{H})=\overline{H}\setminus Int\ \overline{H}$. Wówczas H, jak i dopełnienie $\overline{H}$ zawierają punkty z Π.

Bardzo przydatnym pojęciem jest pojęcie otoczenia uniwersalnego punktu z_o.

Definicja 4 [7] Otwarte otoczenie $V(z_o)$ ponktu z_o nazywamy otoczeniem uniwersalnym, jeśli:

1. $V(z_o)$ jest obszarem Jordana nie zawierającym punktów krytycznych.

2. Jeśli $(W,z_o)\in\xi_{\beta\circ R}$ to $W_{|V(z_o)}$ jest funkcją różnowartościową, mającą holomorficzne przedłużenie na $\delta V(z_o)$ i W' jest postaci $P\circ R$, gdzie $(P,R(z_o))\in\beta$.

3. Istnieje rodzina krzywych $\gamma_z(t)$ $t\in[0,1]$ $z\in V(z_o)$ takich, że

a) $\gamma_z((0,1))\subset V(z_o)$, $\{\gamma_z(0),\gamma_z(1)\}\subset\delta V(z_o)$, $z\in\gamma_z$

b) Re$\xi_{\beta\circ R}$=const na γ_z ponadto γ_z^{-1}, γ_z', $(\gamma_z^{-1})'$ istnieją i są ciągłe.

c) Jeśli $z_n \in V(z_o)$ $z_n \to z \in V(z_o)$, wówczas $\gamma_{z_n} \to \gamma_z$ jednostajnie na $[0,1]$.

Zachodzi:

<u>Twierdzenie 2 [7]</u> Jeśli V jest otoczeniem otwartym punktu z_o, który nie jest krytyczny wówczas istnieje $V(z_o)$ taki, że $V(z_o) \subset V$.

<u>Uwaga 2.</u> Z otoczeniem uniwersalnym $V(z_o)$ można związać łuk L, na którym Im $\xi_{\beta_o R}$=const taki, że $\bar{L} \subset \bar{V}(z_o)$, punkty końcowe łuku leżą na $\delta V(z_o)$ oraz jeśli $z \in V(z_o)$, wówczas $\gamma_z \cap L$ jest zbiorem jednoelementowym. Wynika to z dowodu twierdzeniu 2.

<u>Lemat 3 [7]</u> Jeśli $\gamma(t)$ $t \in (a,b)$ jest różnowartościową krzywą, na której Re $\xi_{\beta_o R}$=const oraz $z \in \gamma \cap V(z_o)$, wówczas zbiór $\{t \in (a,b): \exists \tau \in [0,1]\ \gamma_z(\tau) = \gamma(\tau)\}$ jest bądź przedziałem (α,β), bądź sumą przedziałów $(a,\alpha) \cup (\beta,b)$.

Przejdźmy teraz do podstawowego pojęcia tej pracy - pojęcia trajektorii.

<u>Definicja 5 [8]</u> Krzywą $\eta_z(t)$ $t \in (a,b)$, przechodzącą przez z nazywamy trajektorią, jeśli:

a) η_z nie przechodzi przez punkty krytyczne funkcji $\xi_{\beta_o R}$,

b) Re $\xi_{\beta_o R}$= const na η_z,

c) istnieją $\eta_z^{-1}, \eta_z', (\eta_z^{-1})'$ i są ciągłe,

d) jeśli $\gamma(\tau)$ $\tau\in(\alpha,\beta)$ jest inną różnowartościową krzywą nie przechodzącą przez punkty krytyczne i taką, że $z\in\gamma$, $\mathrm{Re}\,\xi_{\beta\circ R}=\mathrm{const}$ na γ wówczas

$$\overline{\bigcup_{\tau\in(\alpha,\beta)} \gamma(\tau)} \subset \overline{\bigcup_{t\in(a,b)} \eta_z(\tau)}$$

e) istnieją granice $z_a=\lim_{t\to a} \eta_z(t)$, $z_b=\lim_{t\to b} \eta_z(t)$ i jeśli $z_a\neq z_b$ wówczas zarówno z_a jak i z_b są punktami krytycznymi.

Z definicji wynika, że trajektoria przechodzi tylko przez punkty, które nie są krytyczne. Powstaje pytanie, czy dla każdego takiego punktu istnieje trajektoria,która przez niego przechodzi. Odpowiedź jest negatywna, jeśli liczność zbioru Π przekracza liczbę trzy.

Można jednak pokazać:

<u>Twierdzenie 3 [8].</u> Jeśli z nie jest punktem krytycznym, wówczas istnieje krzywa $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ taka, że $z\in\rho$ oraz warunki a-d Definicji 5 są spełnione (zastępując symbol η_z symbolem ρ). Co więcej, jeśli istnieje jedna z granic z_a lub z_b i nie jest ona punktem krytycznym, wówczas istnieje druga i $z_a=z_b$.

Celem tej pracy jest dowód twierdzenia:

<u>Twierdzenie 4</u> (o istnieniu trajektorii).
Jeśli funkcja R posiada co najwyżej trzy bieguny, wówczas przez każdy punkt z, który nie jest punktem krytycznym, przechodzi trajektoria η_z.

Dowód twierdzenia wynika natychmiast z twierdzenia 3 oraz z twierdzenia o istnieniu granicy, które udowodnimy poniżej.

Twierdzenie 5 (o istnieniu granicy).
Niech R posiada co najwyżej trzy bieguny. Dla dowolnej, różnowartościowej krzywej $\rho(t)$ $t\in(a,b)$, na której Re $\zeta_{\beta\circ R}=$ const , nie przechodzącej przez punkty krytyczne, istnieją granice $z_a=\lim_{t\to a}\rho(t)$, $z_b=\lim_{t\to b}\rho(t)$.

Dowód: Niech Π oznacza zbiór biegunów funkcji R. Załóżmy, że nie istnieje granica z_b. Istnieje wówczas ciąg punktów $t_k'\in(a,b)$ zbieżny do b i taki, że $\rho(t_k')\longrightarrow z_o$.
Ze skończoności zbioru zer i biegunów funkcji R wynika, że możemy założyć iż z_o nie jest punktem krytycznym.
Niech $V(z_o)$ oznacza otoczenie uniwersalne punktu z_o, a L i L' dwa łuki, na których Im $\zeta_{\beta\circ R}=$ const, wychodzące z z_o i takie, że ich drugie końce leżą na $\delta V(z_o)$. Ze względu na lemat 3 dla $\bar{t}\in(a,b)$ takich, że $\rho(\bar{t})\in V(z_o)$ zbiór $\{t\in(a,b)$ $\exists\tau\in(0,1)$ $\rho(t)=\gamma_{\rho(\bar{t})}(\tau)\}$ jest bądź przedziałem (α,β), bądź sumą przedziałów $(a,\alpha)\cup(\beta,b)$. Drugi z przypadków wykluczamy, gdyż nie istnieje z_b, w pierwszym zaś, zmniejszając ewentualnie otoczenie $V(z_o)$ (jeśli istnieje z_a), przyjmujemy $\alpha\neq a$, $\beta\neq b$. Oczywiście $\rho(\alpha)$, $\rho(\beta)$ leżą na $\delta V(z_o)$ i $\rho((\alpha,\beta))=\gamma_{\rho(\bar{t})}((0,1))$. Dla $\bar{t}$ istnieje tedy dokładnie jeden $t\in(\alpha,\beta)$, taki, że $\rho(t)\in L\cup L'$ (Uwaga 2).

Rozważmy obecnie zbiór $\{ t: t\in(a,b)\ \rho(t)\in V(z_o)\}$. Jako zbiór otwarty i niepusty rozpada się on na sumę przedziałów (a_n,b_n), a ponieważ nie istnieje granica z_b, a z_o jest granicą ciągu $\rho(t_k')$ wynika, że jest ich nieskończenie wiele. Jak już wiemy, z każdym przedziałem (a_n,b_n) związać można punkt $t_n\in(a_n,b_n)$ taki, iż $\rho_n=\rho(t_n)\in L\cup L'$. Na którymś łuku, np. L, musi leżeć nieskończenie wiele punktów ρ_n. Ze względu na jednostajną zbieżność $\gamma_{\rho(t_k')}$ (Def.4) do γ_{z_o} oraz fakt, że $\rho((a_{n_k},b_{n_k}))=\gamma_{\rho(t_k')}((0,1))$, gdzie (a_{n_k},b_{n_k}) oznacza ten z przedziałów (a_n,b_n), który zawiera t_k', otrzymujemy, że punkt z_o jest punktem skupienia ciągu ρ_n.
Odnotujmy, że $t_{n_k}\to b$.

W dalszej części pracy, bez szkody dla ogólności, zakładać będziemy, że cały ciąg ρ_n leży na L. Ustalmy przedział (a_{n_o},b_{n_o}). Wśród pozostałych przedziałów (a_n,b_n) istnieje wówczas przedział, który jest położony najbliżej z prawej strony przedziału (a_{n_o},b_{n_o}). W przeciwnym razie istniałby podciąg t_{n_k} ciągu t_n taki, że $b_{n_o}<a_{n_k}<t_{n_k}<b_{n_k}$ zbieżny do pewnego $p\in[b_{n_o},b)$. Z ciągłości ρ $\rho(p)\in L$, a więc p należy do pewnego przedziału (a_n,b_n), co daje sprzeczność. Możemy tedy przyjąć, po ewentualnym przenumerowaniu ciągu (a_n,b_n), iż $b_n<a_{n+1}$. Tym samym ciąg t_n będzie monotonicznie rosnący i zbieżny do b, gdyż zawiera podciąg zbieżny do b.

Sumując powyższe rozważania otrzymujemy, że istnieje ciąg $t_n \in (a_n, b_n)$ zbieżny do b monotonicznie i taki, że $\rho_n = \rho(t_n) \in L$. Punkt z_0 jest punktem skupienia ρ_n, a $\rho|_{(t_n, t_{n+1})}$ nie przecina L. W dalszej części pracy przyjmijmy, stosując homeomorfizm, iż $L=[0,1]$, a $z_0=1$.

Dla dowolnego n $\rho([t_n, t_{n+1}])$ oraz łuk $L(\rho_n, \rho_{n+1}) \subset L$ ogranicza obszar Jordana $H_n = H(\rho_n, \rho_{n+1})$. Na mocy twierdzenia 1 obszary H_n spełniają warunek (W). Jeśli zbiór punktów skupienia ciągu ρ_n nie posiadałby punktu izolowanego, istniałby obszar H_n taki, że $L(\rho_n, \rho_{n+1})$ posiadałby przynajmniej jeden punkt skupienia ciągu ρ_n, a więc i nieskończoną ich ilość, co sprzeczne z lematem 1. Omawiany zbiór posiada więc punkt izolowany i wybierając go jako z_0, a następnie zmniejszając $V(z_0)$ widzimy, że bez szkody dla ogólności założyć możemy, że $z_0=1$ jest jedynym punktem skupienia ciągu ρ_n, a więc $\rho_n \rightarrow 1$. Na mocy lematu 2 ciąg H_n jest ciągiem wstępującym bądź zstępującym obszarów typu tylko (b1), bądź tylko (b2). Dalsze rozważania poprowadzimy przy założeniu, że H_n są obszarami typu (b2) i $H_n \subset H_{n+1}$. Inne przypadki rozważa się bowiem analogicznie. Mamy tedy $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_n \rightarrow 1$. Od pewnego N mamy, że $(H_{n+1} \setminus \bar{H}_n)$ nie zawiera punktów krytycznych i bez szkody dla ogólności załóżmy, że ma to miejsce dla wszystkich n.

Weźmy obecnie punkt $z_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ i rozważmy krzywą $\omega(\tau)$ $\tau \in (c,d)$ przechodzącą przez $z_1 = \omega(\tau_1)$, o której mówi teza twierdzenia 3. Krzywa ta nie przecina ρ, gdyż z punktu przecięcia wychodziłyby cztery łuki, na których Re $\zeta_{\hat{\beta}\circ R}$=const a więc byłby to punkt krytyczny. Mamy $(\rho_1,\rho_2)\in\delta H_1$ i $(\rho_1,\rho_2)\subset H_2$ (Stwierdzenie 1). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że dla $\tau>\tau_1$ i dostatecznie bliskich τ_1 $\omega(\tau)\in H_2\setminus\overline{H}_1$, a dla $\tau<\tau_1$ i dostatecznie bliskich τ_1 $\omega(\tau)\in H_1$. Rozważmy obecnie $\omega_{|(\tau_1,d)}$. Zauważmy, że $\omega((\tau_1,d))\not\subset H_2\setminus\overline{H}_1$. Załóżmy bowiem przeciwnie, że $\omega((\tau_1,d))\subset H_2\setminus\overline{H}_1$. Wówczas istnieje bądź nie granica $z_d=\lim\limits_{\tau\to d}\omega(\tau)$. W drugim wypadku, powtarzając rozumowanie dotychczasowe dotyczące ρ w $H_2\setminus\overline{H}_1$, moglibyśmy wskazać analogony obszarów H_n, a w nich punkty zbioru Π, co jest niemożliwe. W pierwszym wypadku z istnienia z_d wynika istnienie $\lim\limits_{\tau\to c}\omega(\tau)$ i równość tych granic. Krzywa $\omega_{|(c,\tau_1)}$ ma punkty wspólne z H_1, a do $H_2\setminus\overline{H}_1$ może wejść jedynie poprzez (ρ_1,ρ_2), przecinając ten odcinek w punkcie $\omega(\tau_1')\neq\omega(\tau_1)$. Mogą zaistnieć dwa przypadki. Krzywa $\omega_{|(c,\tau_1')}$ pozostaje w $H_2\setminus\overline{H}_1$ bądź opuszcza ten obszar. Pierwszy przypadek jest niemożliwy, gdyż wówczas $L(\omega(\tau_1'),\omega(\tau_1))\cup\omega((c,\tau_1')\cup(\tau_1,d))\cup\{z_d\}$ byłby brzegiem obszaru Jordana zawartego $H_2\setminus\overline{H}_1$, który na mocy twierdzenia 1 miałby punkty wspólne z Π. Krzywa $\omega_{|(c,\tau_1')}$ musi tedy opuszczać $H_2\setminus\overline{H}_1$, a ze względu na to, co powiedzieliśmy wyżej, może to uczynić jedynie poprzez $(\rho_2,\rho_3)\subset\delta H_2$, wchodząc do $H_3\setminus\overline{H}_2$. Jeśli przebiega skończoną liczbę obszarów $H_{n+1}\setminus\overline{H}_n$, niech $H_{n_0+1}\setminus\overline{H}_{n_0}$ będzie tym z nich, który ma największy indeks. Krzywa $\omega_{|(c,\tau_1')}$ wchodzi do niego przecinając $(\rho_{n_0},\rho_{n_0+1})$, biegnie w nim, a potem opuszcza go przez ten sam łuk (gdyż $\lim_{\tau\to c}\omega(\tau)\in H_2\setminus\bar{H}_1$). Część łuku $(\rho_{n_0},\rho_{n_0+1})$ zawarta między tymi punktami przecięcia oraz część krzywej ω między tymi punktami ograniczają obszar Jordana zawarty w $H_{n_0+1}\setminus\bar{H}_{n_0}$, który zawiera punkty z Π, co daje sprzeczność. Pokażemy jeszcze, że krzywa $\omega|_{(c,\tau_1')}$ nie może przechodzić przez wszystkie obszary $H_{n+1}\setminus\bar{H}_n$. Istotnie. Istniałby wówczas ciąg punktów $\tau_n\in(c,\tau_1')$ taki, że $\omega(\tau_n)\in(\rho_n,\rho_{n+1})$. Stąd $\omega(\tau_n)\to 1$, a ponieważ $\lim_{\tau\to c}\omega(\tau)\in H_2\setminus\bar{H}_1$ $\tau_n\in[\alpha,\beta]\subset(c,\tau_1')$. Czyli ω przechodzi poprzez 1. Jest to jednak niemożliwe, gdyż $1\in\delta\bigcup_n(H_{n+1}\setminus\bar{H}_n)$, a ω przebiega w tej sumie.

Mamy tedy $\omega((\tau_1,d))\in H_2\setminus\bar{H}_1$, a stąd oraz z poprzednich rozważań istnieje $\tau_2>\tau_1$ taki, że $z_2=\omega(\tau_2)\in(\rho_2,\rho_3)\in\delta H_2$ i ogólnie poprzez indukcję istnieje ciąg $z_n=\omega(\tau_n)\in(\rho_n,\rho_{n+1})\in\delta H_n$ $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n<\ldots$. Oczywiście $z_n\to 1$ oraz $\omega((\tau_n,\tau_{n+1}))\subset H_{n+1}\setminus\bar{H}_n$.

Weźmy obecnie element analityczny $(W_3,1)\in\xi_{BoR}$. Niech $\mathrm{Re}\,W_3(1)=r$. Mamy wówczas $\mathrm{Re}\,W_3(\rho(t))=p\neq r$ dla $t\in(a_3,b_3)$. Istnieją elementy $(W_n,1)\in\xi_{BoR}$ takie, że $\mathrm{Re}\,W_n(\rho(t))=p$ dla $t\in(a_n,b_n)$ oraz element $(W_{n\,\rho(t_n)},\rho(t_n))$ jest przedłużeniem $(W_{n-1\,\rho(t_{n-1})},\rho(t_{n-1}))$ wzdłuż $\rho(t)$ $t\in[t_{n-1},t_n]$.

Ponieważ $\mathrm{Re}\,W_3(\rho_n)\to r$ oraz istnieją stałe $\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ i q_n tak, iż $W_3=\varepsilon_n W_n+q_n$ (uwaga 1) w $V(1)$, więc $\varepsilon_n p+\mathrm{Re}\,q_n\to r$.

Niech $z_3\in(\rho_3,\rho_4)$, a to $\omega(\tau)$ będzie krzywą przechodzącą przez z_3, rozpatrywaną powyżej, a $z_n\in(\rho_n,\rho_{n+1})$ omówionym tam ciągiem. Mamy $z_n\to 1$, a stąd $\mathrm{Re}\,W_3(z_n)\to r$. Punkt z_3 możemy tak wybrać, aby Re $W_3(z_3)=h\neq p$.

Jeśli pokażemy, że Re $W_n(z_n)=h$, wówczas mamy $\varepsilon_n h+\mathrm{Re}\, q_n \rightarrow r$, a stąd $h=p$ i sprzeczność ta zakończy dowód twierdzenia. Pokażemy precyzyjnie Re $W_4(z_4)=h$, gdyż dalej indukcyjnie łatwo uzyskuje się żądaną zależność.

Zauważmy przede wszystkim, że krzywa γ_1 występująca w definicji 4 dzieli $V(1)$ na dwa obszary Jordana, z których jeden zawiera $(0,1)$. Odcinek $[0,1]$ z kolei rozcina ten obszar na dwa obszary U_1, U_2. Ponieważ obszary H_n są typu (b2) otrzymujemy $\rho((t_n,b_n))\subset U_2$ $\rho((a_n,t_n))\subset U_1$, przy czym $\rho(a_n)\in\delta U_1$, $\rho(b_n)\in\delta U_2$. Rozważmy obecnie $B=H_4\setminus(\overline{H}_2\cup(\rho_3,\rho_4))$.
Z konstrukcji H_n otrzymujemy $\delta B=\delta H_4\cup\delta H_2\cup(\rho_3,\rho_4)$. Rozważmy krzywą $\rho_{|(t_3,t_4)}$. Krzywa ta przebiega w B, przy czym $\rho((t_3,b_3))\subset U_2$, a $\rho((a_4,t_4))\subset U_1$.

Wybierzmy w obszarze jednospójnym B jednoznaczną gałąź $\zeta^{o}\in\zeta_{BoR}$ tak, aby $\zeta^{o}(\rho(t))=W_3(\rho(t))$ $t\in(t_3,b_3)$ oraz $\zeta^{o}(\rho(t))=W_4(\rho(t))$ $t\in(a_4,t_4)$. Mamy tedy $\zeta^{o}=W_3$ na $U_2\cap B$ i $\zeta^{o}=W_4$ na $U_1\cap B$.
Krzywa $\omega(\tau)$ $\tau\in[\tau_3,\tau_4]$ łącząc w B z_3 z z_4 przechodzi w tej samej kolejności obszary $U_2\cap B$ i $U_1\cap B$. Dla $\tau\in(\tau_3,\tau_4)$ takich, że $\omega(\tau)$ należy do pierwszego z tych obszarów mamy $h=\mathrm{Re}\, W_3(z_3)=\mathrm{Re}\, W_3(\omega(\tau))=\mathrm{Re}\,\zeta^{o}(\omega(\tau))$, natomiast dla $\tau\in(\tau_3,\tau_4)$ takich, że $\omega(\tau)$ należy do drugiego z tych obszarów mamy $\mathrm{Re}\, W_4(z_4)=\mathrm{Re}\, W_4(\omega(\tau))=\mathrm{Re}\,\zeta^{o}(\omega(\tau))$. Ponieważ na ω $\mathrm{Re}\,\zeta_{BoR}=\mathrm{const}$, więc Re $W_4(z_4)=h$, co kończy dowód twierdzenia.

Bibliografia

[1] Jenkins I.A., Univalent functions and conformal mapping, Springer-Verlang, Berlin 1965.

[2] Jenkins I.A. Spencer D.C., Hyperelliptic trajectories, Annales of Math. vol 53 (1951).

[3] Pommerenke Ch., Univalent functions, Vandenhoeck and Ruprecht, Gettingen 1975.

[4] Saks S. Zygmund A., Analytic functions PWN, Warszawa 1965.

[5] Schaeffer A.C. Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions, Amer.Math.Soc.Coll.Publ.35(1950), New York.

[6] Tochowicz K., Funkcja pierwotna funkcji analitycznej, Zesz.Nauk.Pol.Śl z. 43, Gliwice 1985.

[7] Tochowicz K., Lokalne własności krzywych, na których $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)}\,dz = \mathrm{const}$, Zesz.Nauk.Pol.Śl.(w druku).

[8] Tochowicz K., The curve on which $\mathrm{Re}\int\sqrt{R(z)}\,dz = \mathrm{const}$. Zesz.Nauk.Pol.Rzesz. z. 38, Gliwice 1987.

[9] K.Tochowicz., O zachowaniu się pewnego typu krzywych. Zesz.Nauk.Pol.Śl.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

ТРАЕКТОРИЯ ФУНКЦИИ $R(z)$

Р Е З Ю М Е

В [5] Шеффер и Спенцер ввели теорию Г-структур для нескольких типов рациональных функций Эту теорию обобщил Женкинс [2] и названо ее теорией квадратичных дифференциалов. Основным понятием этих теорий является траектория - решение дифференциального уравнения [3] или неравенства [3]. Автор предложил конструкцию траектории, которая основывается на аналитических элементах. [6], [7], [8] и эта работа (которая есть продолжением [6], [7], [8]) являются частями этой конструкции. В роботе Автор доказывает:

Теорема: Если функция $R(z)$ имеет не больше чем три полюса то для любой точки, которая не критична найдется траектория, которая проходит через эту точку.

TRAJECTORY OF THE FUNCTION $R(z)$

S U M M A R Y

Schaeffer and Spencer presented in [5] the theory of Γ - structure related to several types of rational functions. It was generalized by I.A.Jenkins [2] and called " The theory of quadratic differentials ".Then trajectory is the fundamental notion in these theories, it is a global solution of differential equation [5] or inequality. [3] The author aims at constructing the trajectory on the basis of analytic elements. [6], [7], [8] and this paper (which is a continuation of [6], [7], [8]) is a part of this construction. Author proves the folowing theorem

Theory: If the function $R(z)$ has at most thry poles then for every point z which is not critical there is the trajectory η_z passing through this point.