ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Kajetan TOCHOWICZ

O ZACHOWANIU SIE PEWNEGO TYPU KRZYWYCH

Streszczenie. Praca jest wstępem do pracy [2]. Autor zajmuje się krzywą $\rho(t)$ $t\in(a,b)$, która przecina odcinek $[0,1]$ z obszarami $H(\rho(t'),\rho(t''))$ ograniczonymi krzywymi $\rho_{|(t',t'')}$ oraz odcinkami $[\rho(t'),\rho(t'')]\subset[0,1]$.

Praca ta stanowi część przygotowaną do dowodu twierdzenia o istnieniu trajektorii dla funkcji analitycznej $\zeta_{\beta\circ R}$ pierwotnej do funkcji $\beta\circ R$ gdzie $\beta=\overline{\sqrt{\ }}$. Uzyskane rezultaty niosą jednak informacje ogólne o zachowaniu się krzywej, przecinającej odcinek nieskończoną ilość razy, w zależności od zachownia się obszarów Jordana, ograniczonych częścią tej krzywej oraz kawałkiem tego odcinka. Stanowią więc pewną samodzielną całość niezależną od dalszych ich zastosowań.

Niech C oznacza płaszczyznę, $L=[0,1]$, a $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ będzie różnowartościową krzywą gładką. Oznaczmy dalej przez Π skończony zbiór punktów płaszczyzny, które nie leżą na krzywej ρ oraz łuku L. Niech $L(p,q)$, gdzie $p,q\in L$ oznacza część łuku L leżącą pomiędzy punktami p i q, a więc któryś z odcinków $[p,q]$ lub $[q,p]$. Jeśli punkty $\rho(t')$, $\rho(t'')$

$a < t' < t'' < b$ leżą na L oraz $\rho((t',t''))\cap L(\rho(t'),\rho(t''))=\emptyset$, wówczas $\rho((t',t''))\cup L(\rho(t'),\rho(t''))$ jest brzegiem obszaru Jordana, który oznaczać bedziemy przez $H(\rho(t'),\rho(t''))$. We wszystkich lematach zakładać będziemy, że spełniony jest warunek:

(W) Każdy z obszarów $H(\rho(t'),\rho(t''))$ oraz każde dopełnienie takiego obszaru ma punkty wspólne z Π.

Odnotujmy teraz proste uwagi:

<u>Uwaga 1.</u> Obszary $H(\rho(t'),\rho(t''))$ są rozłączne lub zawierają się jeden w drugim - wynika to natychmiast z konstrukcji tych obszarów.

<u>Uwaga 2.</u> Niech dany będzie obszar $H=H(\rho(\alpha),\rho(\beta))$, a $\rho(t')$, $\rho(t'')$ $t''>t'>\beta$ będą dwoma kolejnymi punktami przecięcia łuku $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez krzywą ρ. Załóżmy dalej, że $\rho((t',t''))$ leży poza H. Obszary H oraz $H(\rho(t'),\rho(t''))$ na mocy Uwagi1. są rozłączne lub $H\subset H(\rho(t'),\rho(t''))$. Biorąc w drugim przypadku punkt należący do różnicy tych obszarów, a następnie stosując inwersję względem tego punktu, by w końcu poprzez homeomorfizm sprowadzić obraz odcinka $[0,1]$ w tej inwersji na powrót w odcinek $[0,1]$, uzyskujemy rozłączność obszarów H i $H(\rho(t'),\rho(t''))$ przy zachowaniu wszystkich dotychczas omawianych warunków. Zawsze możemy więc założyć rozłączność takich dwóch obszarów.

Następne dwa lematy powiążą nam zachowanie krzywej ρ z licznością zbioru Π.

Lemat 1. Niech dany będzie obszar $H=H(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Jeśli spełniony jest warunek (W) oraz $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))\cap\{\rho(t):\ t\in(\beta,b)\ \}$ jest zbiorem co najmniej czteroelementowym, wówczas Π jest zbiorem co najmniej trójelementowym.

Dowód: Jak wiemy $H\cap\Pi$ oraz $(\bar{C}\setminus H)\cap\Pi$ są zbiorami niepustymi ($\bar{C}$ oznacza zwartą płaszczyznę). Niech $\rho_i=\rho(t_i)$ $t_i\in(\beta,b)$ $i=1,\dots,4$ będą czterema kolejnymi punktami przecięcia łuku $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez krzywą ρ. Bez szkody dla ogólności załóżmy $\rho(\alpha)<\rho_1<\rho_2<\rho(\beta)$ oraz że w punkcie ρ_2 krzywa ρ opuszcza obszar H. Na mocy uwagi 2 założyć możemy, że $H(\rho_2,\rho_3)$ jest rozłączny z $H(\rho_1,\rho_2)\subset H$. Jeśli $\rho(\alpha)<\rho_3<\rho_2$, wówczas $\overline{H(\rho_1,\rho_3)}$ zawiera każdy z tych obszarów, gdyż zawiera $L(\rho_1,\rho_2)\cap L(\rho_2,\rho_3)$. Zawiera więc przynajmniej dwa punkty zbioru Π, podczas gdy jego dopełnienie przynajmniej jeden. Jeśli $\rho_3>\rho_2$, nie można mówić o obszarze $H(\rho_1,\rho_3)$, gdyż $\rho_2\in L(\rho_1,\rho_3)$. W punkcie ρ_3 krzywa ρ wchodzi jednak ponownie do H. Obszar $H(\rho_1,\rho_2)\subset H$ jest wówczas bądź rozłączny z $H(\rho_3,\rho_4)$, bądź $H(\rho_3,\rho_4)\supset H(\rho_1,\rho_2)$. W pierwszym przypadku otrzymujemy, że $H\cap\Pi$ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym, a więc Π co najmniej trójelementowym; w drugim przypadku mamy

$\rho(\alpha)<\rho_4<\rho_2<\rho_3$ i powtarzając pierwszą część dowodu dla tego ciągu punktów, uzyskujemy tezę lematu.

Lemat 2. Niech dany będzie obszar Jordana $H=H(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Jeśli spełniony jest warunek (W) oraz Π posiada co najwyżej trzy elementy, wówczas zbiór punktów skupienia zbioru $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))\cap\{\rho(t): t\in(\beta,b)\}$ jest skończony.

Dowód: Oczywiście dowodu wymaga jedynie przypadek, gdy powyższy zbiór jest nieskończony. Z lematu 1. oraz założeń otrzymujemy natychmiast, że zbiór Π posiada dokładnie trzy elementy. Bez szkody dla ogólności załóżmy, że H zawiera dwa z nich. Rozważmy rodzinę T wszystkich obszarów $H(\rho(t'),\rho(t''))$ $\subset H$, $t',t''\in(\beta,b)$, gdzie $\rho(t'),\rho(t'')$ są dwoma kolejnymi punktami przecięcia $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez ρ. Jeśli istnieje zbiór tej rodziny zawierający dwa punkty z Π, wówczas rozumowanie zaprezentowane w dowodzie lematu 1. prowadzi do wniosku, że zbiór Π posiada co najmniej cztery elementy, co daje sprzeczność. Mamy tedy dwa przypadki:

a. Istnieją dwie nieskończone podrodziny rodziny T takie, że każdy ze zbiorów jednej z podrodzin zawiera jeden ustalony punkt z Π, a każdy ze zbiorów drugiej podrodziny drugi.

b. Prawie wszystkie obszary $H(\rho(t'),\rho(t''))$ zawierają dokładnie jeden ustalony punkt z Π.

a. Zauważmy przede wszystkim, że jeśli $H(\rho_1,\rho_2)$, $H(\rho_3,\rho_4)$ są dwoma obszarami z rodziny T, wówczas jeśli są rozłączne, to i łuki $L(\rho_1,\rho_2)$, $L(\rho_3,\rho_4)$ są rozłączne; jeśli natomiast zawierają się jeden w drugim, np. $H(\rho_1,\rho_2)\subset H(\rho_3,\rho_4)$, to to samo dotyczy i łuków $L(\rho_1,\rho_2)\subset L(\rho_3,\rho_4)$. Wnioskujemy stąd, że możemy łuk $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ podzielić punktami $z_1<z_2<z_3$ na cztery łuki $L_1=L(\rho(\alpha),z_1)$, $L_2=L(z_1,z_2)$, $L_3=L(z_2,z_3)$, $L_4=L(z_3,\rho(\beta))$ w ten sposób, że jeśli $H(\rho(t'),\rho(t''))$ należy do jednej z podrodzin, wówczas $\rho(t')\in L_1$, $\rho(t'')\in L_2$; jeśli natomiast należy do drugiej, wówczas $\rho(t')\in L_3$, $\rho(t'')\in L_4$ (nie zakładamy tutaj $t'<t''$). Ponieważ obie podrodziny są nieskończone, istnieje nieskończona ilość połączeń $L_1\cup L_2$ z $L_3\cup L_4$ częścią krzywej ρ biegnącą na zewnątrz H. Możliwe są cztery przypadki połączeń: L_1-L_3, L_1-L_4, L_2-L_3, L_2-L_4, przy czym ostatni możemy pominąć jako symetryczny do L_1-L_3. Rozważmy te przypadki:

L_1-L_4. Niech $\rho_1=\rho(t_1)\in L_1$, $\rho_4=\rho(t_4)\in L_4$ będą kolejnymi punktami przecięcia $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez ρ, a $\rho((t_1,t_4))$ wspomnianym łukiem leżącym na zewnątrz H. Na mocy uwagi 2 możemy wówczas założyć, że obszar $H(\rho_1,\rho_4)$ leżący na zewnątrz H jest z H rozłączny. Rozważając przebieg krzywej $\rho(t)$ dla $t<t_1$ i $t>t_4$ otrzymujemy istnienie punktów t_2, t_3 takich, że $\rho_2=\rho(t_2)\in L_2$, ρ_1, ρ_4, $\rho_3=\rho(t_3)\in L_3$ są kolejnymi punktami przecięcia $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez ρ oraz $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$.

Obszar $H(\rho_2,\rho_3)$ zawiera wówczas $H(\rho_1,\rho_4)$ oraz każdy z podobszarów $H(\rho_1,\rho_2)$, $H(\rho_3,\rho_4)$. Ponieważ ostatnie dwa obszary należą do różnych rozważanych podrodzin rodziny T, w $H(\rho_2,\rho_3)$ leżą trzy punkty z Π, a w jego dopełnieniu co najmniej jeden, co daje sprzeczność.

L_1-L_3. Niech $\rho_1=\rho(t_1)\in L_1$, $\rho_3=\rho(t_3)\in L_3$, a $\rho((t_1,t_3))$ będzie łukiem łączącym L_1 a L_3 położonym na zewnątrz H tak, że $H(\rho_1,\rho_3)\cap H=\emptyset$. Krzywa ρ wchodzi do H poprzez L_3 i biegnie w nim do $\rho_4=\rho(t_4)\in L_4$ wychodząc z H, a dalej na zewnątrz H do $\rho_5=\rho(t_5)$, ograniczając obszar $H(\rho_4,\rho_5)$. Ze względu na założenia o $H(\rho_1,\rho_3)$, $\rho_5\subset L(\rho(\alpha),\rho(\beta))\setminus L(\rho_1,\rho_3)$. Jeśli $\rho_5\in L_1$ połączenie ρ_4 z ρ_5 daje rozważany przypadek L_1-L_4. Jeśli $\rho_5\in L(\rho_3,\rho(\beta))$, wówczas obszar $H(\rho_4,\rho_5)$ jest bądź rozłączny z H (a wówczas i z $H(\rho_1,\rho_3)$, gdyż $L(\rho_1,\rho_3)\cap L(\rho_4,\rho_5)=\emptyset$), bądź zawiera H (a więc i $H(\rho_1,\rho_3)$, gdyż $L(\rho_1,\rho_3)\subset\delta H$). W pierwszym przypadku na zewnątrz H leżą dwa punkty z Π, w drugim $H(\rho_4,\rho_5)$ leżą trzy takie punkty. W obu wypadkach uzyskujemy sprzeczność z ilością punktów w Π.

L_2-L_3. Dowód analogiczny do poprzedniego przypadku.

b. Na mocy założeń o ρ zbiór $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))\cap\{\rho(t):\ t\in(\beta,b)\ \}$ jest przeliczalny - ustawmy go w ciąg z_n kolejnych punktów przecięcia łuku $L(\rho(\alpha),\rho(\beta))$ przez ρ. Niech $z_1<z_2$, przy czym w punkcie z_2 niech krzywa ρ opuszcza H. Wówczas $H(z_1,z_2)\subset H$. Następny punkt przecięcia z_3 leży na jednym z łuków

$L(\rho(\alpha),z_1)$, $L(z_1,z_2)$, $L(z_2,\rho(\beta))$, a o obszarze $H(z_2,z_3)$ założyć możemy na mocy uwagi 2, że jest rozłączny z H.

Niech $z_3 \in L(\rho(\alpha),z_1)$. Wówczas $z_4 \in L(z_2,\rho(\beta))$, gdyż w wypadku (b) $H(z_3,z_4) \supset H(z_1,z_2)$. W punkcie z_4 krzywa ρ znowu opuszcza H, a punkt następny z_5 należy bądź do $L(\rho(\alpha),z_3)$, bądź do $L(z_4,\rho(\beta))$. Jeśli $z_5 \in L(z_4,\rho(\beta))$, wówczas obszar $H(z_4,z_5)$ jest bądź rozłączny z $H(z_2,z_3)$, czyli na zewnątrz H leżą dwa punkty zbioru Π (sprzeczność), bądź $H(z_4,z_5) \supset H(z_2,z_3) \cup H$ - czyli Π zawiera co najmniej cztery punkty (sprzeczność).

Mamy tedy $z_5 \in L(\rho(\alpha),z_3)$. Stąd i z założeń do omawianego przypadku $z_6 \in L(z_4,\rho(\beta))$ i dalej indukcyjnie $z_{2n} \in L(z_{2(n-1)},\rho(\beta))$, $z_{2n-1} \in L(\rho(\alpha),z_{2n-3})$. Ciąg z_n ma wówczas dwa punkty skupienia.

Niech $z_3 \in L(z_2,\rho(\beta))$. Wówczas $z_4 \in L(\rho(\alpha),z_1)$. Podobnie jak poprzednio pokazujemy, że $z_5 \in L(z_4,\rho(\beta))$, $z_6 \in L(\rho(\alpha),z_3)$ itd. oraz że ciąg z_n ma dwa punktu skupienia.

Niech $z_3 \in L(z_1,z_2)$. Wówczas $H(z_3,z_4) \subset H(z_1,z_2)$. W punkcie z_4 krzywa opuszcza H. Jeśli $z_4 \in L(z_1,z_2)$, wówczas $z_5 \in L(z_2,z(\beta))$ i powtarzając poprzednie przypadki dla ciągu $z_3,z_4,z_5,\ldots$ uzyskujemy dwa punkty skupienia. Jeśli $z_4 \in L(z_2,z_3)$, wówczas $H(z_4,z_5) \subset H(z_2,z_3)$, a tym samym ogólnie $L(z_1,z_2) \subset L(z_2,z_3) \subset L(z_3,z_4) \subset L(z_4,z_5) \ldots \subset L(z_n,z_{n+1}) \subset \ldots$. Ciąg z_n ma więc dwa lub jeden punkt skupienia.

Następny lemat powie nam o kształcie obszarów $H(\rho(t'),\rho(t''))$. Najpierw jednak podamy ich klasyfikację.

Jeśli krzywa ρ przecina $L=[0,1]$ w $\rho(t')$, wówczas $\mathrm{Im}\,\rho(t')=0$ oraz $\mathrm{Im}\,\rho(t)$ jest różnego znaku dla $t\in(t'-\varepsilon,t')$ oraz $t\in(t'',t''+\varepsilon)$. W związku z tym obszary $H(\rho(t'),\rho(t''))$, $t'<t''$ można sklasyfikować ze względu na znak:

$\mathrm{Im}\,\rho(t)$, $t\in(t',t'+\varepsilon)$ $\quad$ $\mathrm{Im}\,\rho(t)$, $t\in(t'',t''+\varepsilon)$.

Mamy tedy:

a. powyższe wielkości są tego samego znaku,

b. Powyższe wielkości są różnych znaków.

Mniej precyzyjnie będziemy mówić dalej, że krzywa ρ dochodzi do L z tych samych stron bądź z różnych stron. Zauważmy dalej, że jeśli dany jest obszar $H(\rho(t'),\rho(t''))$, wówczas krzywa $\rho(t)$ $t\in(t'',t^*)$ - gdzie $t''<t^*$ i $\rho(t^*)$ jest kolejnym punktem przecięcia L - leży w :

1. $H(\rho(t'),\rho(t''))$,

2. dopełnieniu $H(\rho(t'),\rho(t''))$.

Mniej precyzyjnie będziemy mówić, że krzywa ρ wychodzi bądź wchodzi do $H(\rho(t'),\rho(t''))$.

Powyższe możliwości pozwalają nam sklasyfikować obszary $H=H(\rho(t'),\rho(t''))$:

(a1) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t'')$ dochodzi do L z tej samej strony i w dalszym przebiegu pozostaje w H;

(a2) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t")$ dochodzi do L z tej samej strony i w dalszym przebiegu opuszcza H;

(b1) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t")$ dochodzi do L z różnych storn i w dalszym przebiegu pozostaje w H;

(b2) krzywa $\rho(t)$ $t\in(t',t")$ dochodzi do L z różnych stron i w dalszym przebiegu opuszcza H.

Stwierdzenie 1. (Własności obszarów $H=H(\rho(t'),\rho(t"))$)

W wypadku (a1) $[0,\rho(t'))\cup(\rho(t"),1]\subset H$.

W wypadku (a2) $[0,\rho(t'))\cup(\rho(t"),1]\subset\bar{C}\setminus H$.

W wypadku (b1) jeśli $\rho(t')<\rho(t")$ to $[0,\rho(t'))\subset\bar{C}\setminus H$, $(\rho(t"),1]\subset H$

jeśli $\rho(t')>\rho(t")$ to $[0,\rho(t"))\subset H$, $[\rho(t'),1]\subset\bar{C}\setminus H$

W wypadku (b2) jeśli $\rho(t')<\rho(t")$ to $[0,\rho(t'))\subset H$, $(\rho(t"),1]\subset\bar{C}\setminus H$

jeśli $\rho(t')>\rho(t")$ to $[0,\rho(t"))\subset\bar{C}\setminus H$, $[\rho(t'),1]\subset H$

Dowód: Dowód stwierdzenia opiera się na fakcie, że jeśli dwa punkty nie leżące na brzegu obszaru Jordana można połączyć łukiem nie przecinając tego brzegu, wówczas punkty te leżą bądź w tym obszarze, bądź w jego dopełnieniu. Ponieważ dowód polega na rozpatrzeniu poszczególnych przypadków, a wszystkie dowodzi się podobnie, rozważymy szczegółowo przypadek (a1). Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że $\mathrm{Im}\,\rho(t)>0$ dla $t\in(t',t'+\varepsilon)\cup(t"-\varepsilon,t")$. Wówczas $\mathrm{Im}\,\rho(t)<0$ oraz $\rho(t)\subset H$ dla $t\in(t",t"+\varepsilon)$. Istnieje $\delta<0$ taka, że $\rho(t)\notin K$

$t\in(t',t'')$, gdzie K jest prostokątem $\delta<\mathrm{Im}\ z<0$, $0<\mathrm{Re}\ z<1$. W przeciwnym razie z ciągłości ρ wynikałoby istnienie $t^{*}\in(t',t'')$ takiego, że $\rho(t^{*})\in[0,1]$. Oczywiście K nie przecina brzegu H oraz K zawiera w sobie punkty H. Z drugiej strony istnieją punkty z H nie należące do K (bo dla pewnych punktów brzegu ich część urojona jest dodatnia). Mamy tedy $\overline{K}\subset\overline{H}$, a ponieważ jedynymi punktami łuku L leżącymi na brzegu H są punkty łuku $L(\rho(t'),\rho(t''))$, natychmiast otrzymujemy żądaną własność obszarów typu a1.

■

Stwierdzenie 2.

Niech z_1, z_2, z_3 będą kolejnymi punktami przecięcia L przez ρ. Jeśli $H(z_1,z_2)$ jest obszarem typu (b1), wówczas $H(z_2,z_3)$ jest obszarem typu (b1) bądź typu (a2).

Dowód: Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $z_1<z_2$. Z możliwych przypadków $z_1<z_2<z_3$ $z_1<z_3<z_2$ rozpatrzymy pierwszy, gdyż drugi dowodzi się analogicznie. Ponieważ $H(z_2,z_3)\subset H(z_1,z_2)$. Z stwierdzenia 1 mamy $[0,z_2)\cap H(z_2,z_3)=\emptyset$ (gdyż $[0,z_1)\cap H(z_1,z_2)=\emptyset$). Własność tą posiadają jedynie obszary typu (b1) i (a2).

■

<u>Lemat 3.</u> Niech dany będzie odcinek $L=[0,1]$ oraz ciąg jego punktów $z_n \to 1$. Niech różnowartościowa krzywa $\rho(t)$ $t\in(a,b)$ przechodzi przez wszystkie punkty z_n przecinając L, tzn. $z_n=\rho(t_n)\in L$, przy czym $t_n<t_{n+1}$ $t_n \to b$. Załóżmy dalej, że są to wszystkie punkty przecięcia L przez ρ oraz że spełniony jest warunek (W) dla obszarów $H_n=H(z_n,z_{n+1})$. Wówczas poczynając od pewnego N ciąg z_n $n>N$ jest zbieżny do 1 monotonicznie, a obszary H_n tworzą ciąg zstępujący bądź wstępujący obszarów tylko typu (b1) bądź tylko typu (b2).

<u>Dowód:</u> Wykluczymy najpierw nieskończoną ilość obszarów typu a. Niech więc istnieje nieskończona ilość obszarów typu (a2). Ze względu na warunek (W) istnieje nieskończenie wiele obszarów typu (a2) zawierających się w sobie nawzajem - oznaczmy je przez $H_{n'}$. Mamy $L\cap H_{n'}=L(z_{n'},z_{n'+1})$. Z warunku zawierania oraz stwierdzenia 1. otrzymujemy $L(z_{n'},z_{n'+1})\subset L(z_{k'},z_{k'+1})$ bądź odwrotnie. Dokonując ewentualnie przenumerowania ciągu z_n, uzyskujemy ciąg odcinków $L(z_{n'},z_{n'+1})$ $\subset(0,1)$ wstępujący bądź zstępujący. Ciąg $z_{n'}$ posiada więc dwa punkty skupienia bądź jeden leżący w $(0,1)$, co jest sprzeczne ze zbieżnością z_n do 1.

Niech więc istnieje nieskończenie wiele obszarów typu (a1). Oznaczmy je ponownie przez $H_{n'}$ i podobnie jak poprzednio przyjmijmy, że zawierają się w sobie nawzajem.

Niech $H_{k'}$, $H_{l'}$ będą dwoma z nich i załóżmy, że $L(z_{k'},z_{k'+1})\cap L(z_{l'},z_{l'+1})=\emptyset$. Załóżmy także bez szkody dla ogólności $z_{k'}<z_{k'+1}<z_{l'}<z_{l'+1}$. Na mocy stwierdzenia 1 obszar $H_{k'}$ zawiera $L(z_{k'+1},1)$, a więc punkty $H_{l'}$ oraz $\delta H_{l'}$, tym samym $H_{k'}\supset H_{l'}$. Podobnie $H_{k'}\subset H_{l'}$, czyli $H_{k'}=H_{l'}$. Daje to sprzeczność, tak więc $L(z_{k'},z_{k'+1})\subset L(z_{l'},z_{l'+1})$ bądź odwrotnie. Postępując podobnie jak w rozważaniach dotyczących obszarów typu (a2) uzyskujemy sprzeczność z $z_n\to 1$.

Otrzymaliśmy tedy, iż prawie wszystkie obszary H_n są typu (b1) lub (b2). Jeśli obszarów jednego i drugiego typu byłaby ilość nieskończona, wówczas nieskończenie wiele połączeń obszarów typu (b1) z (b2), co jest niemożliwe ze względu na stwierdzenie 2 i udowodnioną część lematu dotyczącą obszarów typu (a). Prawie wszystkie obszary H_n są więc tylko typu (b1) bądź tylko typu (b2). Rozważmy jedynie przypadek (b2), gdyż (b1) rozważa się analogicznie.

Niech H_n będzie powyższym obszarem i załóżmy $z_n<z_{n+1}$. Krzywa ρ wchodzi do $\bar{C}\setminus H_n$, stąd $z_{n+2}\in L(z_n,1)$, a ponieważ krzywa ρ z różnych stron łuku L dochodzi do punktów z_{n+1}, z_{n+2}, więc $z_{n+2}\in L(z_{n+1},1)$. Stąd $H_n\subset H_{n+1}$. Daje to jednocześnie monotoniczną zbieżność z_n do 1.

Bibliografia

[1] Kuratowski K. - Wstęp do teorii mnogości i topologii PWN, Warszawa 1973.

[2] Tochowicz K. - Teoria funkcji $\int\sqrt{R(z)}\,dz$

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

ПЕРЕБКГ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ КРИВЫХ

Р А З Ю М Е

Эта работа является вступлением в работу [2]. В этой работе автор занимается кривой $\rho(t)$, $t\in(a,b)$, которая пересекает отрезок [0,1] и облости $H(\rho(t'),\rho(t''))$, ограниченные кривыми $\rho_{|(t',t'')}$ и отрезками $[\rho(t'),\rho(t'')]\subset[0,1]$.

ABOUT BEHAVIOUR OF SOME TYPES OF CURVES

S U M M A R Y

This work is introduktion to the paper [2]. The curve $\rho(t)$ $t\in(a,b)$, which cuts the interval [0,1], and the domains $H(\rho(t'),\rho(t''))$, which are bounded by curves $\rho_{|(t',t'')}$ and intervals $[\rho(t'),\rho(t'')]\subset[0,1]$, are considered in this paper.