ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Sabina PRZYBYLAK, Jerzy SKRZYPCZYK

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ASYMPTOTYCZNYCH NIESTACJONARNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie: W pracy analizowane są układy dynamiczne opisane stochastycznymi równaniami całkowymi typu Volterry II rodzaju. Porównuje się rozwiązania równań przedstawiających tzw. "stan ustalony" w układach dynamicznych z rozwiązaniami równań przedstawiających "stan nieustalony". Badane są warunki, przy których efekt działania zaburzeń początkowych znika w nieskończoności.

1. WSTĘP

Wiele układów dynamicznych, występujących w różnych gałęziach techniki, można opisać stochastycznymi równaniami całkowymi. Są to na przykład: układy mechaniczne ciągłe i dyskretne zawierające elementy lepko-sprężyste, układy mechaniczne, elektryczne i inne zawierające elementy liniowe niezmienne w czasie i pewną liczbę elementów nieliniowych zmiennych w czasie (np. rezystorów), duża klasa układów sterowania ze sprzężeniem zwrotnym i wiele innych.

W analizie nieliniowych układów dynamicznych szczególną rolę odgrywają własności układów opisanych nieliniowym, losowym równaniem całkowym typu Volterry II rodzaju postaci

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega) f(\tau, x(\tau,\omega),\omega) d\tau \quad , t \in R^1_+ \tag{1}$$

gdzie $z(t,\omega)$ jest procesem stochastycznym, który reprezentuje tzw. "wejście" układu dynamicznego i obejmuje między innymi warunki początkowe w chwili $t=0$. Proces stochastyczny $x(t,\omega)$ opisuje tzw. "wejscie" układu dynamicznego i jest odpowiedzią układu (1) na sygnał wejściowy $z(t,\omega)$ włączony w chwili $t=0$. Jak łatwo zauważyć, rozwiązanie $x(t,\omega)$ równania całkowego (1) jest z naturalnych przyczyn procesem niestacjonarnym.

Analiza własności układu dynamicznego (1) jest złożona i w związku z tym dokonuje się różnego rodzaju uproszczeń w stosowanym modelu matematycznym. I tak z matematycznego punktu widzenia wygodniej jest czasem badać równanie całkowe Volterry II rodzaju postaci

$$y(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_{-\infty}^{t} k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,y(\tau,\omega),\omega)d\tau \qquad ,t\in R^1 \qquad (2)$$

które opisuje model matematyczny układu dynamicznego poddanego wymuszeniu stochastycznemu,określonemu dla wszystkich $t\in R^1$.

Przy pewnych założeniach można wykazać,że odpowiedź układu (2) na stacjonarny sygnał wejściowy jest również procesem stacjonarnym [6]. Analiza własności procesów stacjonarnych jest z naturalnych przyczyn dużo łatwiejsza niż procesów niestacjonarnych [4,5],stąd korzyści płynące z takiego uproszczenia.

Innym przykładem jest przybliżona analiza rozwiązań okresowych równania (1) ,której dokonuje się w oparciu o równanie (2).Na takim przybliżeniu oparte są między innymi szeroko znane metody filtru idealnego i funkcji opisującej.

U podstaw analizy rozwiązań równań (1) i (2) leży założenie,że równanie (2) opisuje tzw. stan ustalony w układzie dynamicznym określony dla $t\in R^1$, natomiast równanie (1) opisuje tzw. stan nieustalony (inaczej "stan przejściowy"), będący wynikiem pojawienia się na wejściu układu dynamicznego w chwili t=0 dodatkowo wpływu niezerowych warunków początkowych lub dodatkowego zakłócenia.

W wielu przypadkach składowa nieustalona sygnału $x(t,\omega)$ zanika do zera przy $t=\infty$ .Celem analizy przeprowadzonej w pracy jest odpowiedź na pytanie, kiedy $\| x(t,\omega)-y(t,\omega)\|_2 \longrightarrow 0$ przy $t\longrightarrow \infty$.

2. OZNACZENIA I PODSTAWOWE DEFINICJE

W pracy zajmujemy się stochastycznymi równaniami całkowymi typu Volterry II rodzaju postaci (1) i (2).

Będziemy dalej zakładać,że prawdziwe są następujące założenia:

(A1) ω jest elementem przestrzeni probabilistycznej $(\underline{\omega},\beta,P)$;

(A2) $z(t,\omega)$ jest mierzalnym procesem stochastycznym określonym na $R^1\times\underline{\omega}$, o wartościach rzeczywistych ;

(A3) losowe jądro Volterry $k(t,\omega)$ jest mierzalną, losową funkcją rzeczywistą określoną dla $t\in R^1_+:=[0,\infty[$ i równą zeru dla $t\in R^1_-:=]-\infty,0[$ dla prawie wszystkich $\omega\in\underline{\omega}$;

(A4) nieliniowa funkcja losowa $f(t,x,\omega)$ jest mierzalnym odwzorowaniem $R^1_+\times R^1\times\underline{\omega} \longrightarrow R^1$ i analogicznie $\tilde{f}(t,y,\omega)$ $:R^1\times R^1\times\underline{\omega} \longrightarrow R^1$ oraz $f(t,.,.)=\tilde{f}(t,.,.)$ dla wszystkich $t\in R^1_+$;

(A5) $x(t,\omega)$,$y(t,\omega)$ są nieznanymi procesami stochastycznymi.

Przeprowadzając analizę równań (1) i (2) wykorzystujemy metody analizy funkcjonalnej i teorii procesów stochastycznych.

Poniżej omówione zostaną podstawowe oznaczenia i definicje wykorzystywane w dalszych rozważaniach.

DEFINICJA 1. Powiemy, że proces stochastyczny $x(t,\omega)$, $t\in R^1$ jest procesem 2 rzędu lub należy do przestrzeni $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$, jeżeli dla dowolnego $t\in R^1$ mamy

$$E\left\{|x(t,\omega)|^2\right\} = \int_{\underline{\omega}} |x(t,\omega)|^2 P(d\omega) < \infty$$

Zauważmy, że zmienna losowa $x(.,\omega)$ jest całkowalna z kwadratem ze względu na miarę $P(.)$ dla każdego $t\in R^1_+$. Wprowadzimy następujące oznaczenie dla drugiego momentu tej zmiennej losowej

$$\| x(t,.)\|_2 := \left[E\left\{| x(t,.)|^2\right\}\right]^{1/2}$$

Dla każdej wartości $t\in R^1$ przestrzeń zmiennych losowych $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$ jest przestrzenią Hilberta [4,5].

Będziemy zakładać, że procesy stochaastyczne $x(t,\omega)$, $y(t,\omega)$, $z(t,\omega)$ są funkcjami argumentu $t\in R^1$ o wartosciach w przestrzeni $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$. Funkcje $f(t,x(t,\omega),\omega)$ i $\tilde{f}(t,y(t,\omega),\omega)$ będą przy pewnych dodatkowych założeniach również funcjami o wartościach w przestrzeni $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$.

DEFINICJA 2. Powiemy, że zmienna losowa $x(\omega)$ jest P-istotnie ograniczona lub że należy do przestrzeni $L^\infty(\underline{\omega},\beta,P)$, jeżeli istnieje stala $M>0$ taka, że

$$P\left\{\omega : |x(\omega)| > M\right\} = 0 \tag{3}$$

Największa dolna granica zbioru liczb M, dla których zachodzi relacja (3), jest nazywana istotnym kresem górnym $|x(\omega)|$ ze względu na P i oznaczana będzie

$$P\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\underline{\omega}} |x(\omega)| = \inf_{\underline{\omega}_0}(\sup_{\underline{\omega}\setminus\underline{\omega}_0} |x(\omega)|)$$

gdzie $P(\underline{\omega}_0)=0$. Normę przestrzeni $L^\infty(\underline{\omega},\beta,P)$ oznaczać będziemy przez

$$|||x(\omega)||| := P\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\underline{\omega}} |x(\omega)|$$

W analogiczny sposób rozumiany będzie istotny kres dolny, który oznaczany będzie $P\text{-}\operatorname{ess\,inf}_{\omega\in\underline{\omega}}$.

O stochastycznym jądrze $k(t,\omega)$ zakładać będziemy, że jest P-istotnie ograniczone dla wszystkich $t\in R^1_+$. To założenie zapewnia, że iloczyn $k(t-\tau,\omega)$ i $f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)$ pozostaje elementem przestrzeni $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$.

DEFINICJA 3. Niech dalej $C(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ oznacza przestrzeń funkcji losowych o wartościach w $L^2(\underline{\omega},\beta,P)$ ciągłych w sensie średniokwadratowym z metryką określoną w sposób następujący

$$\|x(t,\omega)\|_{C(R^1_+;L^2)} := \sup_{t\in R^1_+} \| x(t,\omega)\|_2$$

W tak określonej przestrzeni wydzielimy klasę N funkcji losowych $x_o(t,\omega)$, dla których $\underset{t\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ x_o(t,\omega)=0$. Klasa $N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ wszystkich funkcji losowych, ciągłych w sensie średniokwadratowym dla $t\in R^1_+$ i dążących do zera w sensie średnim, jest podprzestrzenią liniową zupełną.

Podzielimy przestrzeń $C(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ na klasy równoważności. Do tej samej klasy zaliczać będziemy dwie funkcje losowe $x_1(t,\omega)$ i $x_2(t,\omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica x_1-x_2 należy do przestrzeni $N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$.

DEFINICJA 4. Zbiór klas równoważności oznaczać będziemy $C/N = C/N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$. W przestrzeni C/N wprowadzimy normę

$$\|x(t,\omega)\|_{C/N(R^1_+;L^2)} := \overline{\underset{t\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}}\,|x(t,\omega)| = \lim_{T\to\infty}\ \sup_{t\geq T}\|x(t,\omega)\|_2$$

Inaczej mówiąc, dwa sygnały zaliczymy do tej samej klasy, jeżeli posiadają taki sam średni "stan ustalony", tzn. elementami przestrzeni C/N będą procesy stochastyczne ograniczone i ciągłe w sensie średniokwadratowym dla $t\in R^1_+$ i określone z dokładnością do procesów dążących do zera w sensie średniokwadratowym przy $t\to\infty$.

W dalszych rozważaniach pojawia się jeszcze jeden rodzaj przestrzeni funkcyjnej z tzw. mieszaną normą [7].

DEFINICJA 5. Oznaczymy przez $L^{p,q}(R^1_+) = L^p(R^1_+;L^q(\underline{\omega},\beta,P))$, $1\leq p<\infty$, $1\leq q<\infty$ zbiór mierzalnych funkcji losowych $x(t,\omega)$, dla których zachodzi

$$\int_0^\infty \left[\|x(t,\omega)\|_q\right]^p dt < \infty$$

Normę w przestrzeni $L^{p,q}$ wprowadza się w następujący sposób:

$$\|x(t,\omega)\|_{p,q} := \left[\int_0^\infty \left[\|x(t,\omega)\|_q\right]^p dt\right]^{1/p}$$

Wprowadzone do rozważań przestrzenie funkcyjne są wszystkie przestrzeniami Banacha. Oczywiście definicja 5 pozostaje prawdziwa, jeżeli w miejsce półprzestrzeni R^1_+ wstawić całą przestrzeń R^1.

3. ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ

W twierdzeniu 1, podanym poniżej, rozważany jest problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania całkowego

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau \qquad ,t\in R^1_+ \tag{4}$$

TWIERDZENIE 1. Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:

(B1) $k(t,\omega),tk(t,\omega),t^2k(t,\omega)\in L^1(R^1_+;L(\underline{\omega},\beta,P))\cap L^2(R^1_+;L^\infty(\underline{\omega},\beta,P))$;

(B2) dla każdego $x\in R^1$ funkcja $f(t,x,\omega)$ jest ciagła w sensie średniokwadratowym, $f(t,0,\omega)=0$ mod(P), oraz istnieją takie nieujemne liczby m i M, że zachodzi:

$$m \le \frac{f(t,x_1,\omega) - f(t,x_2,\omega)}{x_1 - x_2} \le M \quad , \quad \text{dla każdego } x_1,x_2,t \in R^1$$

$$\text{(B3)} \quad P\text{-ess} \inf_{\omega \in \omega_0} \inf_{Re\, s \ge 0} \left| \frac{1}{K(s,\omega)} - \frac{M+m}{2} \right| > \frac{M-m}{2} \; ;$$

Wtedy dla każdego $z(t,\omega) \in C/N(R^1_+; L^2(\omega, \beta, P))$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (4) w tej przestrzeni i istnieje stała α taka, że

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \| x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega) \|_2 \le 2\alpha \overline{\lim_{t \to \infty}} \| z_1(t,\omega) - z_2(t,\omega) \|_2 \qquad (5)$$

gdzie x_1, x_2 są rozwiązaniami równania (4) odpowiadającymi wymuszeniom z_1 i z_2 odpowiednio, z_1 i z_2 są procesami ciągłymi w sensie średniokwadratowym.

Dowód. Dowód oparty jest na następujących dwóch lematach i jego idea pochodzi z pracy [8, str. 206].

LEMAT 1. Rozważmy stochastyczne równanie całkowe postaci:

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega) q(\tau) x(\tau,\omega) d\tau \quad , t \in R^1_+ \qquad (6)$$

Niech spełnione będą założenia (B1) i (B3) oraz ponadto:

(C1) $m \le q(t) \le M$ dla wszystkich $t \in R^1$.

Jeżeli $z_n(t,\omega)$ jest funkcją równą zeru mod(P) poza przedziałem $[n, n+1[$, a $x_n(t,\omega)$ jest odpowiadającym jej rozwiązaniem równania (6), to istnieje stała α (zależna wyłącznie od $m, M, k(t,\omega)$) taka, że

$$\| x_n(t,\omega) \|_2 \le \frac{\alpha}{(1+t-n)^2} \sup_{n \le t \le n+1} \| z_n(t,\omega) \|_2 \quad , t \ge n \qquad (7)$$

Dowód. Jeżeli $z \in L^{2,2}(R^1_+)$, to rozwiązanie x równania (6) również należy do przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ i istnieje stała β, taka, że

$$\| x(t,\omega) \|_{2,2} \le \beta \| z(t,\omega) \|_{2,2} \qquad (8)$$

Zauważmy także, że

$$\|x_n(t,\omega)\|_2 \le \|z_n(t,\omega)\|_2 + \left\| \int_0^t k(t-\tau,\omega) q(\tau) x_n(\tau,\omega) d\tau \right\|_2 \le$$

$$\gamma \left[\int_0^t |||k(t-\tau,\omega)|||^2 d\tau \right]^{1/2} \left[\int_0^t \| x_n(\tau,\omega) \|_2^2 d\tau \right]^{1/2} + \| z_n(t,\omega) \|_2 \le$$

$$\beta_1 \| x_n(t,\omega) \|_{2,2} + \| z_n(t,\omega) \|_2 \qquad (9)$$

gdzie $\gamma = \max\{|m|,|M|\}$. Przez β_k, k=1,2,.... oznaczamy dalej stałe wynikające z oszacowań nierówności. Ponieważ

$$\left[\| z_n(t,\omega)\|_{2,2}\right]^2 = \int_0^\infty \left[\| z_n(t,\omega)\|_2\right]^2 dt = \int_n^{n+1} \left[\| z_n(t,\omega)\|_2\right]^2 dt \le$$

$$\sup_{n\le t<n+1} \left[\| z_n(t,\omega)\|_2\right]^2 \le \left[\sup_t \| z_n(t,\omega)\|_2\right]^2 \tag{10}$$

Z nierówności (8) i (9) wynika wprost oszacowanie

$$\| x_n(t,\omega)\|_2 \le (\beta_1\beta_2+1)\sup_t \| z_n(t,\omega)\|_2 = \beta_2\zeta_n$$

gdzie $\zeta_n := \sup_t \| z_n(t,\omega)\|_2$.

Pomnóżmy teraz obie strony równania (6) przez (1+t-n). Otrzymamy

$$(1+t-n)x_n(t,\omega) = h_1(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)q(\tau)(1+\tau-n)x_n(\tau,\omega)d\tau \tag{11}$$

gdzie

$$h_1(t,\omega) = (1+t-n)z_n(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)q(\tau)x_n(\tau,\omega)d\tau$$

Pokażemy, że funkcja losowa $h_1(t,\omega)$ należy do $L^{2,2}(R^1_+)$.

$$\| h_1(t,\omega)\|_{2,2} \le 2\| z_n(t,\omega)\|_{2,2} + \left\|\int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)x_n(\tau,\omega)d\tau\right\|_{2,2} \tag{12}$$

Zdefiniujemy operator A_1 jako

$$(A_1x)(t,\omega) := \int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)x(\tau,\omega)d\tau$$

Normę operatora A_1 rozpatrywanego jako odwzorowanie $L^{2,2}(R^1_+)$ w siebie możemy oszacować następująco

$$\| A_1\|_{2,2} \le P\text{-ess}\sup_{\omega\in\underline{\omega}}\ \sup_{\mathrm{Re}\, s\ge 0} |\hat{K}_1(s,\omega)| ,$$

gdzie

$$\hat{K}_1(s,\omega) := \int_0^\infty e^{-st}tk(t,\omega)dt$$

Ponieważ na podstawie założenia (B1)

$$\| A_1\|_{2,2} \le \int_0^\infty |||tk(t,\omega)|||dt < \infty$$

więc nierówność (12) przyjmuje następującą postać

$$\| h_1(t,\omega)\|_{2,2} \le 2\| z_n(t,\omega)\|_{2,2} + \int_0^{\infty} |||tk(t,\omega)|||dt \| x_n(t,\omega)\|_{2,2} \le$$

$$\beta_3 \| z_n(t,\omega)\|_{2,2}$$

Wynika stąd ,że proces stochastyczny $h_1(t,\omega) \in L^{2,2}(R^1_+)$.Ponadto

$$\| h_1(t,\omega)\|_{2,2} \le 2\| z_n(t,\omega)\|_2 + \left\| \int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)q(\tau)x_n(\tau,\omega)d\tau \right\|_2 \le$$

$$2\| z_n(t,\omega)\|_2 + \gamma \int_0^{\infty} |||tk(t,\omega)|||dt \| x_n(t,\omega)\|_{2,2} \le$$

$$\left[2 + \gamma\beta_3 \int_0^{\infty} |||tk(t,\omega)|||dt\right] \sup_t \| z_n(t,\omega)\|_2 = \beta_4 \zeta_n$$

Z powyższych rozważań wynika,że rozwiązanie $(1+t-n)x_n(t,\omega)$ równania (11) należy do przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ i zachodzą następujące nierówności

$$\|(1+t-n)x_n(t,\omega)\|_{2,2} \le \beta \| h_1(t,\omega)\|_{2,2} \le \beta\beta_3\zeta_n$$

$$\|(1+t-n)x_n(t,\omega)\|_2 \le \beta_1 \|(1+t-n)x_n(t,\omega)\|_{2,2} + \| h_1(t,\omega)\|_2 \le \beta_5\zeta_n$$

Pomnóżmy równanie (6) stronami przez $(1+t-n)^2$.Otrzymamy

$$(1+t-n)^2 x_n(t,\omega) = h_2(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)(1+\tau-n)^2 q(\tau)x_n(\tau,\omega)d\tau \quad ,t \in R^1_+ \qquad (13)$$

gdzie

$$h_2(t,\omega) = (1+t-n)^2 z_n(t,\omega) + 2\int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)q(\tau)(1+\tau-n)x_n(\tau,\omega)d\tau +$$

$$\int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)^2 q(\tau)x_n(\tau,\omega)d\tau$$

Pokażemy, że funkcja $h_2(t,\omega)$ należy do przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$.Oznaczmy przez A_2 operator całkowy

$$(A_2 x)(t,\omega) := \int_0^t k(t-\tau,\omega)(t-\tau)^2 x(\tau,\omega)d\tau$$

Norma operatora A_2 w przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ posiada oszacowanie

$$\| A_1\|_{2,2} \le P\text{-ess} \sup_{\omega \in \omega_0} \sup_{Re\, s \ge 0} |\hat{K}_2(s,\omega)|$$

gdzie

$$\hat{K}_2(s,\omega) := \int_0^{\infty} e^{-st} k(t,\omega) t^2 dt$$

Operator A_2 jest ograniczony na podstawie podobnych argumentów jak w przypadku operatora A_1. Pokażemy dalej, że proces stochastyczny $h_2(t,\omega)$ należy do przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ i posiada ograniczony drugi moment

$$\| h_2(t,\omega)\|_{2,2} \leq 4\| z_n(t,\omega)\|_{2,2} + 2\gamma\int_0^\infty |||tk(t,\omega)|||dt\|(1+t-n)x_n(t,\omega)\|_{2,2} +$$

$$\gamma\int_0^\infty |||t^2k(t,\omega)|||dt\| x_n(t,\omega)\|_{2,2} \leq \beta_6\zeta_n$$

$$\| h_2(t,\omega)\|_2 \leq 4\| z_n(t,\omega)\|_2 + 2\gamma\left[\int_0^\infty |||tk(t,\omega)|||^2 dt\right]^{1/2}\|(1+t-n)x_n(t,\omega)\|_{2,2} +$$

$$\gamma\left[\int_0^\infty |||t^2k(t,\omega)|||^2 dt\right]^{1/2}\| x_n(t,\omega)\|_{2,2} \leq \beta_7\zeta_n$$

Rozwiązanie $(1+t-n)^2x_n(t,\omega)$ równania (13) należy do przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ i zachodzą nierówności

$$\| (1+t-n)^2x_n(t,\omega)\|_{2,2} \leq \beta\| h_2(t,\omega)\|_{2,2} \leq \beta\beta_6 \sup_{n\leq t<n+1} \| z_n(t,\omega)\|_2$$

$$\| (1+t-n)^2x_n(t,\omega)\|_2 \leq \alpha \sup_{n\leq t<n+1} \| z_n(t,\omega)\|_2$$

Z ostatniej nierówności wynika teza lematu.∎

LEMAT 2. Niech spełnione będą założenia lematu 1. Dla każdego równania postaci (6) i dla każdej funkcji $z(t,\omega)$ należącej do przestrzeni $C/N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ rozwiązanie $x(t,\omega)$ równania (6) spełnia nierówności:

$$\| x(t,\omega)\|_2 \leq 2\alpha \sup_{\tau\leq t} \| z(\tau,\omega)\|_2$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| x(t,\omega)\|_2 \leq 2\alpha \overline{\lim_{t\to\infty}} \| z(t,\omega)\|_2$$

gdzie α jest stałą wprowadzoną w lemacie 1.

Dowód. Funkcję $z(t,\omega)$ możemy przedstawić w postaci sumy

$$z(t,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} z_n(t,\omega) \qquad ,\text{gdzie} \qquad z_n(t,\omega)=\begin{cases} z(t,\omega) & ,t\in [n,n+1[\\ 0 & ,t\notin [n,n+1[\end{cases}$$

Równanie (6) jest liniowe, więc jego rozwiązanie jest sumą rozwiązań $x_n(t,\omega)$ odpowiadających funkcjom $z_n(t,\omega)$. Ponadto $x_n(t,\omega)=0$ mod(p) dla $t<n$.

Zatem

$$x(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t,\omega) = \sum_{n=0}^{n\leq t} x_n(t,\omega)$$

Z lematu 1 wynika oszacowanie

$$\| x(t,\omega)\|_2 \le \sum_{n=0}^{n\le t} \| x_n(t,\omega)\|_2 \le \alpha \sum_{n=0}^{n\le t} \frac{1}{(1+t-n)^2} \sup_{\tau} \| z_n(\tau,\omega)\|_2 \qquad (14)$$

Skorzystajmy z nierówności:

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(1+t-n)^2} \le \int_{t-m}^{1+t} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2} \le \frac{1}{1+t-m} \quad , \qquad \text{dla } t\ge m\ge 0$$

$$\sum_{n=m}^{n\le t} \frac{1}{(1+t-n)^2} \le 1 + \int_0^{t-m} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2} \le 2$$

Sumę (14) rozbijemy na dwa składniki: dla $0\le n\le m-1$ i dla $m\le n\le t$. Otrzymamy

$$\| x(t,\omega)\|_2 \le \alpha \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\sup_{\tau} \| z_n(\tau,\omega)\|_2}{(1+t-n)^2} + \sum_{n=m}^{t} \frac{\sup_{\tau} \| z_n(\tau,\omega)\|_2}{(1+t-n)^2} \right] \le$$

$$\alpha \left[\frac{\sup_{\tau<m} \| z_n(\tau,\omega)\|_2}{1+t-m} + 2 \sup_{m\le\tau\le t} \| z_n(\tau,\omega)\|_2 \right] \qquad (15)$$

Z ostatniej nierówności wynika następujące oszacowanie

$$\| x(t,\omega)\|_2 \le 2\alpha \sup_{0\le\tau\le t} \| z(\tau,\omega)\|_2$$

które implikuje nierówność

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| x(t,\omega)\|_2 \le 2\alpha \overline{\lim_{t\to\infty}} \| z(t,\omega)\|_2$$

Z nierówności (15) wynika ponadto, że $\lim_{t\to\infty} \| x(t,\omega)\|_2 = 0$, jeżeli $\lim_{t\to\infty} \| z(t,\omega)\|_2 = 0$.∎

Dowód twierdzenia. Niech $x_1(t,\omega), x_2(t,\omega)$ będą rozwiązaniami równania (1) odpowiednio dla funkcji $z_1(t,\omega), z_2(t,\omega)$. Przez $q_{12}(t,\omega)$ oznaczymy funkcję następującą

$$q_{12}(t,\omega) = \frac{f(t,x_1(t,\omega),\omega) - f(t,x_2(t,\omega),\omega)}{x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)}$$

wówczas

$$x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega) = z_1(t,\omega) - z_2(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega) q_{12}(\tau,\omega) \left[x_1(\tau,\omega) - x_2(\tau,\omega) \right] d\tau$$

Zgodnie z założeniem (B2) zachodzi nierówność

$$m \le q_{12}(t,\omega) \le M \quad \mathrm{mod}(P) \quad ,\text{dla dowolnych } x_1(t,\omega), x_2(t,\omega)$$

Dla dowolnych $z_1(t,\omega), z_2(t,\omega)$ utworzyć możemy równanie

$$\varepsilon(t,\omega)=\eta(t,\omega)+\int_0^t k(t-\tau,\omega)q_{12}(\tau,\omega)\varepsilon(\tau,\omega)d\tau \qquad (16)$$

takie, że jeśli $\eta(t,\omega)=z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega)$, to rozwiązaniem równania (16) jest $\varepsilon(t,\omega)=x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)$.

Na podstawie lematu 2 prawdziwe są nierówności:

$$\|\varepsilon(t,\omega)\|_2\le 2\alpha \sup_{\tau\le t}\|\eta(\tau,\omega)\|_2$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\varepsilon(t,\omega)\|_2\le 2\alpha\, \overline{\lim_{t\to\infty}}\|\eta(y,\omega)\|_2$$

a w szczególności otrzymujemy

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)\|_2\le 2\alpha\, \overline{\lim_{t\to\infty}}\|z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega)\|_2$$

$$\|x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)\|_2\le 2\alpha \sup_{\tau\le t}\|z_1(\tau,\omega)-z_2(\tau,\omega)\|_2 . \qquad \blacksquare$$

UWAGA. Dla stochastycznego równania całkowego postaci

$$x(t,\omega)=z(t,\omega)+\int_{-\infty}^t k(t-\tau,\omega)f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau \qquad ,t\in R^1$$

można udowodnić analogiczny do twierdzenia 1 wynik, przeprowadzając rozważania w przestrzeni $C/N(R^1;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$.

4. WŁASNOŚCI ASYMPTOTYCZNE

Zajmiemy się teraz relacją pomiędzy rozwiązaniami równań całkowych

$$x_1(t,\omega)=z_1(t,\omega)+\int_0^t k(t-\tau,\omega)f(\tau,x_1(\tau,\omega),\omega)d\tau \qquad ,t\in R^1_+ \qquad (17)$$

$$x_2(t,\omega)=z_2(t,\omega)+\int_{-\infty}^t k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \qquad ,t\in R^1 \qquad (18)$$

W twierdzeniu 2 podane zostaną warunki, po spełnieniu których rozwiązanie $x_1(t,\omega)$ równania (17) należące do przestrzeni $C/N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ jest zbieżne do rozwiązania $x_2(t,\omega)$ równania (18).

TWIERDZENIE 2. Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 1. Niech dodatkowo

(D1) $z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega)\in C/N(R^1_+;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ oraz $\lim_{t\to\infty}\|z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega)\|_2=0$

(D2) dla dowolnej funkcji $x_2(t,\omega) \in C/N(R_+^1;L^2(\underline{\omega},\beta,P))$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \in C/N(R_+^1;L^2(\underline{\omega},\beta,P)) \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \right\|_2 = 0 .$$

Przy spełnionych powyższych założeniach zachodzi

$$\lim_{t\to\infty} \| x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega) \|_2 = 0$$

Dowód. Odejmując od siebie równania (17) i (18) otrzymujemy

$$x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega) = z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)\left[f(\tau,x_1(\tau,\omega),\omega)-\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)\right]d\tau - \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \tag{19}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$h(t,\omega) := z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega) - \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau$$

$$q_{12}(t,\omega) := \frac{f(t,x_1(t,\omega),\omega)-f(t,x_2(t,\omega),\omega)}{x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)}$$

Wtedy równanie (19) przyjmie następującą postać

$$x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega) = h(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)q_{12}(\tau,\omega)\left[x_1(\tau,\omega)-x_2(\tau,\omega)\right]d\tau$$

Z założenia (B2) wynika, że $m \le q_{12} \le M$ mod(P). Rozpatrzmy równanie

$$\varepsilon(t,\omega) = \eta(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau,\omega)q_{12}(\tau,\omega)\varepsilon(\tau,\omega)d\tau \tag{20}$$

takie, że jeżeli $\eta(t,\omega)=h(t,\omega)$, to rozwiązaniem tego równania jest $\varepsilon(t,\omega)=x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)$. Na podstawie twierdzenia 1 istnieje stała α taka, że

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega) \|_2 \le 2\alpha \overline{\lim_{t\to\infty}} \| h(t,\omega) \|_2 \tag{21}$$

Zauważmy, że

$$\| h(t,\omega) \|_2 \le \| z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega) \|_2 + \left\| \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)\tilde{f}(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \right\|_2 \tag{22}$$

Zatem teza twierdzenia wynika z założeń (D1-D2) i nierówności (21-22).∎

Warto także porównać rozwiązania równań (17) i (18) w przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$. Załóżmy, że spełnione są warunki (B1-B3). Niech ponadto zachodzi

(E1) $z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega) \in L^{2,2}(R^1_+)$;

(E2) $\int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \in L^{2,2}(R^1_+)$.

Postępując analogicznie do dowodu twierdzenia 2 otrzymujemy

$$\varepsilon(t,\omega)=h(t,\omega)+\int_0^t k(t-\tau,\omega)\Big[f(\tau,x_1(\tau,\omega),\omega)-f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)\Big]d\tau \qquad (23)$$

gdzie

$$\varepsilon(t,\omega)=x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)$$

$$h(t,\omega)=z_1(t,\omega)-z_2(t,\omega)-\int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau$$

Odejmijmy od obu stron równania (23) wyrażenie $\lambda\int_0^t k(t-\tau,\omega)\varepsilon(\tau,\omega)d\tau$.

$$\varepsilon(t,\omega)-\int_0^t k(t-\tau,\omega)\varepsilon(\tau,\omega)d\tau = h(t,\omega)+$$

$$\int_0^t k(t-\tau,\omega)\Big[f(\tau,x_1(\tau,\omega),\omega)-f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)-\lambda\varepsilon(\tau,\omega)\Big]d\tau \qquad (24)$$

Równanie (24) zapiszemy w postaci operatorowej

$$\varepsilon-\lambda A\varepsilon = h+A\Big[f(x_1)-f(x_2)-\lambda\varepsilon\Big] \qquad (25)$$

gdzie

$$(Ax)(t,\omega) = \int_0^t k(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau$$

Niech $\lambda=(M+m)/2$. Z założenia (B3) wynika, że istnieje operator odwrotny $(I-\lambda A)^{-1}$. Z równania (25) otrzymujemy

$$\varepsilon = (I-\lambda A)^{-1}h + (I-\lambda A)^{-1}A\Big[f(x_1)-f(x_2)-\lambda\varepsilon\Big] \qquad (26)$$

Zatem zachodzi

$$\|\varepsilon(t,\omega)\|_{2,2} \le \|(I-\lambda A)^{-1}\|_{2,2}\|h(t,\omega)\|_{2,2}+$$

$$\|(I-\lambda A)^{-1}A\|_{2,2}\|f(x_1)-f(x_2)-\lambda\varepsilon\|_{2,2} \qquad (27)$$

Z warunku (B2) wynika, że

$$\|f(x_1)-f(x_2)-\lambda(x_1-x_2)\|_{2,2} \le r\|x_1-x_2\|_{2,2} \quad ,\text{gdzie } r=(M-m)/2$$

Z nierówności (18) wynika

$$\| x_1(t,\omega)-x_2(t,\omega)\|_{2,2} \le \frac{\|(I-\lambda A)^{-1}\|_{2,2}}{1-r\|(I-\lambda A)^{-1}A\|_{2,2}} \|h(t,\omega)\|_{2,2} \qquad (28)$$

Powyższe rozważania możemy sformułować w postaci następującego wniosku:

WNIOSEK 1. Jeśli spełnione są założenia (B1-B3) oraz (E1-E2), to "odległość" rozwiązań $x_1(t,\omega)$ i $x_2(t,\omega)$ równań (17) i (18) w przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ można oszacować za pomocą nierówności (28).

UWAGA. Całka $\int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau \longrightarrow 0$ przy $t\longrightarrow\infty$ (w sensie średniokwadratowym), jeśli np.:

a) $k\in L^2(R^1_-;L^2(\Omega,\beta,P))$, $f(x_2)\in L^{2,2}(R^1_-)$ dla dowolnej funkcji $x\in L^{2,2}(R^1_-)$ lub

b) $k\in L^1(R^1_-;L^2(\Omega,\beta,P))$, $E\{|f(x_2)|^2\}$ jest funkcją ograniczoną dla $t\in R^1_-$.

W wielu przypadkach sygnał wejściowy $z(t,\omega)$ w układach dynamicznych opisanych równaniem (1) można przedstawić jako sumę $z_1(t,\omega)$ i $z_2(t,\omega)$ takich, że $z_1(t,\omega)$ jest procesem stacjonarnym drugiego rzędu, natomiast $z_2(t,\omega)\in L^{2,2}(R^1_+)$, $z_2(t,\omega)=0$ dla $t<0$ oraz $\| z_2(t,\omega)\|_2 \longrightarrow 0$ przy $t\longrightarrow\infty$. Interesujące jest wtedy rozstrzygnięcie problemu, czy odpowiedź $x(t,\omega)$ układu opisanego równaniem (1) zbiega (dla $t\longrightarrow\infty$) do odpowiedzi $\hat{x}(t,\omega)$ układu w stanie ustalonym.

TWIERDZENIE 3. Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany stochastycznym równaniem całkowym postaci

$$x(t,\omega)=z_1(t,\omega)+z_2(t,\omega)+\int_0^t k(t-\tau,\omega)f(x(\tau,\omega))d\tau \quad , t\in R^1_+ \qquad (29)$$

gdzie $z_1(t,\omega)$ jest procesem stacjonarnym 2 rzędu, określonym dla $t\in R^1$, $z_2(t,\omega)\in L^{2,2}(R^1_+)$, $z_2(t,\omega)=0$ dla $t<0$, $\| z_2(t,\omega)\|_2 \longrightarrow 0$ przy $t\longrightarrow\infty$.

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 1, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\hat{x}(t,\omega)$ następującego równania

$$\hat{x}(t,\omega)=z_1(t,\omega)+\int_{-\infty}^{t} k(t-\tau,\omega)f(\hat{x}(\tau,\omega))d\tau \quad , t\in R^1 \qquad (30)$$

Odpowiedź $\hat{x}(t,\omega)$ układu opisanego równaniem (21) jest procesem 2 rzędu, stacjonarnym w szerszym sensie. Ponadto różnica $x(t,\omega)-\hat{x}(t,\omega)$ jest elementem przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$ i zachodzi

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t,\omega)-\hat{x}(t,\omega)\|_2 = 0$$

Dowód. Rozwiązanie równania (30) istnieje i jest procesem stacjonarnym, ciągłym i ograniczonym w sensie średniokwadratowym [6].

Pokażemy, że $\int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\hat{x}(\tau,\omega))d\tau$ jest elementem przestrzeni $L^{2,2}(R^1_+)$.

Łatwo sprawdzić ciąg następujących nierówności

$$\int_0^\infty \left\| \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\hat{x}(\tau,\omega))d\tau \right\|_2^2 dt = \int_0^\infty \left\| \int_t^\infty k(\tau,\omega)f(\hat{x}(t-\tau,\omega))d\tau \right\|_2^2 dt \le$$

$$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \left|\left|\left| k(\tau,\omega)(1+\tau)^2 \right|\right|\right| \frac{\| f(\hat{x}(t-\tau,\omega))\|_2}{(1+\tau)^2} d\tau \right]^2 dt \le$$

$$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \left|\left|\left| k(\tau,\omega) \right|\right|\right|^2 (1+\tau)^4 d\tau \int_t^\infty \frac{\| f(\hat{x})\|_2^2}{(1+\tau)^4} d\tau \right] dt \tag{31}$$

Ponieważ

$$\sup_{t\in R^1} \| f(\hat{x}(t,\omega))\|_2 \le \gamma \sup_{t\in R^1} \| \hat{x}(t,\omega)\|_2 < \infty$$

na mocy warunku (B2) i ponadto z założenia (B1) wynika, że $(1+\tau)^2 k(\tau,\omega)$ należy do przestrzeni $L^1(R^1_+;L^\infty(\underline{\omega},\beta,P))\cap L^2(R^1_+;L^\infty(\underline{\omega},\beta,P))$, więc z nierówności (31) wnioskujemy, że

$$\int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^{0} k(t-\tau,\omega)f(\hat{x}(\tau,\omega))d\tau \right|^2 dt \le \alpha_1 \int_0^\infty \int_t^\infty \frac{1}{(1+\tau)^4} d\tau dt = \frac{1}{6}\alpha_1 \tag{32}$$

Założenia wniosku 1 są spełnione. Teza twierdzenia wynika natychmiast z wniosku 1 i uwagi do wniosku .■

PRZYKŁAD. Weźmy pod uwagę układ mechaniczny będący nieliniowym oscylatorem, poddany zakłóceniom stochastycznym, opisany losowym równaniem różniczkwym

$$\frac{d^2x(t,\omega)}{dt^2} + 2\eta\frac{dx(t,\omega)}{dt} + f(x(t,\omega)) = h(t,\omega) \quad ,t\in R^1_+ \tag{33}$$

z warunkami początkowymi $x(0,\omega)=x_0$, $\frac{dx}{dt}(0,\omega)=\dot{x}_0$. Załóżmy, że $\eta>0$, $h(t,\omega)$ jest stacjonarnym w silnym sensie procesem stochastycznym 2 rzędu. Ponadto niech dla funkcji $f(x), x\in R^1$ spełniona jest hipoteza (A2) ze stałymi $\tilde{m}$ i $\tilde{M}$.

Równanie (33) jest równoważne równaniu całkowemu typu Volterry II rodzaju, które zapiszemy w postaci następującej

$$x(t,\omega)=z(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau)g(x(\tau,\omega))d\tau \quad ,t\in R^1_+ \tag{34}$$

gdzie

$$z(t,\omega)=x_0\left[2\eta k(t) + \frac{dk(t)}{dt}\right] + \dot{x}_0 k(t) + \int_0^t k(t-\tau)h(\tau,\omega)d\tau$$

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\eta^2}} e^{-\eta t} \sin\left[\sqrt{\alpha^2-\eta^2}\, t\right] & \text{dla } \alpha > \eta \\ te^{-\eta t} & \text{dla } \alpha = \eta \\ \frac{1}{\sqrt{\eta^2-\alpha^2}} e^{-\eta t} \sin\left[\sqrt{\eta^2-\alpha^2}\, t\right] & \text{dla } \alpha < \eta \end{cases} \tag{35}$$

oraz

$g(x)=\alpha x-f(x)$,$x\in R^1$, $\alpha=(\tilde{M}+\tilde{m})/2$.

Łatwo zauważyć ,że warunek $\eta>0$ jest konieczny i wystarczający dla zapewnienia,aby $k(t)$,$tk(t)$, $t^2k(t) \in L^1(R^1_+)$.

Rozwiązanie równania (34) jest procesem stochastycznym niestacjonarnym określonym dla $t\in R^1_+$. Własności rozwiązania równania (34) porównamy z zachowaniem się rozwiązania równania całkowego

$$y(t,\omega) = \tilde{z}(t,\omega)+\int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)g(y(\tau,\omega))d\tau \quad ,t\in R^1 \tag{36}$$

gdzie $\tilde{z}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)h(\tau,\omega)d\tau$,które opisuje ten sam oscylator harmoniczny z zerowymi warunkami początkowymi, na który działa siła wymuszająca będąca stacjonarnym procesem stochastycznym 2 rzędu.

Z technicznego punktu widzenia rozpatrywany model odpowiada sytuacji,w której w układzie dynamicznym trwa pewien "stan ustalony".Można wykazać,że stan ten jest opisany stacjonarnym procesem stochastycznym 2 rzędu [6]. W rozpatrywanym układzie w chwili $t=0$ pojawia się zakłócenie spowodowane pojawieniem się niezerowych warunków początkowych.Proces stochastyczny, który opisuje "odpowiedź" układu już nie jest, naturalnie, procesem stacjonarnym.

TWIERDZENIE 4.Przypuśćmy,że dla funkcji nieliniowej $f(.)$ spełnione jest założenie (B2) ze stałymi $\tilde{m}$ i $\tilde{M}$.Niech $x(t,\omega)$ będzie rzeczywistym procesem stochastycznym ,który jest rozwiązaniem równania różniczkowego (33) prawie wszędzie ze względu na t i ω.Niech $h(t,\omega)$,$t\in R^1$ będzie stacjonarnym,ciągłym procesem stochastycznym 2 rzędu.Jeżeli $\eta>0$,$\tilde{m}>0$ oraz $2\eta > \sqrt{\tilde{M}} - \sqrt{\tilde{m}}$, wówczas rozwiązanie $x(t,\omega)$ równania (34) jest ciągłym w sensie średnim procesem stochastycznym 2 rzędu oraz

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t,\omega)-y(t,\omega)\|_2 = 0$$

gdzie $y(t,\omega)$ jest stacjonarnym,ciągłym procesem stochastycznym ,który jest rozwiązaniem równania (36) dla $t\in R^1$,z zerowymi warunkami początkowymi.

DOWÓD. Większość założeń twierdzenia 3 jest łatwa do weryfikacji. Należy tylko sprawdzić warunek (B3). W tym celu zauważmy, że jeżeli funkcja $f(.)$ spełnia warunek (B2) ze stałymi $\tilde{m}$ i $\tilde{M}$, to funkcja $g(x)=\alpha x-f(x)$ spełnia ten warunek ze stałymi

$$m = -\frac{\tilde{M}-\tilde{m}}{2} \qquad M = \frac{\tilde{M}-\tilde{m}}{2}$$

Ponieważ $\hat{K}(s)=\left[s^2+2\eta s+\alpha\right]^{-1}$, więc warunek (B3) przyjmuje postać następującą

$$\inf_{\mathrm{Re}\, s\geq 0}\left|s^2+2\eta s-\frac{\tilde{M}+\tilde{m}}{2}\right| > \frac{\tilde{M}-\tilde{m}}{2}$$

lub równoważną

$$\inf_{w\in R^1}\left|-w^2+i2\eta w+\frac{\tilde{M}+\tilde{m}}{2}\right| > \frac{\tilde{M}-\tilde{m}}{2} \tag{37}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby relacja (37) była spełniona, jest spełnienie następujących nierówności

$$\tilde{m} > 0 \quad \text{oraz} \quad 2\eta > \sqrt{\tilde{M}} - \sqrt{\tilde{m}}$$

Teza twierdzenia pozostaje w tej sytuacji prostym wnioskiem z twierdzenia 3.■

LITERATURA

[1] Bensoussan A., Filtrage Optimal des Systemes Lineaires, Dunod Paris 1971.

[2] Bharucha-Reid A.T., Random Integral Equations, Academic Press, New York and London 1972.

[3] Dunford I., Schwartz J.T., Linear Operators, Part I, Interscience Publ. New York, London 1958.

[4] Gichman I.I., Skorochod A.W., Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[5] Gihman I.I., Skorohod A.V., The Theory of Stochastic Processes I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[6] Holtzman J.M., Analysis of Statistical Linearization of Nonlinear Control Systems, SIAM J.Control, Vol.6, N.2, 1968.

[7] Kantorovitsch L.W., Akilov G.P., Functional Analysis, Izd.Nauka, Moskwa 1977.

[8] Kudrewicz J., Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.

[9] Sandberg I.W., On the L-Boundedness of Solutions of Nonlinear Functional Equations ,BSTJ,Vol.43,July 1964,1581-1599.

[10] Sandberg I.W.,Benes V.E., On the Properties of Nonlinear Integral Equations that Arise in the Theory of Dynamical Systems , BSTJ, Vol.43,Nov.1964,2839-2853.

[11] Skrzypczyk J., Stabilność układów dynamicznych opisanych losowymi równaniami całkowymi ,Dysertacja doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1975.

[12] Skrzypczyk J., L_m-stabilność w sensie średnim nieliniowego stochastycznego równania całkowego , Zesz.Nauk.Polit.Śl., ser.Automatyka, z.28,Gliwice 1974,5-24.

[13] Skrzypczyk J., Stabilność rozwiązań nieliniowego stochastycznego równania całkowego w przestrzeniach Banacha , Zesz.Nauk.Pol.Śl., ser.Automatyka,z.28,Gliwice 1974,25-36.

[14] Skrzypczyk J. , Statistical Linearization of Nonlinear Dynamic Systems Described by Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups , Conf.Nonlinear and Random Vibrations,Oberwolfach September 1986.

[15] Tsokos Ch.P.,Padgett W.J., Random Integral Equations with Applications to Stochastic Systems ,Springer-Verlag,Berlin e.a. 1971.

[16] Tsokos CH.P.,Padgett W.J., Random Integral Equations with Applications to Life Sciences and Engineering , Academic Press,New York,London 1974.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski

Асимптотические свойства нестационарных динамических систем

Резюме

В работе рассмотрены некоторые результаты из теории динамических систем описанных стохастическими интегральными уравнениями типа Вольтерры второго рода. Для динамических систем с линейной автономной частью и некоторым нелинейным элементом, с ограниченной нелинейностью ,мы доказываем что при соответствующих предположениях, ответ системы на стационарный входный сигнал приложенный в моменте t=0 является вполне асимптотически стационарным и не зависит от начальных условий.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF NONSTATIONARY DYNAMIC SYSTEMS

Abstract

This paper reports on some results concerning the properties of stochastic Volterra integral equations of the II-kind. In particular, for dynamic systems containing linear time-invariant part and an arbitrary positive-slope nonlinearity, it is proved, under reasonable conditions that the response to a stationary stochastic excitation applied at t=0 is ultimately stationary with the same stationary character as the excitation, regardless of the initial state of the system.