

Henryk GLINSKI

## NUMERYCZNE WYZNACZANIE OBRAZÓW PERSPEKTYWICZNYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono komputerowy algorytm wyznaczania obrazów perspektywicznych (rzutu środkowego) brył wielościennej. Podano sposób określania położenia punktu obserwacji i kierunku obserwacji, zbliżony do fotografowania. Wyprowadzono odpowiednie wzory na obliczanie perspektywy.

### 1. Uwagi wstępne

Jednym z zagadnień często rozwiązywanych przy wykorzystaniu mikrokomputerów jest wyznaczanie obrazów perspektywicznych (rzutu środkowego) obiektów trójwymiarowych. Problem ten jest dość szeroko omawiany w literaturze. Ze względu na sposób przedstawienia przekształceń perspektywicznych prace te można ogólnie podzielić na dwie grupy:

- 1) prace zawierające wyprowadzenie wzorów na rzut środkowy z dowolnego punktu przestrzeni na tło pionowe lub nachylone ([1],[6],[7]);
- 2) opracowania, w których podano wzory w układzie współrzędnych ekranu, opisany w odrębnym układzie obiekt jest transformowany do układu współrzędnych ekranu poprzez obrót, przesunięcie i skalowanie ([2],[3],[4]).k

Autor artykułu w latach 1985-87 opracował inną koncepcję wyznaczania obrazów perspektywicznych, na podstawie której powstał program komputerowy *pers* ([5], wspólnie z A.Żabą). Istotne elementy proponowanej koncepcji, to:

- rezygnacja z używania w sposób jawny płaszczyzny tła, obraz perspektywiczny jest określony jednoznacznie przez podanie współrzędnych punktu i kierunku obserwacji oraz kąta widzenia;
- obiekt i położenie punktu obserwacji opisane są w tym samym układzie współrzędnych sztywno związanych z obiektem. Obserwator porusza się wokół nieruchomego obiektu;
- wszystkie obliczenia prowadzone są w tej samej jednostce, przejście do układu współrzędnych ekranu następuje po obliczeniu perspektywy;
- przy wyprowadzaniu wzorów nie wykorzystywano zwięzłej w zapisie (ale trudnej w interpretacji) postaci macierzowej przekształceń, znacznie wydłużającej czas obliczeń.

## 2. Określenie położenia punktu obserwacji i kierunku obserwacji

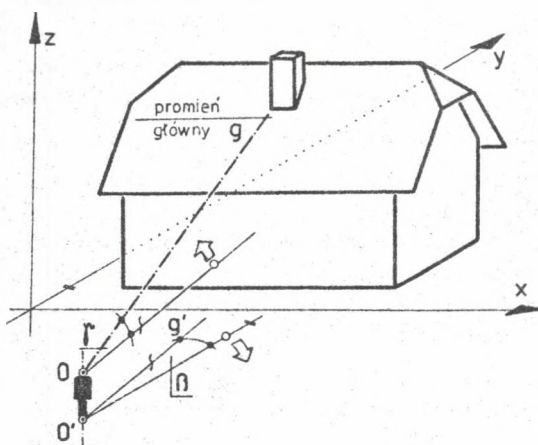
Najszybszą i najbardziej rozpowszechnioną metodą wyznaczania obrazów perspektywicznych istniejącego obiektu jest wykonanie zdjęcia fotograficznego. Jeżeli nie ma przeszkód terenowych, to zdjęcie fotograficzne można wykonać z dowolnie położonego punktu obserwacji i w dowolnym kierunku. Dodatkowo, jeśli aparat wyposażony jest w obiektyw o zmiennej ogniskowej, to na fotografiamie można ująć dowolnie wybrany fragment obiektu (zmienny jest kąt widzenia).

Warto zwrócić uwagę, że w fotografii nie występuje jawnie pojęcie płaszczyzny tłowej, znajomość jej położenia jest dla fotografującego zbyteczna. Ze względu na prostotę i naturalność sposobu kształtowania obrazu perspektywicznego w fotografii wydaje się celowe, aby proces wyboru perspektywy w programie komputerowym był zbliżony do fotografowania.

Wybermy dowolny obiekt i wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich  $xyz$  tak, aby obiekt znajdował się w dodatniej części układu współrzędnych, a płaszczyzna  $xz$  układu była równoległa do głównej, najbardziej charakterystycznej płaszczyzny obiektu (o ile taką płaszczyznę można w obiekcie wyróżnić). Jednostka układu współrzędnych może być dowolna, wskazane jest dostosowanie jej do wymiarów obiektu.

Położenie punktu obserwacji  $O$  będziemy określać przez podanie jego współrzędnych  $x_0, y_0$  i  $z_0$  (rys.1) w przyjętym układzie współrzędnych. Kierunek obserwacji, tj. położenie promienia głównego  $g$ , wyznaczony jest jednoznacznie przez podanie:

- kąta  $\beta$  między rzutem poziomym  $g'$  promienia głównego na płaszczyznę  $xy$  i dodatnią częścią osi  $y$ ;
- kąta  $\gamma$  między promieniem głównym i płaszczyzną  $xy$ .



Rys. 1

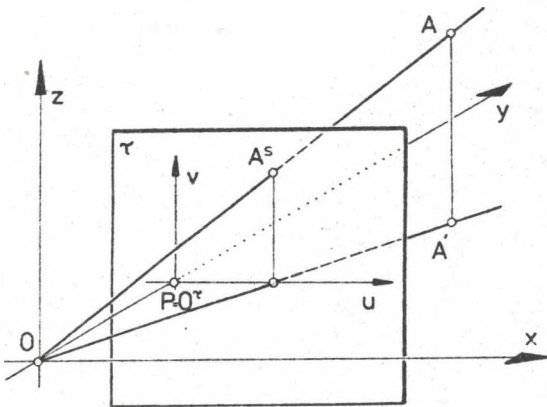
Określanie położenia promienia głównego względem dodatniej części osi  $y$ , wbrew powszechnie przyjętemu w matematyce mierzeniu kątów od dodatniej części osi  $x$ , jest wygodniejsze w praktyce, ułatwia orientację w przestrzeni.

W pełni naturalne jest przyjęcie pozycji obserwatora stojącego przed płaszczyzną czołową obiektu (płaszczyzną  $xz$ ) i patrzącego prostopadłe do niej jako pozycji wyjściowej, dla której  $\beta=0$  i  $\gamma=0$ . Kąty mierzone na prawo od dodatniej części osi  $y$  i w górę względem płaszczyzny  $xy$  przyjęto jako dodatnie.

**3. Wyprowadzenie wzorów analitycznych na perspektywę**

Najprostszą postać wzorów określających rzut środkowy (perspektywę) można otrzymać przyjmując punkt obserwacji  $O$  w początku układu współrzędnych (rys. 2) i prowadząc płaszczyznę tła  $\tau$  prostopadłe do osi  $y$  przez punkt  $P(0,1,0) = O^T$ . Wprowadźmy w płaszczyźnie tła układ współrzędnych  $uv$  o początku w punkcie  $O^T$ , osie  $u$  i  $x$  są równoległe. Dla dowolnego punktu  $A(x,y,z)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{y}, \\ v &= \frac{z}{y}, \text{ gdzie } y > 0. \end{aligned} \tag{1}$$



Rys. 2

Przesuńmy układ współrzędnych  $xyz$  do punktu  $O(x_0, y_0, z_0)$  i obróćmy go wokół osi  $z$  o kąt  $\beta$ . Obliczmy współrzędne punktów obiektu w nowym układzie  $x'y'z'$ :

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\sin\beta, \\ y' &= (x - x_0)\sin\beta + (y - y_0)\cos\beta, \\ z' &= z - z_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Obróćmy układ  $x'y'z'$  wokół osi  $x'$  o kąt  $\gamma$ , otrzymując po obrocie

$$\begin{aligned}x'' &= x', \\y'' &= y' \cos \gamma + z' \sin \gamma, \\z'' &= -y' \sin \gamma + z' \cos \gamma.\end{aligned}\quad (3)$$

Łącząc przekształcenia (2) i (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}x'' &= x \cos \beta - y \sin \beta + x_0', \\y'' &= (x \sin \beta + y \cos \beta + y_0') \cos \gamma + (z - z_0) \sin \gamma, \\z'' &= -(x \sin \beta + y \cos \beta + y_0') \sin \gamma + (z - z_0) \cos \gamma.\end{aligned}\quad (4)$$

gdzie 
$$\begin{aligned}x_0' &= -x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta, \\y_0' &= -x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta.\end{aligned}$$

Przekształćmy równania (4) do postaci

$$\begin{aligned}x'' &= x \cos \beta - y \sin \beta + x_0', \\y'' &= x \sin \beta \cos \gamma + y \cos \beta \cos \gamma + z \sin \gamma + \\&\quad + y_0' \cos \gamma - z_0 \sin \gamma, \\z'' &= -x \sin \beta \sin \gamma - y \cos \beta \sin \gamma + z \cos \gamma - \\&\quad - y_0' \sin \gamma - z_0 \cos \gamma.\end{aligned}\quad (5)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \beta, & a_{12} &= -\sin \beta, & a_{14} &= x_0', \\a_{21} &= \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, & a_{23} &= \sin \gamma, \\& & & & a_{24} &= y_0' \cos \gamma - z_0 \sin \gamma, \\a_{31} &= -\sin \beta \sin \gamma, & a_{32} &= -\cos \beta \sin \gamma, & a_{33} &= \cos \gamma, \\& & & & a_{34} &= -y_0' \sin \gamma - z_0 \cos \gamma.\end{aligned}\quad (6)$$

Uwzględniając oznaczenia (6) oraz równania (1) otrzymujemy ostatecznie wzory na współrzędne obrazu perspektywicznego

$$\begin{aligned}u &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{14}}{\rho}, \\v &= \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{\rho},\end{aligned}\quad (7)$$

gdzie  $\rho = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}$ ,  $\rho > 0$ .

Obraz perspektywiczny wyznaczony w płaszczyźnie tła  $\tau$  będzie widoczny pod takim samym kątem, jak i oryginał, jeśli będzie oglądany z odległości jednej jednostki wykorzystywanego układu współrzędnych.

#### 4. Wyświetlenie obrazu perspektywicznego na ekranie monitora

Załóżmy, że wyznaczony obraz perspektywiczny jest wyświetlony na ekranie monitora o poziomym boku długości  $a$ , o poziomej rozdzielczości  $M$  punktów. Obserwator znajduje się w odległości  $d$  od ekranu. Wprowadźmy układ współrzędnych ekranu  $x_p y_p$  o początku w lewym dolnym rogu ekranu. Niech  $x_p$  i  $y_p$  będą współrzędnymi punktu głównego  $O^I$  w przyjętym

układzie współrzędnych. Jednostką układu  $x_p, y_p$  jest jeden punkt. W układzie  $x_o, y_o$  otrzymamy

$$\begin{aligned}x_o &= x_p + su, \\y_o &= y_p + sv,\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie  $u$  i  $v$  są obliczone według wzorów (7).

Wartość współczynnika  $s$  we wzorach (8) obliczamy w zależności od sposobu obserwacji monitora:

- a) obserwacja związana z odległości  $d$  od ekranu

$$s = \frac{d}{a} M,$$

$$\text{kąt widzenia obrazu } \phi = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{2d};$$

- b) obserwacja swobodna, kąt widzenia obiektu  $\psi$

$$s = \frac{M}{2 \operatorname{tg} \psi/2}.$$

odległość dla obserwacji związanej

$$d = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \psi/2}.$$

- c) wyświetlony na ekranie obraz odpowiada zdjęciu fotograficznemu wykonanemu małoobrazkowym aparatem fotograficznym z obiektywem o ogniskowej  $f$  [mm]

$$s = \frac{f}{36} M.$$

odległość dla obserwacji związanej

$$d = \frac{af}{36}.$$

Odległości we wzorach a, b i c wyrażone są w jednostce układu współrzędnych  $xyz$ , w którym wprowadzono obiekt.

Procedura wyznaczania obrazu perspektywicznego bryły wielościennej składającej się z  $N$  odcinków  $A_i B_i$  rozpoczyna się od obliczenia współczynników ze wzorów (6). Następnie kolejno oblicza się perspektywy punktów obiektu łącząc je odcinkami. Jeżeli dla pewnego punktu zachodzi we wzorze (7)  $\rho < 0$ , to punkt ten leży poza płaszczyzną zniknięcia  $\zeta$  (dla  $\rho = 0$  leży w płaszczyźnie zniknięcia). Perspektywą punktu leżącego w płaszczyźnie zniknięcia jest punkt niewłaściwy, do jego wyznaczenia potrzebna jest odrębna procedura. W praktyce wygodniejsze jest wprowadzenie zastępczej płaszczyzny zniknięcia  $\zeta'$ , równoległej do płaszczyzny  $\zeta$  i oddalonej od niej o  $\epsilon$ ,  $\epsilon \approx 0.0001$  m. Wyznaczenie perspektywy odcinka  $A_i B_i$ , którego jeden z końców leży poza płaszczyzną zniknięcia, polega na wyznaczeniu punktu przecięcia tego odcinka płaszczyzną  $\zeta'$  i obliczenia perspektywy części odcinka leżącej przed płaszczyzną zniknięcia.

## 5. Literatura

- [1] Macková B., Zatková V.: Riešenie základných úloh z deskriptívnej geometrie pomocou počítača. Bratislava 1985.
- [2] Angel I.O.: Wprowadzenie do grafiki komputerowej. WNT, Warszawa 1988.
- [3] Pavlidis T.: Grafika i przetwarzanie obrazów. WNT, Warszawa 1987.
- [4] Hearn D., Baker M.P.: Grafika mikrokomputerowa. WNT, Warszawa 1988.
- [5] Gliński H., Żaba A.: Wyznaczanie perspektyw obiektów architektonicznych na mikrokomputerze ZX Spectrum. Śląski Kwartalnik Architektury i Urbanistyki, nr 2, rok 1986.
- [6] Majewski M., Sroka K.: Tworzenie perspektywy ukośnej sposobem analityczno-graficznym, Zesz.Nauk. Pol.Szcz. nr 103, 1968.
- [7] Котов И.И., Полозов В.С., Широкова Л.В.: Алгоритмы машинной графики. Машиностроение, Москва 1977.
- [8] Бардан И., Лука М.: Машинная графика и автоматизация конструирования. Москва 1987.

Recenzent: Doc. dr hab. Jerzy KACZMAREK

Wpłynęło do Redakcji w marcu 1989 r.

#### Построение перспективных изображений с помощью ЭВМ

#### Резюме

В работе обсуждено построение перспективных изображений (центральной проекции) многогранников с помощью ЭВМ. Приведен способ определения точки зрения и направления главного луча, напоминающий фотографирование. Выведены соответствующие формулы изчисления координат перспективного изображения.

#### Numerical determination of perspective pictures

#### Summary

In the paper is given computer algorithm for construction of perspective pictures (central projection) of polyhedrons. A method for determination of the place of the observation point and direction of the observation similiar to the photography is presented. The formulae for calculation of the perspective picture are derived.