

Henryk GLIŃSKI

NUMERYCZNE WYZNACZANIE LINII PRZENIKANIA I ROZWINIĘĆ WALCÓW ELIPTYCZNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono komputerowy algorytm wyznaczania linii przecięcia walca eliptycznego płaszczyznami i walcami eliptycznymi. Linia przecięcia może być przedstawiona w rzutach ortogonalnych lub w dowolnej aksonometrii. Omówiono metodę konstrukcji rozwinięcia powierzchni bocznej walca wraz z linią przecięcia.

1. Konstrukcja linii przecięcia walca eliptycznego płaszczyznami i walcami eliptycznymi

Rozważmy walec eliptyczny prosty Γ , którego kierującą jest elipsa o półosiach a i b leżąca w płaszczyźnie xy prostokątnego układu współrzędnych kartezjańskich. Nie zmniejszając ogólności rozważań można założyć, że osie symetrii elipsy pokrywają się z osiami x i y układu współrzędnych. Oś walca z_Γ leży na osi z układu współrzędnych.

Linia przecięcia walca eliptycznego płaszczyzną jest krzywą rzędu drugiego, na ogół elipsą. w szczególnych przypadkach parą prostych równoległych lub prostą podwójną.

Linia przenikania dwóch walców eliptycznych jest krzywą skośną rzędu czwartego, w szczególnych przypadkach rozpadającą się na dwie krzywe płaskie rzędu drugiego. Wyprowadzenie równań krzywej przecięcia jest pracochłonne, w przypadku wyznaczania obrazu graficznego linii przenikania na ekranie monitora wystarczające jest przedstawienie jej w postaci przybliżonej - linii łamanej. W tym celu należy wpisać w walec graniastosłup o odpowiedniej liczbie ścian. Ogólny algorytm wyznaczania linii przecięcia walca polega na wyznaczaniu punktów przecięcia powierzchniami tnącymi kolejnych krawędzi graniastosłupa. Punkty te, połączone z sobą, łamaną tworzą przybliżony obraz linii przecięcia. Linie przenikania można przedstawić wraz z walcami w rzutach ortogonalnych lub dowolnie wybranej aksonometrii.

1.1. Wyznaczenie punktów przecięcia walca płaszczyzną

Ustalmy dowolną tworzącą $t_i(x_i, y_i)$,

$$\begin{aligned} x_i &= a \cos q_i, \\ y_i &= b \sin q_i, \quad 0 \leq q_i \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

walca Γ i obierzmy płaszczyznę tnącą

$$z = Kx + Ly + M. \quad (2)$$

Płaszczyzna określona równaniem (2) przecina tworzącą t_i w punkcie o współrzędnej

$$z_i = Kx_i + Ly_i + M. \quad (3)$$

Odrębny przypadek stanowi płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny xy , tzn. płaszczyzna o równaniu

$$Ax + By + C = 0. \quad (4)$$

Płaszczyzna ta przecina walec w dwóch tworzących, współrzędne ich można obliczyć rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi, \\ y &= b \sin \varphi, \\ Ax + By + C &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

1.2. Wyznaczenie punktów przecięcia tworzących walca innym walcem eliptycznym

Załóżmy, że walec Γ przecięty jest powierzchnią walca eliptycznego Δ , którego oś l przechodzi przez punkt $D(x, y, z)$ i nachylona jest pod kątem ϕ , $\phi \neq 90^\circ$, do płaszczyzny xy . Rzut poziomy l' osi l na płaszczyznę xy tworzy z osią x kąt ψ (rys. 1).

Wyznamy punkty, w których powierzchnia Δ przecina dowolną tworzącą $t_i(x_i, y_i)$ walca Γ . Wprowadźmy nowy kartezjański układ współrzędnych prostokątnych $x'y'z'$, którego początek znajduje się w punkcie D' , oś x' tworzy z osią x kąt ψ a oś z' jest równoległa do osi z .

W nowym układzie współrzędnych tworząca t_i ma współrzędne

$$\begin{aligned} x_i' &= (x_i - x) \cos \psi + (y_i - y) \sin \psi, \\ y_i' &= -(x_i - x) \sin \psi + (y_i - y) \cos \psi, \\ z_i' &= z_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Równanie elipsy kierującej walca Δ w lokalnym kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych uvw , w którym oś u jednoczy się z osią l walca Δ , oś v jest równoległa do płaszczyzny xy ma postać

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= c \cos \rho \cos \gamma - d \sin \rho \sin \gamma, \\ w &= c \cos \rho \sin \gamma + d \sin \rho \cos \gamma, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie c i d - półosie elipsy kierującej walca Δ ;

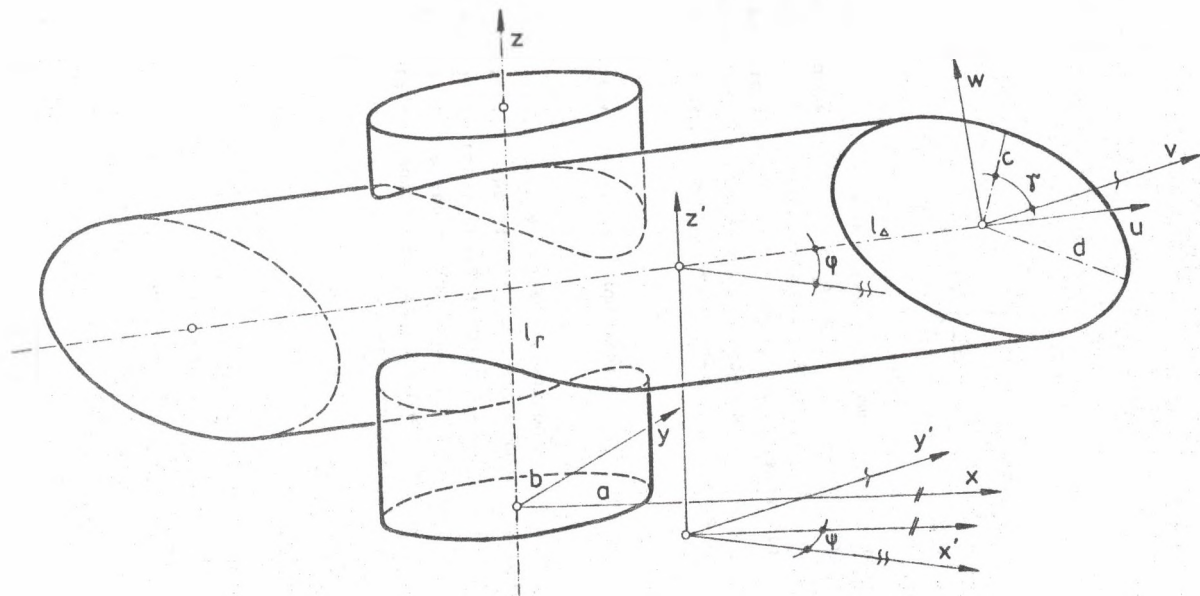
γ - kąt, jaki tworzy półoś c elipsy kierującej walca Δ z osią v ;

ρ - parametr, $0 \leq \rho \leq 2\pi$.

Przesuńmy kierującą walca Δ równoległe tak, aby jej środkiem stał się punkt D i zapiszmy jej równanie w układzie $x'y'z'$:

$$\begin{aligned} x' &= -(c \cos \rho \sin \gamma + d \sin \rho \cos \gamma) \sin \phi, \\ y' &= c \cos \rho \cos \gamma - d \sin \rho \sin \gamma, \\ z' &= (c \cos \rho \sin \gamma + d \sin \rho \cos \gamma) \cos \phi + z. \end{aligned} \quad (8)$$

Oznaczmy przez $R(x_r', y_r', z_r')$ dowolny punkt kierującej walca Δ (spełniający równania (8)). Równanie parametryczne tworzącej r walca Δ



Rys. 1

przechodzącej przez punkt R ma postać (w układzie $x'y'z'$):

$$\begin{aligned}x' &= x'_r + k \cos \phi, \\y' &= y'_r, \\z' &= z'_r + k \sin \phi.\end{aligned}\quad (9)$$

Na to, aby tworząca r przecinała tworzącą $t_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ walca Γ potrzeba i wystarcza, aby

$$y'_i = c \cos \rho \cos \gamma - d \sin \rho \sin \gamma. \quad (10)$$

Równanie (10) po podstawieniu

$$\cos \rho = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \rho = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} = t$$

można sprowadzić do równania kwadratowego. Jeśli walec Δ przecina tworzącą t_i , to równanie (10) ma dwa rozwiązania ρ_1 i ρ_2 , jeżeli walec jest styczny do tworzącej t_i , to $\rho_1 = \rho_2$. Rozwiązania te kolejno podstawiamy do równań (8) obliczając odpowiednio x'_{t1} i z'_{t1} oraz x'_{t2} i z'_{t2} . Następnie z pierwszego z równań (9) oblicza się wartość parametrów k_1 i k_2 . Na koniec z ostatniego z równań (9) oblicza się dwie wartości $z'_1 = z'_1$ i $z'_2 = z'_2$ punktów przecięcia tworzącej t_i walca Γ powierzchnią walca Δ .

2. Konstrukcja rozwinięcia powierzchni bocznej walca eliptycznego

Przybliżone rozwinięcie pobocznic walca eliptycznego ograniczonego dowolnymi powierzchniami można wyznaczyć rozwijając powierzchnię boczną wpisanego w walec graniastosłupa o odpowiedniej ilości ścian. Rozwinięcie można wyznaczyć teoretycznie z dowolną dokładnością, biorąc pod uwagę wystarczającą liczbę ścian. Równania parametryczne kolejnych krawędzi bocznych graniastosłupa (i jednocześnie tworzących walca) mają postać

$$\begin{aligned}x_i &= a \cos \left(i \frac{2\pi}{n} \right), \\y_i &= b \sin \left(i \frac{2\pi}{n} \right).\end{aligned}\quad (11)$$

gdzie x_i, y_i - współrzędne krawędzi graniastosłupa;
 i - numer krawędzi, $0 \leq i \leq n$;
 n - ilość ścian graniastosłupa.

Długość przybliżonego rozwinięcia pobocznic walca od tworzącej nr 0 do tworzącej nr k określona jest wzorem

$$L = \sum_{i=1}^k \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

W tablicy 1 przedstawiono zmianę długości przybliżonego rozwinięcia pobocznic walca ($a = 100$ mm, $b = 50$ mm) w zależności od liczby ścian graniastosłupa.

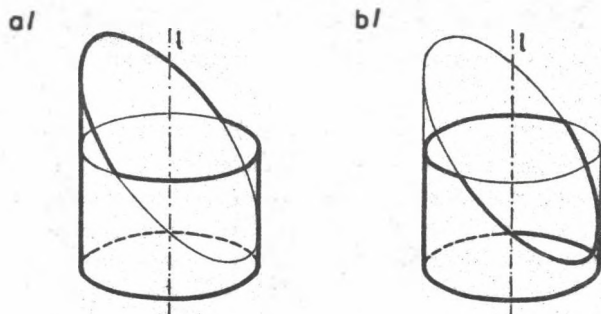
Tablica 1

Liczba ścian	długość ob. elipsy	Liczba ścian	długość ob. elipsy
4	447.21359550	80	484.29791390
5	453.07685932	90	484.32404133
6	464.57513110	100	484.34273064
7	468.31689949	200	484.40249015
8	472.49097722	300	484.41355720
9	474.64411725	400	484.41743066
10	476.59294510	500	484.41922355
20	482.43290008	600	484.42019746
30	483.53751563	700	484.42078466
40	483.92453777	800	484.42116576
50	484.10373675	900	484.42142703
60	484.20109609	1000	484.42161400
70	484.25980638	2000	484.42221136

Ogólny algorytm wyznaczenia rozwinięcia pobocznic walca eliptycznego polega na kolejnym obliczaniu współrzędnych krawędzi graniastosłupa wpisanego w walec i wyznaczaniu współrzędnych punktu przecięcia danej krawędzi powierzchniami przecinającymi walec. Następnie należy zaznaczyć wyznaczony punkt na rozwinięciu i połączyć go z punktem, w którym była przecięta poprzednia tworząca.

3. Opracowanie programu komputerowego

Projektując program komputerowy należy zwrócić szczególną uwagę na sposób wprowadzania do komputera informacji o wymiarach i położeniu powierzchni przecinających walec Γ . Wykorzystana w algorytmie jawna postać równania płaszczyzny $z = Kx + Ly + M$ nie zawsze będzie wygodna dla użytkownika, w konkretnych zastosowaniach można określać położenie płaszczyzny poprzez podanie trzech punktów, śladów płaszczyzny, itp.



Rys. 2

Podobnie inaczej można określać położenie walców przecinających walec Γ . Podanie położenia i wymiarów powierzchni tnących nie określa jednoznacznie przebiegu linii przecięcia, konieczne jest jeszcze wskazanie przebiegu linii przecięcia. W prostych przypadkach, w których można przewidzieć kształt linii przecięcia, wystarczy podać, czy pozostawiona część poboczniczy powstaje jako suma (rys.2a), czy jako część wspólna (rys.2b) części powierzchni bocznej odciętej poszczególnymi powierzchniami. W przypadkach bardziej skomplikowanych ostateczny kształt rozwinięcia poboczniczy łatwiej jest ustalić w sposób konwersacyjny, tzn. komputer wyświetla kolejny fragment rozwinięcia i czeka na decyzję użytkownika o dołączeniu go do rozwinięcia lub usunięciu.

5. Literatura

- [1] Polański S.: Zastosowania rozwinięć powierzchni w technice. PWN, Warszawa 1984.
- [2] Lexikon der Mathematik. VEB Bibl. Inst., Leipzig 1977.
- [3] Котов И.И., Полозов В.С., Широкова Л.В.: Алгоритмы машинной графики. Машиностроение, Москва 1977.

Recenzent: Doc. dr hab. Jerzy Kaczmarek

Wpłynęło do redakcji w marcu 1989 r.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И РАЗВЕРТКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Р Е З У М Е

В работе обсуждено построение линии пересечения эллиптического цилиндра плоскостями и другими эллиптическими цилиндрами. Линию пересечения можно представить в ортогональной проекции или любой аксонометрии. Рассмотрено метод развертки поверхности цилиндра вместе с линией пересечения.

NUMERICAL DETERMINATION OF INTERSECTION AND DEVELOPMENTS OF ELLIPTICAL CYLINDRES

S u m m a r y

In the paper is presented the computer algorithm for determination of intersection line of an elliptical cylinders and planes or other elliptical cylinders. The intersection line may be presented either on the orthogonal or the axonometric projection. A method for construction of the development of the cylinder side face with the intersection line is discussed.