ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Marian PALEJ

O PEWNEJ TRANSFORMACJI W ODWZOROWANIU PŁASZCZYZN ZA POMOCĄ PARABOLOIDY OBROTOWEJ.

Streszczenie.

Praca stanowi uzupełnienie publikowanych wcześniej rozważań autora nad odwzorowaniem płaszczyzn za pomocą paraboloidy obrotowej. W szczególności omówiono w niej konstrukcję krawędzi dwóch płaszczyzn stanowiących biegunowe obrazy dowolnego punktu przestrzeni wzgledem dwoch paraboloid obrotowych. Konstrukcja taka jest podstawowa dla graficznej interpretacji przekształcenia dwubiegunowego, w którym dwie paraboloidy obrotowe o osiach prostopadłych do rzutni stanowią bazę przekształcenia.

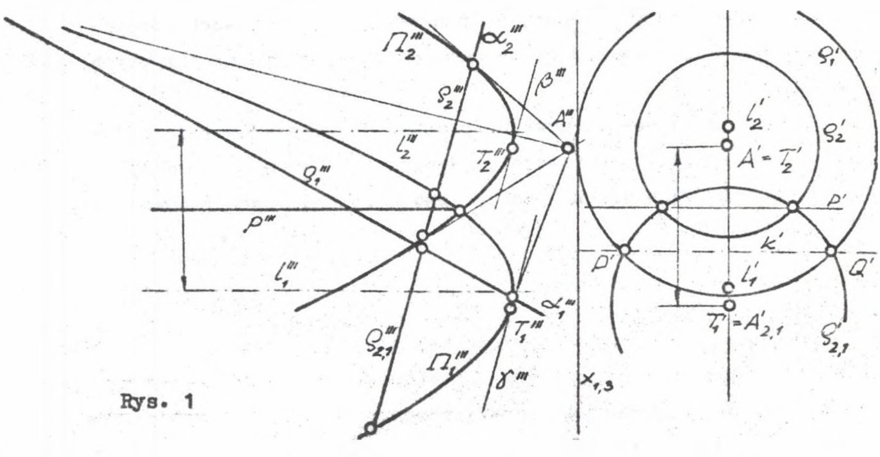
Istota konstrukcji polega na transformacji, która pozwala obrazy biegunowe punktu względem dwóch różnych paraboloid odwzorować za pomocą jednej tylko z tych kwadryk.

Na marginesie rozważań przedstawiono nieodwołujący się do aparatu rzutowego sposób konstrukcji okręgów przechodzących przez zadane dwa urojone punkty dowolnej prostej.

W artykule [1] przedstawiono sposób dogodnego odwzorowana płaszczyzn za pomocą paraboloidy obrotowej. Wskazano przy tym na możliwość pewnych uproszczeń graficznych, zwłaszcza w przypadku odwzorowywania pęku płaszczyzn równoległych. Praca niniejsza stanowi uzupełnienie zawartych w artykule rozważań, umożliwiające wykorzystanie omówionego w nim sposobu odwzorowania przestrzeni do analizy przekształceń biegunowych.

Przekształcenia biegunowe, zwlaszcza te, w których bazę stanowią dwie lub trzy kwadryki (tzw. przekształcenia wielobiegunowe), były przedmiotem wielu opracowań i rozpraw doktorskich. W żadnym z nich jednak, jak również w żadnej z dostępnych prac zagranicznych autorów nie pokuszono sie o graficzną interpretację, czy też o graficzną drogę badań własności tych przekształcen. Powód jest oczywiście taki, że operujac klasycznym aparatem odwzorowania napotyka sie ogromne trudności w uzyskaniu obrazu pojedynczego punktu, nie mówiąc już o bardziej złożonych figurach geometrycznych. Zasadniczo inaczej przedstawia się sprawa wówczas, gdy kwadrykami bazy w przekształceniach biegunowych są paraboloidy obrotowe. Jedyna trudność w takim przypadku sprowadza się do konstrukcji krawędzi płaszczyzn biegunowych wybranego punktu względem dwóch kwadryk bazy. Konstrukcję taką, za pomocą odpowiedniej transformacji, przedstawiamy na nastepującym przykładzie.

Niech dane będą jako kwadryki bazy przekształcenia dwie przystające paraboloidy obrotowe o osiach l_1 i l_2 prostopadłych do rzutni pierwszej (rys. 1) i wierzchołkach równo od niej odległych. Obierzmy dowolny punkt A i rozważmy konstrukcję jego obrazu dwubiegunowego, tj. krawędzi a, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny biegunowe tego punktu α_1, α_2 kolejno względem kwadryk Π_1, Π_2.



Rys. 1

Zgodnie z [1] dogodny obraz płaszczyzn α_1, α_2 stanowią dwa okręgi ϱ_1', ϱ_2' o wspólnym środku A'. Są to rzuty prostokątne przekrojów ϱ_1, ϱ_2 płaszczyznami α_1 i α_2 kolejno kwadryk Ω_1, Ω_2, a więc odwzorowanie tych płaszczyzn **za pomocą** dwóch różnych paraboloid Ω_1 i Ω_2. Spróbujmy płaszczyzny α_1 i α_2 odwzorować za pomocą jednej tylko z tych paraboloid, np. Ω_1.

Obraz płaszczyzny α_1 jest już znany - stanowi go okrag ϱ_1'. Aby znaleźć obraz płaszczyzny α_2 - okrąg $\varrho_{2.1}'$, zanalizujmy przekrój tą płaszczyzną paraboloidy Ω_1.

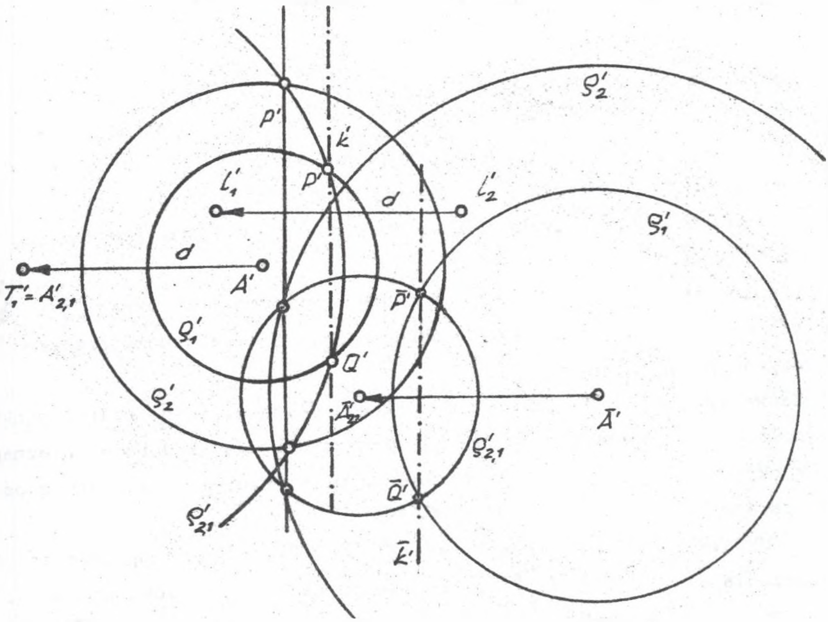
Zauważmy, ze [1] A' jako środek okręgu ϱ_2' jest m.in. rzutem punktu styczności T_2 do paraboloidy Ω_2 płaszczyzny $\beta \parallel \alpha_2$. Podobnie nieznany środek okręgu $\varrho_{2.1}'$ - punkt $A_{2.1}'$ będzie m.in. rzutem punktu styczności T_1 do paraboloidy Ω_1 plaszczyzny $\gamma \parallel \alpha_2$.

Z drugiej strony - wobec relacji $\Omega_1 \cong \Omega_2$ można doprowadzić do zjednoczenia płaszczyzn β, γ po nałożeniu na siebie obydwu paraboloid, tj. po przesunięciu jednej z nich w kierunku rownoleglym do rzutni o odcinek wyrażający odległość osi tych powierzchni. Wynika stąd, że punkty styczności T_1, T_2 sa końcami odcinka rownoleglego do rzutni, którego długość jest równa odległości osi l_1, l_2. Wnosić stąd można, że i rzuty punktow T_1, T_2 będą od siebie odległe o odcinek $\overline{T_1T_2}$, co oznacza, że znajac T_2'=A' można otrzymać punkt T_1' poprzez przesunięcie A' o wektor $\overrightarrow{l_2l_1}$.

Otrzymujemy w ten sposób (rys. 1,2) środek $A_{2.1}'$ okręgu $\varrho_{2.1}'$. Pozostaje jeszcze ustalić promień tego okręgu. W tym celu zauważmy, że płaszczyzna α_2 przecina powierzchnię Ω_2 w krzywej ϱ_2, natomiast powierzchnię Ω_1 w krzywej $\varrho_{2.1}$, przy czym obydwie te krzywe przecinają się w punktach należacych do linii przenikania paraboloid $\Omega_1\Omega_2$. Ta ostatnia jednak zawiera parabolę p, której rzutem prostokątnym pierwszy jest prosta p' - symetralna odcinka $\overline{l_1'l_2'}$. Tak więc okrag $\varrho_{2.1}'$ przechodz przez punkty przecięcia prostej p' okregiem ϱ_2' i jest jednoznacznie określony.

Dysponując okręgami ϱ_1' i $\varrho_{2.1}'$, ktore, przypomnijmy, stanowią rzuty przekrojów paraboloidy Ω_1 płaszczyznami α_1 i α_2 możemy łatwo skonstruowac krawędź płaszczyzn α_1 i α_2 jako prostą przechodzącą przez punkty $P', Q' = \varrho_1' \cap \varrho_{2.1}'$ (rys.2).

Może się zdarzyć, że punkty przecięcia prostą p' okręgu ϱ_2' są

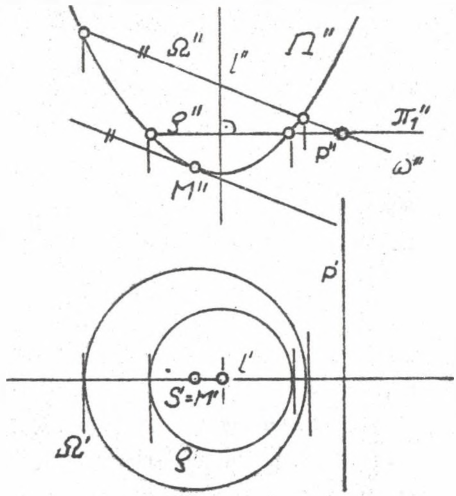


Rys. 2

urojone. Wówczas odnośną konstrukcję wyprowadzić można z ogólniejszej, dotyczacej stożkowej określonej trzema punktami rzeczywistymi i parą punktów urojonych [2], bądź też, co stanowi istotne uproszczenie i może być wykorzystane w niektórych problemach praktycznych, konstrukcję okręgu w takim przypadku oprzeć na własnościach paraboloidy obrotowej.

W szczególności niech np. dany będzie okrąg ϱ i współpłaszczyznowa z nim, ale nie przecinajaca go w punktach rzeczywistych prosta p, czyli $p \cap \varrho = P^u, Q^u$, gdzie P^u, Q^u jest parą punktów urojonych (rys.3). Wprowadźmy paraboloidę obrotową Ω, dla której ϱ jest jednym z równoleżników, tj. paraboloidę przechodzącą przez okrąg ϱ, o osi l prostopadłej do płaszczyzny tego okręgu.

Jest oczywiste, że pęk płaszczyzn o osi p przecinać będzie paraboloidę w krzywych, które z prostą p będą miały te same punkty wspólne - punkty przebicia paraboloidy prostą p. Jeżeli zatem szukamy okregu Ω' o danym środku S' przecinajacego p w punktach P^u, Q^u - wystarczy znaleźć taki okrąg o środku S', który stanowi rzut prostokątny (na płaszczyznę $\pi_1 \perp l$) przekroju paraboloidy odpowiednią płaszczyzną ω pęku p. Będzie to płaszczyzna rownoległa do tej, która styka się z paraboloidą w punkcie M spełniającym warunek M'= S' (rys.3).



Rys. 3

Literatura:

[1] M. Palej - O pewnym odwzorowaniu plaszczyzn - Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Matematyka - Fizyka nr 51, Gliwice 1987.

[2] A. Plamitzer - Elementy geometrii rzutowej , Lwów 1927.

Recenzent: Doc. dr inż. Stanisław Ochoński

ОБ ОДНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ В МЕТОДЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ.

Р Е З Ю М Е

Работа является дополнением исследования Автора ранее публицированных, касающихся изображения плоскпсти при помощи параболоида вращения.
В частности, в работе рассматривается конструкция пересечения двух плоскостей являющихся полярными образами произволной точки в отношении к двум параболоидом впащения.
Эта конструкция основная для графической интерпретации диполярного преобразования, в котором база состоит из двух параболоидов вращения так принятых что их оси перпендикулярны к плоскости проекции.

Сущность констрыкции состоит в использовании трансформации, которая позваляет изображать полярные образы точки по отношению к двум параболоидом вращения (две разные плоскисти) - при помощи одного толко параболоида.

К вопросу о основной проблеме рассматривается конструкция окружностей проходяших через две мнимые точки заданной произвоянo прямой без необходимости исползования элементами проективной геометрии.

ABOUT A CERTAIN TRANSFORMATION IN THE REPRESENTATION OF PLANES BY MEANS OF A PARABOLOID OF REVOLUTION.

Summary

The present paper is a supplement to previously published considerations of the author concerning the representation of planes by means of a paraboloid of revolution. Particular attention has been paid to the construction of the edges of two planes being the polar images of any point in space versus two paraboloids of revolution. Such a construction forms the basis for the graphical interpretation of a dipolar transformation, in which two paraboloids of revolution whose axes run perpendicular to the projection plane, are the basis of transformation.

The essence of construction is the transformation, which makes it possible to represent the polar images of a point versus two different paraboloids (two different planes) by means of only one of this quadric surfaces.

As a side-note to this considerations a way of constructing circles passing two given imaginary points of any straight line has been dealt with without reference to projective geometry.