ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 60 Nr kol. 999

Marian PALEJ, Anna POGONOWSKA

O PEWNYM PRZEKSZTAŁCENIU TRÓJBIEGUNOWYM

Streszczenie.

W pracy omówiono szczególny przypadek trójbiegunowego przekształcenia przestrzeni, w którym bazę stanowią trzy przystające paraboloidy obrotowe, o współwierzchołkowej, wspólnej plaszczyźnie stycznej. Obrazem dowolnego punktu jest punkt przecięcia jego płaszczyzn biegunowych względem każdej z paraboloid. Udowodniono 9 twierdzeń, z których ważniejsze ustalaja, że obrazem ogólnie położonej prostej jest parabola i prosta niewłaściwa, natomiast obrazem ogólnie położonej płaszczyzny jest paraboloida eliptyczna wraz z płaszczyzną niewłaściwą.
W przekształceniu szczególną rolę odgrywa prosta "s" równoodległa od osi trzech paraboloid. Prosta ta przekształcająca się sama na siebie połowi odcinek dzielący dowolny punkt właściwy od jego obrazu. W przypadku rownoległości prostej lub płaszczyzny do prostej "s" obrazy ich ulegają degeneracji i nie zawierają utworów stopnia drugiego.

Wyniki prac [1], [2] stwarzają możliwość stosunkowo prostego odwzorowania na płaszczyźnie przekształceń przestrzeni trójwymiarowej, w których ingeruje relacja biegunowości względem jednej,dwóch lub trzech kwadryk.

Autorzy pokusili się o sporządzenie rzutu prostokątnego przekształcenia przestrzeni opartego na biegunowości względem trzech kwadryk. Kwadryki te stanowiły przystające paraboloidy obrotowe o osiach prostopadłych do rzutni i wierzchołkach jednakowo od niej odległych. Wiadomo [3], [4], że obrazem prostej w przekształceniu trójbiegunowym jest, w ogólnym przypadku, krzywa rzędu trzeciego. Okazało się jednak,że rzutem obrazu właściwych punktów prostej ogólnie położonej jest w analizowanym przekształceniu zawsze prosta. Fakt ten wydał się dostatecznie interesujący, by szczegółowszej analizie poddać samo przekształcenie. Wyniki takiej analizy przedstawia niniejsze opracowanie.

Zauważmy przede wszystkim, że przekształcenie, w którym obrazem dowolnego punktu przestrzeni jest punkt przecięcia się płaszczyzn biegunowych tego punktu względem trzech przystających paraboloid o osiach zgodnie równoległych i wspólnie stycznej w wierzchołkach płaszczyźnie pozwala na nastepujące wstępne stwierdzenia:

1/ Ogólnie przyjętemu punktowi A odpowiada ściśle określony jeden jego obraz, przy czym przekształcenie $A \rightarrow A_p$ ma charakter inwolucyjny.

2/ Istnieją punkty osobliwe przekształcenia, których obrazy mają charakter rozciągły. Tak więc środkowi paraboloid S^{∞} odpowiada jako obraz płaszczyzna niewłaściwa τ^{∞}, a punktowi niewłaściwemu $N^{\infty} \neq S^{\infty}$ prosta niewłaściwa $n^{\infty} \in S^{\infty}$. Warto przy tym zauważyć, że pęk prostych niewłaściwych o środku S^{∞} wypełniający płaszczyznę niewłaściwą jest obrazem prostej niewłaściwej $t^{\infty} \notin S^{\infty}$.

3/ Szczególna rolę w przekształceniu spełnia prosta s równoodległa od osi trzech paraboloid. Każdemu punktowi $A \in s$, $A \neq S^{\infty}$ odpowiada jako obraz $A_p \in s$; tak więc, wyłączając środek S^{∞}, prosta s przekształca się sama na siebie.

Z własności 2/ wyprowadzić można następujący wniosek: w rozpatrywanym przekształceniu obraz prostej $a \notin S^{\infty}$, krzywa rzędu trzeciego, jest zawsze zdegenerowana do prostej niewłaściwej $a^{\infty} \in S^{\infty}$ i stożkowej a_p. Wynika to z faktu, że obraz niewłaściwego punktu takiej prostej jest prostą niewłaściwą.

W dalszym ciagu wykażemy, że stożkowa stanowiąca element obrazu prostej jest zawsze parabolą. W tym celu rozpatrzmy kolejne przypadki położeń prostej.

1. Niech prosta a leży w płaszczyźnie symetrii σ pary paraboloid Ω_1, Ω_2. Zauważmy przede wszystkim, że obraz prostej powstaje w wyniku przecinania się homologicznych płaszczyzn trzech pęków (a_1), (a_2), (a_3), ktorych osie a_1, a_2, a_3 są prostymi wzajemnymi prostej a w relacji biegunowości względem kolejnych paraboloid bazy $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Ponieważ w rozważanym położeniu paraboloidy Ω_1, Ω_2 są symetryczne względem płaszczyzny σ, płaszczyzna ta będzie płaszczyzną symetrii dla każdej pary płaszczyzn odpowiadających biegunowo w odniesieniu do Ω_1 i Ω_2 dowolnemu punktowi $A \in \sigma$. Wnosimy stąd, że krawędzie przecięcia sie homologicznych płaszczyzn w pękach (a_1) i (a_2) leżeć będą w płaszczyźnie σ, co oznacza, że stożkowa a_p stanowiąca element obrazu prostej a jest incydentna z płaszczyzną σ. Stąd:

Wniosek 1

Dowolny punkt właściwy płaszczyzny σ oraz jego obraz są współpłaszczyznowe z prostą s.

Zgodnie z warunkiem ciągłości stożkowa a_p i prosta niewłaściwa a^∞ nie mogą być rozłączne, tj. mają z sobą jeden punkt wspólny. Punktem tym może być tylko S^∞ jako część wspólna a^∞ i σ. Tak więc stożkowa a_p przechodzi przez środek paraboloid S^∞.

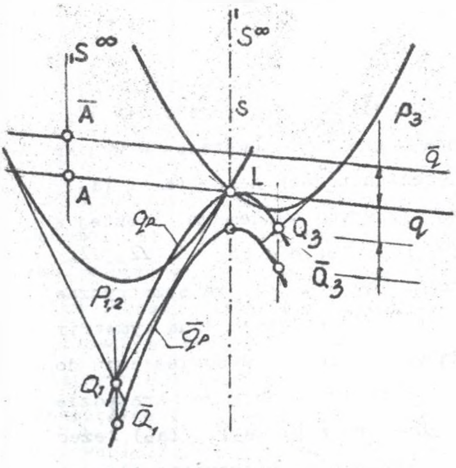
Można udowodnić, że jest to jedyny jej punkt niewłaściwy. Gdyby bowiem było inaczej, wówczas pamiętajac o inwolucyjnym charakterze przekształcenia - różnemu od S^∞ punktowi niewłaściwemu, np. M_p^∞ należałoby przyporządkować taki punkt $M \in a$, który należy do obrazu punktu M_p^∞, czyli prostej m^∞ pęku (S^∞). Punkt taki jednak $m^\infty \cap a$ musiałby być drugim niewłaściwym punktem prostej a, co nie może mieć miejsca.

Rozważanie powyższe wyklucza również degenerację stożkowej do dwóch prostych i uzasadnia

Twierdzenie 1

Elementem obrazu prostej $a \not\ni S^\infty$ jest parabola.

Rozpatrzmy z kolei konstrukcję paraboli stanowiącej element obrazu prostej $q \in \sigma$ (rys.1). Niech parabole p_1, p_2, p_3 będą przekrojami paraboloid $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ płaszczyzną σ. Zachodzi oczywiście: $p_1 = p_2 \neq p_3$ oraz $p_{1,2} \cap p_3 = S^\infty, L$, gdzie $L \in s$ jest punktem przebicia przez prostą s wszystkich trzech paraboloid $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.



Rys. 1

Przyjmijmy: $q \in L$. Jeżeli wyznaczymy bieguny prostej q względem kolejno parabol $p_{1,2}$, p_3 - punkty Q_1 i Q_3, to ustalimy, że obrazy poszczególnych punktów prostej q są punktami przecięcia homologicznych promieni pęków (Q_1), (Q_3), przy czym promienie te są biegunowymi punktów szeregu (q) odniesionymi kolejno do parabol $p_{1,2}$, p_3. Wynika stąd natychmiast, że parabola q_p przechodzi przez punkty Q_1, Q_3. Przechodzi ona również przez punkt L, który w rozpatrywanym przekształceniu odpowiada sam sobie.

Można przy tym udowodnić, że prosta q jest styczna do paraboli q_p w punkcie L. Gdyby bowiem było inaczej, tj. gdyby oprócz punktu L na prostej q istniał jeszcze jeden taki punkt, np. M, którego obraz M_p leży na paraboli q_p, wówczas na zasadzie inwolucji punktowi $M_p = N$ odpowiadałby drugi punkt $N_p = M$ należący również do paraboli q_p, co oznaczałoby, że ma ona z prostą trzy punkty wspólne. Wnioskujemy więc, że istotnie prosta q jest styczna do paraboli w punkcie L.

Wykażemy jeszcze jedną istotną relację. Obierzmy prostą $\bar{q} \parallel q$ i znajdźmy element jej obrazu - parabolę $\bar{q}_p$. W tym celu wyróżnijmy na prostych q i $\bar{q}$ współliniowe z S^{∞} punkty A, $\bar{A}$. Zauważmy, że wierzchołki pęków tworzących parabolę $\bar{q}_p$ są punktami $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_3$ przesuniętymi równolegle względem Q_1 i Q_3 o odcinek $A\bar{A}$. Zauważmy także, że biegunowe punktów A i $\bar{A}$ przechodzą przez biegun prostej $A\bar{A}$, który jest punktem niewłaściwym. Oznacza to równoległość tych biegunowych, a w efekcie - równoległość promieni a, $\bar{a}$; b, $\bar{b}$... w pękach (Q_1), $(\bar{Q}_1)$ (podobnie i w pękach (Q_3), $(\bar{Q}_3)$). Tak więc pęki (Q_1), $(\bar{Q}_1)$ oraz (Q_3), $(\bar{Q}_3)$ są parami przystające.

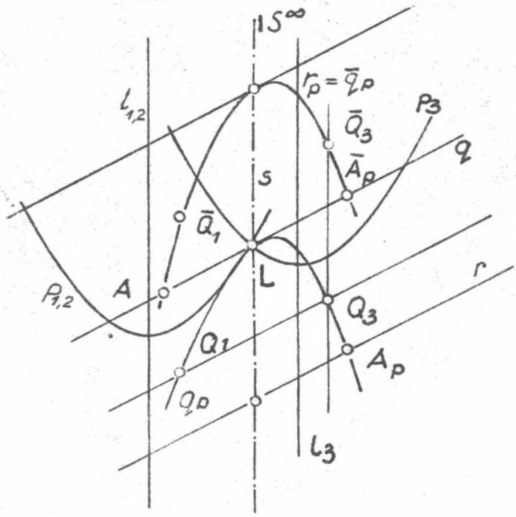
Wobec tego, że $Q_1\bar{Q}_1 = Q_3\bar{Q}_3 = A\bar{A}$ oraz $Q_1\bar{Q}_1 \parallel Q_3\bar{Q}_3 \parallel A\bar{A}$ - parabola $\bar{q}_p$ jest przesuniętą równolegle o odcinek $A\bar{A}$ parabolą q_p.

Możemy zatem sformułować:

Twierdzenie 2.

Elementami obrazów prostych równoległych, leżących w płaszczyźnie σ i nie przynależnych do punktu S^{∞} są parabole przystające o środku S^{∞}.

Obierzmy jeszcze na prostej q dowolny punkt A (rys. 2) i znajdźmy jego obraz A_p. Zachodzi oczywiście: $A_p \in q_p$. Następnie poprowadźmy prostą $r \in A_p$, $r \parallel q$. Skonstruujmy parabolę r_p. Z poprzedniego wiadomo, że $r_p \cong q_p$. Po równoległym przesunięciu paraboli q_p do pokrycia się z r_p punkt A_p zajmie położenie $\bar{A}_p$ odpowiadające w symetrii o osi s i kierunku q punktowi A. Oznacza to, że prawdziwe jest:



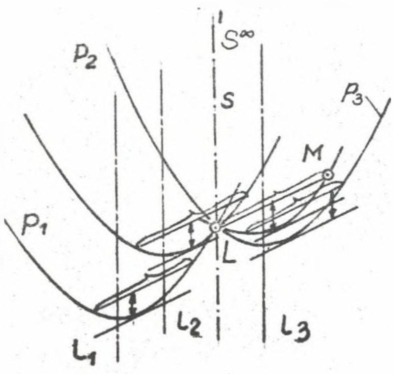
Rys. 2

Twierdzenie 3

Prosta s połowi odcinek dzielący dowolny punkt właściwy płaszczyzny σ od jego obrazu.

2. Rozważania powyższe dotyczyły relacji zachodzących w szczególnej płaszczyźnie - płaszczyźnie symetrii jednej z par paraboloid Ω_1, Ω_2, Ω_3. Wykażemy, że podobne relacje mają miejsce w każdej płaszczyźnie zawierającej prostą s.

Niech np. parabole p_1, p_2, p_3 stanowią przekroje paraboloid Ω_1, Ω_2, Ω_3 płaszczyzną $\lambda \in s$. Parabole te są przystające, o wspólnym środku S^{∞} a ponadto przecinają się w punkcie $L = s \cap \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.



Rys. 3

Zauważmy, że stanowią one elementy pęku o punktach wspólnych L oraz S^{∞}. Przez każdy bowiem punkt $M \notin L$, $M \notin S^{\infty}$ (rys. 3) przechodzi dokładnie jedna parabola przystająca do p_1, p_2, p_3. Tak więc korzystając z własności pęku stożkowych stwierdzamy, że biegunowe dowolnego punktu względem każdej z stożkowych pęku przecinają sie w jednym punkcie (w tzw. punkcie sprzężonym). Fakt ten umożliwia następujące rozumowanie:

Niech szeregowi punktów dowolnej prostej $m \not\parallel s$, $m \in \lambda$ odpowiadają w odniesieniu do paraboloid $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ kolejno pęki: (m_1), (m_2), (m_3) płaszczyzn biegunowych (gdzie proste m_1, m_2, m_3 są prostymi wzajemnymi prostej m). Przecinając te pęki płaszczyzną λ otrzymujemy pęki prostych biegunowo przyporządkowanych punktom szeregu (m), przy czym bazą tej biegunowości są parabole p_1, p_2, p_3 jako utwory wspolne: $\lambda / \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Dowolnemu punktowi $N \in m$ odpowiadają biegunowe n_1, n_2, n_3 przecinające się w jednym punkcie N_p. Punkt N_p jest w naszym przekształceniu obrazem punktu N. Okazuje się zatem, że w rozważaniach można pominąć jedną z parabol p_1, p_2, p_3 i powtórzyc rozumowanie przeprowadzone dla płaszczyzny σ. Tak więc wnioski wyprowadzone dla płaszczyzny symetrii jednej z par paraboloid, są ważne dla każdej płaszczyzny zawierającej prostą s. Uzasadnia to prawdziwość ogólniejszego twierdzenia:

Twierdzenie 4

Dowolny punkt właściwy A i jego obraz A sa współpłaszczyznowe z prostą s.

Twierdzenie 5

Prosta s połowi odcinek dzielący dowolny punkt właściwy A od jego obrazu A_p.

Z powyższych rozważań wynika również:

Twierdzenie 6

Parabola a_p stanowiąca element obrazu właściwej prostej $a \not\parallel s$ leży w płaszczyźnie równoległej do prostej a oraz do osi s. Odległość płaszczyzny paraboli a_p od osi s jest równa odległości prostych a, s.

Twierdzenie 7

Elementem obrazu prostej $t \parallel s$ jest prosta $t_p \parallel s$, $t_p \in \lambda(t, s)$ przy czym odległości t i t_p od osi są jednakowe.

3. Przechodząc do zagadnienia obrazu ogólnie położonej płaszczyzny α nierównoległej do s zauważmy, że elementem tego obrazu jest płaszczyzna niewłaściwa jako obraz niewłaściwej prostej płaszczyzny α. Pozostały element (por. tw. 2) stanowi zbior obrazow wszystkich właściwych prostych tej płaszczyzny.

Z powyższych rozważan wiadomo, że będzie to zbiór parabol o wspólnym środku S^{∞}. Można udowodnić, że zbiór taki jest rzędu drugiego, tj., że dowolna prosta przebija go w dwóch punktach. W tym celu przyjmijmy dowolną prostą k przebijająca obraz plaszczyzny α utwór α_p w szukanych punktach K_i. Poddajmy naszemu przekształceniu prostą k oraz utwór α_p.Otrzymujemy jako wynik przekształcenia prostej - parabolę k_p, natomiast jako rezultat przekształcenia utworu α_p - płaszczyznę α (pominięto przy tym nieistotne dla tej dyskusji uzupełnienia obrazów elementami niewłaściwymi). Ponieważ parabola k_p z płaszczyzną α może mieć tylko dwa punkty wspólne wynika stąd, że na odwrót, utwor α_p może przeciąć prostą k jedynie w dwóch punktach $K_{1,2}$ co dowodzi, że istotnie utwór α_p jest rzędu drugiego. Z warunku przynależności α_p do jednego punktu niewłaściwego S^{∞} wnioskujemy ostatecznie, że jest to paraboloida eliptyczna.

Mamy więc:

Twierdzenie 8

Obraz płaszczyzny α o dowolnym (nierównoległym) położeniu względem osi s jest złożony z płaszczyzny niewłaściwej oraz paraboloidy eliptycznej o środku $S^{\infty} \in s$.

Uwzględniając natomiast wcześniejsze ustalenia - dla szczególnych położeń uznamy za zasadne:

Twierdzenie 9

Elementem obrazu płaszczyzny $\beta \parallel s$ jest płaszczyzna $\beta_p \parallel \beta$, ktorej odleglość od oryginału jest połowiona przez oś s.

Literatura

[1] M. Palej, O pewnym odwzorowaniu płaszczyzn, Zeszyty Nauk. Pol. Śl. s. Matematyka - Fizyka nr 51, Gliwice 1987.

[2] M. Palej, O pewnej transformacji w odwzorowaniu płaszczyzn przy pomocy paraboloid obrotowych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. Matematyka - Fizyka nr 60, Gliwice 1989.

[3] J. Glomb, Odpowiedniość w przestrzeni określona przez przecięcie trzech płaszczyzn biegunowych trzech kwadryk, Zeszyty Nauk. Pol. Śl. s. Matematyka - Fizyka nr 24, Gliwice 1974.

[4] J. Żabowski, Przekształcenie biegunowe przestrzeni euklidesowej względem trzech kwadryk nie należących do jednego pęku - pr. dokt. Płock 1975.

Recenzent: Doc dr inż. Stanisław Ochoński

ОБ ОДНОМ ТРЕХПОЛЯРНОМ ПЕОБРАЗОВАНИИ

Р Е З Ю М Е

В пaботе рассматрывается частный случай трехполярного препбразования, в котором базой являются три параболоиды вращения имеющие общую, касателную в вершинах плоскость.

Образом произволной точки является точка пересечения ее полярных плоскостей по птношению к каждому параболоиду.Доказано девять теорем определяющих основные свойства преобразования, среди которых самые главные указывают, что образом прямой общего положения есть парабол и несобственная прямая а образом плоскости общего положения является эллиптический параболоид в совокупности с несобственной плоскостью.

В преобразовани особенную роль играет прямая " s " ровноудаленная от осей трех параболоидов. Эта прямая преобразуюшаяся сама по себе делит пополам отрезок делящий произволную точку от ее образа.

В случае параллельности прямой или плоскости и прямой " s " их образы подвергаются дегенерации и не содержат кривых или поверхности второй степени.

ON A CERTAIN TRIPOLAR TRANSFORMATION

Summary

The paper deals with a special case of the tripolar transformation of space, in which the basis consists of three congruent paraboloids of revolution with a common tangent plane at the vertices. The image of any point is the intersection of its polar planes versus each paraboloid.

Nine theorems have been proved describing the fundamental properties of transformation, the most important of them saing that the image of a generally situated straight line is a parabola and a line at infinity, that the images of parallel straight lines are congruent, and finally, that the image of a generally situated plane is an elliptical paraboloid together with a plane at infinity.

A special role is played in this case by the straight line "s" equidistant to the axes of three paraboloids. This straight line, transforming itself in relation to itself intersects in the middle the segment which divides any proper point from its image. If the straight line or the plane are parallel to the axis "s", their images are subject to degeneration and do not contain any curves or surfaces of the second order.