ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z.60 Nr kol. 999

Stanisław SULWIŃSKI
Michał WANTRYCH

PRZEKSZTAŁCENIE I RZUT ŚRODKOWO-BIEGUNOWY

Streszczenie. W artykule rozważono pewne przekształcenie środkowo-biegunowe przestrzeni P^3, w którym bazę tworzą: niezniekształcona kwadryka Φ i prosta s. W tej bazie dowolnemu punktowi A przyporządkowano każdą prostą przechodzącą przez ten punkt i punkt, w którym płaszczyzna biegunowa ϕ punktu A względem kwadryki Φ przecina prostą s. Następnie zbadano środkowo-biegunowy obraz punktu, prostej i płaszczyzny punktowej. W dalszej kolejności zdefiniowano rzut środkowo-biegunowy i dowiedziono kilku jego własności.

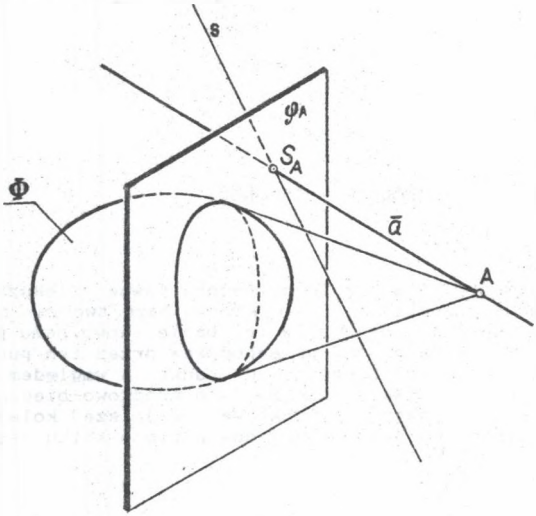
1. Wstęp

W latach 1970-80, zarówno na ogólnopolskich konferencjach geometrii rzutowej, jak i w zeszytach naukowych geometrii wykreślnej, przedstawiono szereg opracowań, które traktując o przekształceniach przestrzeni P^3 (trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa uzupełniona zbiorem punktów niewłaściwych) za podstawę rozważań przyjmują biegunowość względem jednej, dwu lub trzech kwadryk. Poruszone zagadnienia były na ogół przedmiotem rozpraw doktorskich, a ich tematyka nie była przedmiotem badań wcześniejszych, ani też nie znalazła odbicia w dostępnych opracowaniach zagranicznych. W szczególności, R.Paszkowski w referacie [2] przedstawił własności takiego biegunowego przekształcenia przestrzeni, w którym bazę tworzą kwadryka Φ i jej środek S, zaś M.Wantrych w opracowaniu [3] zbadał podstawowe własności rzutu środkowo-biegunowego, którego projektor utworzono w oparciu o kwadrykę Φ i dowolną prostą s zwaną linią środków rzutu. W niniejszym artykule przedstawione zostaną pewne własności przekształcenia środkowo-biegunowego stanowiącego podstawę konstrukcji rzutu środkowo-biegunowego, a następnie kilka nowych właściwości tego rzutu.

2. Definicja przekształcenia środkowo-biegunowego

Bazę przekształcenia tworzą: niezniekształcona kwadryka Φ i prosta s. Niech ϕ_A oznacza płaszczyznę biegunową punktu A względem kwadryki Φ, punkt $S_A = s \cap \phi_A$ i $\bar{a}=(S_A,A)$. Obraz środkowo-biegunowy punktu A zdefiniujemy w ten sposób, że jest to każda prosta przechodząca przez ten punkt oraz

punkt, w którym płaszczyzna ϕ_A przecina prostą s (rys. 1).



Rys. 1

Z tej definicji wynika,że na ogół, obrazem punktu jest w przekształceniu środkowo-biegunowym prosta. Jednak w szczególnym przypadku obrazem punktu jest pęk prostych lub wiązka prostych. Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia wtedy, gdy przekształcany punkt leży w prostej biegunowo sprzężonej z prostą s względem kwadryki Φ. Drugi przypadek wskazują punkty I i II, w których prosta s przebija kwadrykę bazową, gdyż każdemu z tych punktów przebicia odpowiada wiązka prostych mająca wierzchołek w przekształcanym punkcie I lub odpowiednio II. Jednocześnie można zauważyć, że pozostałe punkty prostej s nie są punktami osobliwymi przekształcenia środkowo-biegunowego.

Wniosek 1. Zbiór punktów osobliwych przekształcenia środkowo-biegunowego tworzą punkty prostej s_ϕ sprzężonej z prostą s względem kwadryki Φ oraz punkty przebicia kwadryki Φ prostą s.

3. Charakter przekształcenia

Twierdzenie 1. Obrazem dowolnej prostej w przekształceniu środkowo-biegunowym jest półkwadryka lub pęk płaszczyzn.

Dowód. Rozważmy łańcuch punktów dowolnej prostej a, to jest niech b_ϕ -

dzie dany $a[A_1, A_2, A_3, \ldots]$ oraz odpowiadający mu biegunowo pęk płaszczyzn a_ϕ $[\phi_{A_1}, \phi_{A_2}, \phi_{A_3}, \ldots]$, gdzie a_ϕ jest prostą sprzężoną z prostą a względem kwadryki ϕ. Pęk $[a_\phi]$ wyznacza na prostej s łańcuch s $[S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, \ldots]$, punktów rzutowo odpowiadających punktom $A_1, A_2, A_3, \ldots$, gdyż mamy tu następujące relacje

$$a\,[A_1, A_2, A_3, \ldots] \barwedge a_\phi [\phi_{A_1}, \phi_{A_2}, \phi_{A_3}, \ldots] \barwedge s\,[S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, \ldots]$$

czyli

$$a[A_1, A_2, A_3, \ldots] \barwedge s\,[S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, \ldots],$$

zatem zbiór prostych $a_i(A_i, S_{A_i})$ tworzy półkwadrykę (zbiór jednej rodziny prostych tworzących kwadrykę), której tworzące są obrazami wszystkich punktów prostej a. Proste a oraz s nie należą do wskazanej rodziny tworzących.

W przypadku gdy $a=s_\phi$, jako obraz prostej mamy pęk płaszczyzn (dokładniej mówiąc, są to pęki prostych o wierzchołkach w przekształcanych punktach) o osi s.

Jeżeli zachodzi a=s, to mamy $A_i \mid s$ i $S_{A_i} \mid s$ (przy czym na ogół mamy $S_{A_i} \neq A_i$), więc przekształcanym punktom odpowiada prosta s. Dołączając obrazy osobliwych punktów I i II otrzymujemy dwa pęki prostych, które w tym przypadku wypełniają przestrzeń w podobny sposób jak pęk płaszczyzn o osi s.

Przyjmijmy, zgodnie z ([1], str. 471) następującą definicję: rzędem n kongruencji liniowej jest liczba prostych tej kongruencji, przechodzących przez dowolny punkt przestrzeni, a klasą m – liczba prostych tej kongruencji leżących w dowolnej płaszczyźnie.

Rozważmy z kolei dowolną płaszczyznę punktową α. Ponieważ prawie każdemu (z wyjątkiem skończonego zbioru punktów osobliwych) punktowi przestrzeni, a tym samym i płaszczyzny, odpowiada w przekształceniu środkowo-biegunowym dokładnie jedna prosta, więc dwuparametrowy zbiór punktów płaszczyzny określa jednoznacznie dwuparametrowy zbiór prostych, które są obrazami punktów płaszczyzny w rozważanym przekształceniu. Zatem mamy do czynienia z kongruencją liniową prostych.

Twierdzenie 2. Zbiór obrazów środkowo – biegunowych punktów dowolnej płaszczyzny tworzy kongruencję liniową prostych rzędu 2 i klasy 1.

Dowód. 1°) Niech przekształcana płaszczczyzna punktowa nazywa się α, zaś P niech oznacza dowolny punkt przestrzeni. Obrazy środkowo-biegunowe punktów płaszczyzny α przechodzące przez punkt P leżą w płaszczyźnie $\sigma(P,s)$, więc tylko punkty prostej $k=\sigma\cap\alpha$ mogą mieć tę własność, że ich obrazy przechodzą przez punkt P.

W celu wykazania, że istnieją takie punkty, rozważmy łańcuch k $[A_1, A_2, A_3, \ldots]$ i odpowiadający mu rzutowo łańcuch s $[S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, \ldots]$, gdzie

$S_{A_i} = \phi_{A_i} \cap s$ i ϕ_{A_i} jest płaszczyzną biegunową punktu A_i względem Φ.

Łańcuchy [k] i [s] określają stożkową obwodzoną przez proste $a_{A_i}(A_i, S_{A_i})$, a więc przez punkt P przechodzą dokładnie dwie takie proste a_{A_m} i a_{A_n} (rzeczywiste lub urojone), dla których każda z trójek (P, S_{A_m}, A_m) i (P, S_{A_n}, A_n) jest współliniowa. Badana kongruencja jest więc rzędu drugiego.

2°) Przetnijmy kongruencję prostych będących obrazami punktów płaszczyzny α dowolną płaszczyzną β i wyznaczmy prostą $k_1 = \alpha \cap \beta$. Z definicji rozważanego przekształcenia wynika, że tylko te punkty płaszczyzny α, które należą do łańcucha $k_1[A_1, A_2, A_3, \ldots]$ mogą mieć tę własność, że ich obrazy zawarte w płaszczyźnie β mogą stanowić elementy pęku prostych o wierzchołku $S = \beta \cap s$. Między łańcuchem $k_1[A_1, A_2, A_3, \ldots]$ i łańcuchem $s[S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}, \ldots]$ istnieje rzutowość, gdyż $S_{A_i} = s \cap \phi_{A_i}$, a ϕ_{A_i} ma zwykłe znaczenie, zatem łańcuchy $[k_1]$ i [s] wyznaczają pewną kwadrykę Γ, która jest zbiorem obrazów punktów łańcucha $[k_1]$. Przekrój kwadryki Γ płaszczyzną β (incydującą z prostą k_1) jest więc złożony z prostej k_1 oraz jeszcze innej prostej, która jest jedyną prostą, będącą obrazem środkowo-biegunowym pewnego punktu prostej k_1, przechodzącą przez ten punkt i i przez punkt S. Zatem badana kongruencja jest klasy pierwszej.

4. Określenie rzutu środkowo-biegunowego

Przekształcenie środkowo-biegunowe, omówione wcześniej, stanowi podstawę do utworzenia projektora rzutu środkowo-biegunowego.

Definicja. Zbiór promieni rzutujących punkty przestrzeni P^3 na dowolną, ale ustaloną płaszczyznę π (rzutnię), tworzą obrazy tych punktów wyznaczone w przekształceniu środkowo-biegunowym.

Z powyższej definicji wynika, że rzutem środkowo-biegunowym punktu jest na ogół punkt, jako przebicie rzutni π jednoznacznie określonym promieniem rzutującym środkowo-biegunowo. W szczególnym przypadku rzutem punktu może być prosta lub cała rzutnia. Rzutem prostej jest stożkowa lub pęk prostych, zaś rzutem płaszczyzny, w ogólnym przypadku, cała rzutnia.

5. Zagadnienie restytucji punktu

Twierdzenie 3. W każdej prostej przecinającej prostą s leży dokładnie jeden punkt rzutowany przez tę prostą.

Dowód. Niech r oznacza dowolną prostą przecinającą prostą s i $S_A = r \cap s$. Jeżeli łańcuch punktów $[A_i]$ prostej r przekształcimy na łańcuch punktów

przecięcia prostej r odpowiednimi płaszczyznami biegunowymi ϕ_{A_i} to otrzymamy na prostej r dwa szeregi inwolucyjne, więc danemu punktowi S_A odpowiada dokładnie jeden punkt pierwszego łańcucha i jest to punkt $A=\phi_{S_A}$ r.

Wniosek 2. Jeżeli dane są: S_A - środek rzutu punktu A i rzut A' środkowo-biegunowy punktu A, to restytucja punktu A jest wykonalna.

Twierdzenie 4. Każdy punkt $A' \neq S$ $(S=s\cap\pi)$ rzutni π może być uważany za rzut wszystkich punktów określonej stożkowej c^2 zawartej w płaszczyźnie $\sigma(A',s)$.

Dowód. Przyjęcie dowolnego punktu A' w rzutni π pozwala utworzyć pęk $A'[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ prostych incydujących z płaszczyzną $\sigma(A',s)$. Za pomocą tego pęku wyznaczymy na prostej s łańcuch perspektywiczny $s[S_1, S_2, S_3, \ldots]$ oraz rzutowy z nim pęk płaszczyzn biegunowych $s_\phi[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots]$. Pęk $[s_\phi]$ płaszczyzn przecięty płaszczyzną σ wyznacza z kolei pęk prostych $W[f_1, f_2, f_3, \ldots]$, gdzie $W=s_\phi\cap\sigma$ i $f_i=\phi_i\cap\sigma$. Prawdziwa jest przy tym relacja

$$A'[a_1, a_2, a_3, \ldots] \overline{\wedge} s[S_1, S_2, S_3, \ldots] \wedge s_\phi[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots] \overline{\wedge} W[f_1, f_2, f_3, \ldots],$$

więc ostatecznie

$$A'[A_1, A_2, A_3, \ldots] \wedge W[f_1, f_2, f_3, \ldots].$$

Obydwa pęki, $[A']$ oraz $[W]$, leżą w płaszczyźnie σ, a punkty przecięcia odpowiednich promieni tych pęków wyznaczają stożkową przechodzącą przez punkt A'. Punkty F_i tej stożkowej mają taką właściwość, że ich płaszczyzny biegunowe przecinają prostą s w wyjściowym łańcuchu $s[S_1, S_2, S_3, \ldots]$ i pary punktów $\{S_i, F_i\}$ są współliniowe z punktem A'.

Wniosek 3. Definicja rzutu środkowo-biegunowego nie określa operacji przeciwobrazu jednoznacznie.

LITERATURA

[1] Pascal E.: Repertoryum Matematyki Wyższej, t.2, Geometria. Warszawa 1901.

[2] Paszkowski R.: Przekształcenie biegunowe przestrzeni p^3 względem kwadryki Φ^2. Referat. Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna Geometrii Rzutowej i Wykreślnej. Częstochowa, 26-28.06.1978.

[3] Wantrych M.: Rzut środkowo-biegunowy. Referat. Tamże.

Recenzent: Doc. dr inż. Stanisław Ochoński

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1989 r.

ЦЕНТРАЛЬНО-ПОЛЬЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПРОЕКЦИЯ

Р е з ю м е

В статье рассматривается некоторое центрально-полярное преобразование пространства P^3, в котором базис создают: поверхность второй степени Φ и прямая s. В этом базисе, любой точке A соответствует прямая принадлежащая этой точке и точке, в которой полярная плоскость ϕ_A точки A относительно поверхности Φ пересекает прямую s.
Центрально-полярную проекцию любого элемента λ пространства P^3 получаем как пересечение центрально-полярного изображения элемента λ любой плоскостью проекции π. В общем случае проекция точки есть точкой, а прямой--кривая второй степени. Всякая прямая пересекающая прямую s содержит одну точку, которую она сама проецирует, а если есть данные центр проекции точки A и центрально-полярная проекция этой точки, то реститьцию можно исполнить.

CENTRAL-POLAR TRANSFORMATION AND PROJECTION

S u m m a r y

The paper deals with some central-polar transformation of the space P^3, whose basis consists of the undistorted quadric surface Φ and the straight line s. To any point A of the basis there is assigned a straight line running through this point, as well as the point at which the polar plane ϕ_A of point A versus the quadric surface Φ intersect the straight line s.

Central-polar projection of some element λ in the space P^3 is obtained by intersecting the central-polar image of the element λ by any projection surface, though fixed by the plane π. Thus, the central-polar projection of point is generally a point, and the projection of a straight line - a conic section. It has been proved that on each straight line intersecting the straight line s there is exactly one point projected by this straight line, and having got the data: centr of the projection of point A, and the central-polar projection of this point, then point A can by restituted.