ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 67 Nr kol. 1115

Krystyna MIŚTA

DRUGA WARIACJA FUNKCJI KLASY BIEBERBACHA-EILENBERGA

Streszczenie. W pracy rozważa się klasę funkcji $f(z)$ analitycznych i jednolistnych w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ o rozwinięciu $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$, spełniających warunek $f(z_1)\cdot f(z_2) \neq 1$ dla każdego $z_1, z_2 \in U$. Jest to klasa funkcji Bieberbacha-Eilenberga oznaczana przez $\mathcal{E}$.
Przy dodatkowym założeniu, że $f(z)$ jest analityczna na okręgu ∂U, krzywą Γ będącą brzegiem $D = f(U)$ poddaje się deformacji poprzez funkcję $w^*(w) = w \exp(\varepsilon\phi_1(w) + \varepsilon^2\phi_2(w))$, gdzie $\phi_1(w)$, $\phi_2(w)$ są funkcjami analitycznymi określonymi w otoczeniu Γ i spełniającymi warunek $\phi_i(w) = -\phi_i(\frac{1}{w})$, $i = 1,2$.
Po pracochłonnych obliczeniach otrzymuje się funkcję $f_2(z)$ daną wzorem (21), która jest drugą wariacją funkcji $f(z)$. Ponieważ funkcja $f_2(z)$ zależy od zachowania się funkcji $f(z)$ w wewnętrznym punkcie ζ, więc otrzymany wynik można poprzez aproksymację w sensie niemal jednostajnej zbieżności uogólnić na wszystkie funkcje klasy $\mathcal{E}$.

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną i jednolistną w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$, mającą rozwinięcie postaci $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$, taką, że

$$f(z_1)\, f(z_2) \neq 1 \quad \text{dla każdego } z_1,\ z_2 \in U . \tag{1}$$

Klasę takich funkcji oznaczamy przez $\mathcal{E}$.
Zakładamy dodatkowo, że $f(z)$ jest analityczna na okręgu ∂U. Niech $D = f(U)$, natomiast Γ niech oznacza brzeg D. Krzywą Γ, podobnie jak A. Chang, M.M. Schiffer i G. Schober w [1] poddajemy deformacji poprzez funkcję

$$w^*(w) = w \exp(\varepsilon\, \phi_1(w) + \varepsilon^2\phi_2(w)) , \tag{2}$$

gdzie funkcja $\phi_1(w)$ i $\phi_2(w)$ są funkcjami analitycznymi, określonymi w otoczeniu Γ i spełniającymi warunek

$$\phi_i(w) = -\phi_i(\tfrac{1}{w}) \quad \text{dla } i = 1,2 . \tag{3}$$

Rozwijając funkcję (2) w szereg Taylora według potęg ε, otrzymujemy wzór

$$w^*(w) = w + \varepsilon w\phi_1(w) + \varepsilon^2 w\left[\frac{1}{2}\phi_1^2(w) + \phi_2(w)\right] + o(\varepsilon^2). \tag{4}$$

Oznaczmy

$$\upsilon_1(w) = w\phi_1(w), \qquad \upsilon_2(w) = w\left[\frac{1}{2}\phi_1^2(w) + \phi_2(w)\right]. \tag{5}$$

Jeżeli ε jest dostatecznie małe, wówczas otrzymujemy nową analityczną krzywą Jordana Γ^* o wnętrzu D^* zawierającym początek układu współrzędnych. Na mocy twierdzenia Riemanna istnieje funkcja $f^*(z)$ analityczna, jednolistna w kole jednostkowym U, odwzorowująca to koło na obszar D^* taka, że $f^*(0) = 0$. W otoczeniu ∂U funkcja

$$z^*(z) = f^{*-1}\left[f(z) + \varepsilon\upsilon_1(f(z)) + \varepsilon^2\upsilon_2(f(z)) + \dots\right] \tag{6}$$

jest dobrze określona, analityczna i przekształca okrąg ∂U w siebie. Możemy napisać

$$z^*(z) = z\exp\left\{i(\varepsilon\psi_1(z) + \varepsilon^2\psi_2(z) + o(\varepsilon^2))\right\}. \tag{7}$$

gdzie funkcje $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ są funkcjami analitycznymi w otoczeniu ∂U i rzeczywistymi na ∂U.
Biorąc pod uwagę rozwinięcie funkcji $f^*(z)$ w szereg

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 f_2(z) + o(\varepsilon^2) \tag{8}$$

i rozwinięcie funkcji $f^*(z^*)$ w szereg Taylora według potęg ε

$$f^*(z^*) = f(z) + \varepsilon f^{*\prime}(z)\frac{\partial z^*}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[f^{*\prime}(z)\frac{\partial^2 z^*}{\partial\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} + f^{*\prime\prime}(z)\left(\frac{\partial z^*}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)^2\right] + o(\varepsilon^2), \tag{9}$$

otrzymujemy z (8) i (9) następujące rozwinięcie:

$$f^*(z^*) = f(z) + \varepsilon\left[f_1(z) + i\psi_1(z)\varphi(z)\right] + \varepsilon^2\left[f_2(z) + i\psi_1(z)zf_1'(z) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,z\varphi'(z)(i\psi_1(z))^2 + i\psi_2(z)\varphi(z)\right] + o(\varepsilon^2)\,, \tag{10}$$

gdzie $\varphi(z) = zf'(z)$.
Porównując współczynniki przy ε w odpowiednich potęgach we wzorach (6) i (10), otrzymujemy następujące związki

$$\begin{aligned} v_1(f(z)) &= f_1(z) + i\psi_1(z)\varphi(z) \\ v_2(f(z)) &= f_2(z) + i\psi_1(z)zf_1'(z) + \frac{1}{2}\,z\varphi'(z)(i\psi_1(z))^2 + i\psi_2(z)\varphi(z)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Chcemy określić funkcje $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$. Wiemy z (8), że funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ są analityczne w U, a funkcje $\psi_1(z)$ i $\psi_2(z)$ są rzeczywiste na ∂U i analityczne w otoczeniu ∂U.
To wystarcza do ich określenia. Korzystając z pierwszego ze związków (11) na okręgu ∂U zachodzi

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f_1(z)}{\varphi(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{v_1(f(z))}{\varphi(z)}\right\}.$$

Prawa strona jest znana i z normalizacji $f^*(z)$ mamy $f_1(0) = 0$, co jednoznacznie określa $f_1(z)$. Znając $f_1(z)$, możemy z pierwszego ze związków (11) otrzymać $\psi_1(z)$. W analogiczny sposób, korzystając z drugiego ze związków (11), możemy określić $f_2(z)$ i $\psi_2(z)$.
Niech

$$\phi_1(w) = e^{i\beta}\,\frac{w + w_o}{w_o^2(w-w_o)} - e^{i\beta}\,\frac{1 + w_o w}{w_o^2(1-w_o w)}\,, \qquad w_o \notin \partial f(U)\,, \tag{12}$$

β - dowolna liczba rzeczywista.

Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja $\phi_1(w)$ spełnia warunek (3). Wówczas funkcja $f_1(z)$ może mieć postać

$$f_1(z) = e^{i\beta}\,\frac{f(z)[f(z) + f(\zeta)]}{f^2(\zeta)[f(z) - f(\zeta)]} - e^{i\beta}\,\frac{f(z)[1 + f(z)\overline{f(\zeta)}]}{\overline{f^2(\zeta)}[1 - f(z)\overline{f(\zeta)}]} -$$

$$- \varphi(z)\left[e^{i\beta}\,\frac{z + \zeta}{\varphi^2(\zeta)(z-\zeta)} - e^{-i\beta}\,\frac{1 + z\bar{\zeta}}{\overline{\varphi^2(\zeta)}(1-\bar{\zeta}z)}\right], \tag{13}$$

gdzie ζ jest dowolnym punktem z U.

Z pierwszego ze związków (11) otrzymujemy

$$i\psi_1(z) = e^{i\beta}\,\frac{z + \zeta}{\varphi^2(\zeta)(z-\zeta)} - e^{-i\beta}\,\frac{1 + z\bar{\zeta}}{\overline{\varphi^2(\zeta)}(1-z\bar{\zeta})}. \tag{14}$$

Chcemy teraz wyznaczyć funkcje $f_2(z)$ i $\psi_2(z)$. W tym celu tak dobieramy $v_2(f(z))$, by część główna rozwinięcia $v_2(f(z))$ w szereg Laurenta w otoczeniu punktu ζ była równa części głównej rozwinięcia funkcji

$$i\psi_1(z)zf_1'(z) + \frac{1}{2}\,z\varphi'(z)(i\psi_1(z))^2.$$

Wtedy funkcja $i\psi_2(z)\varphi(z)$ będzie analityczna, a ze związku (11) wynika, że $\psi_2(z)$ będzie funkcją analityczną w kole U. Stosując zasadę odbicia Riemanna-Schwarza oraz twierdzenie Liouville'a wnioskujemy, że funkcja $\psi_2(z)$ jest funkcją stałą. Można przyjąć, że $\psi_2(z) \equiv 0$. W ten sposób z drugiego ze związków (11) otrzymujemy

$$v_2(f(z)) = f_2(z) + e^{2i\beta}A(z) + B(z) + e^{-2i\beta}C(z), \tag{15}$$

gdzie

$$A(z) = \frac{\varphi(z)[f(z) + f(\zeta)]}{f^2(\zeta)\varphi^2(\zeta)[f(z) - f(\zeta)]}\,\frac{z + \zeta}{z - \zeta} - 2\,\frac{\varphi(z)f(z)}{f(\zeta)\varphi^2(\zeta)[f(z) - f(\zeta)]^2}\,\frac{z - \zeta}{z - \zeta} -$$

$$-\frac{\varphi(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{f^2(\zeta)\varphi^2(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} - 2\,\frac{\varphi(z)f(z)}{f(\zeta)\varphi^2(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]^2}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi^4(\zeta)}\,z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)^2}{(z-\zeta)^2}\right], \tag{16}$$

$$B(z) = \frac{\varphi(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f^2(\zeta)\overline{\varphi^2(\zeta)}[f(z)-f(\zeta)]}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} + 2\,\frac{\varphi(z)f(z)}{f(\zeta)\overline{\varphi^2(\zeta)}[f(z)-f(\zeta)]^2}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} +$$

$$+\frac{\varphi(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{f^2(\zeta)\overline{\varphi^2(\zeta)}[1-f(z)f(\zeta)]}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} + 2\,\frac{f(z)\varphi(z)}{f(\zeta)\overline{\varphi^2(\zeta)}[1-f(z)f(\zeta)]^2}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} +$$

$$+\frac{1}{|\varphi(\zeta)|^4}\,z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)(1+z\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(1-z\bar{\zeta})}\right],$$

$$C(z) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi^4(\zeta)}\,z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})^2}{(1-z\bar{\zeta})^2}\right].$$

Funkcje $A(z)$ i $B(z)$ są analityczne w kole U poza punktem ζ. Części główne rozwinięć w szereg Laurenta tych funkcji w otoczeniu φ wyrażają się wzorami

$$A(z) = 2\,\frac{\zeta^3\varphi'(\zeta)}{\varphi^4(\zeta)}\,\frac{1}{(z-\zeta)^2} + \left\{2\,\frac{\zeta}{\varphi^3(\zeta)}\left[\frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)} + \zeta\,\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} - \frac{1}{2}\,\zeta^2\{f,\zeta\}\right] -\right.$$

$$\left. -\,2\,\frac{\zeta(1+f^2(\zeta))}{f^2(\zeta)\varphi(\zeta)[1-f^2(\zeta)]} - 4\,\frac{\zeta}{\varphi(\zeta)[1-f^2(\zeta)]^2}\right\}\frac{1}{z-\zeta} + \ldots, \tag{17}$$

$$B(z) = 4\,\frac{\zeta|\zeta|^2}{|\varphi(\zeta)|^4[1-|\zeta|^2]^2}\,\frac{1}{z-\zeta} + \ldots,$$

gdzie $\{f,\zeta\}$ oznacza operator Schwarza.

Przyjmując funkcję $\Phi_2(w)$ postaci

$$\phi_2(w) = xe^{2i\beta}\frac{w}{(w-w_o)^2} - xe^{2i\beta}\frac{w}{(1-ww_o)^2} + ye^{2i\beta}\frac{w+w_o}{w-w_o} -$$

$$- ye^{2i\beta}\frac{1+ww_o}{1-ww_o} + z\frac{w+w_o}{w-w_o} - z\frac{1+ww_o}{1-ww_o}, \tag{18}$$

gdzie x, y, z są pewnymi odpowiednio dobranymi współczynnikami, zauważamy, że $\phi_2(w)$ spełnia warunek (3).

Po dość pracochłonnych obliczeniach otrzymujemy, że szukana funkcja $\upsilon_2(f(z))$ wyraża się wzorem

$$\upsilon_2(f(z)) = e^{2i\beta}\left\{2\,\frac{\zeta f(\zeta)\varphi'(\zeta)-\varphi^2(\zeta)}{f^3(\zeta)\varphi^2(\zeta)}\left[\frac{f^2(z)}{[f(z)-f(\zeta)]^2} - \frac{f^2(z)}{[1-f(z)f(\zeta)]^2}\right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{M(\zeta)f^2(\zeta)-2\zeta\varphi'(\zeta)f(\zeta)+\varphi^2(\zeta)}{f^4(\zeta)\varphi^2(\zeta)} - \frac{2}{f^2(\zeta)[1-f^2(\zeta)]^2}\right]\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)} -$$

$$- \left[\frac{M(\zeta)f^2(\zeta)-2\zeta\varphi'(\zeta)+\varphi^2(\zeta)}{f^4(\zeta)\varphi^2(\zeta)} - \frac{2}{f^2(\zeta)[1-f^2(\zeta)]^2}\right]\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)} +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]^2}{f^4(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]^2} - \frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)][1+f(z)f(\zeta)]}{f^4(\zeta)[f(z)-f(\zeta)][1-f(z)f(\zeta)]} + \frac{1}{2}\,\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]^2}{f^4(z)[1-f(z)f(\zeta)]^2}\right\} +$$

$$+ 2\,\frac{|\zeta|^2\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)|\varphi(\zeta)|^4[1-|\zeta|^2]^2}\,\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)} -$$

$$- 2\,\frac{|\zeta|^2\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)|\varphi(\zeta)|^4[1-|\zeta|^2]^2}\,\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)}, \tag{19}$$

gdzie

$$M(\zeta) = \zeta^2\left[\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right)^2 - \frac{1}{2}\{f, \zeta\}\right]. \tag{20}$$

Druga wariacja dla funkcji klasy $\mathcal{E}$ na podstawie związków (15), (16), (19) wyraża się wzorem

$$f_2(z) = \frac{e^{2i\beta}}{\varphi^4(\zeta)}\left\{2\,\frac{[\zeta f(\zeta)\varphi'(\zeta) - \varphi^2(\zeta)]\varphi^2(\zeta)f^2(z)}{f^3(\zeta)[f(z) - f(\zeta)]^2} -\right.$$

$$- 2\,\frac{[\zeta f(\zeta)\varphi'(\zeta) - \varphi^2(\zeta)]\varphi^2(\zeta)f^2(z)}{f^3(\zeta)[1 - f(z)f(\zeta)]^2} +$$

$$+ \left[\frac{[M(\zeta)f^2(\zeta)-2\zeta\varphi'(\zeta)f(\zeta)+\varphi^2(\zeta)]\varphi^2(\zeta)}{f^4(\zeta)} - \frac{2\varphi^4(\zeta)}{f^2(\zeta)[1-f^2(\zeta)]^2}\right]\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)} -$$

$$- \left[\frac{[M(\zeta)f^2(\zeta)-2\zeta\varphi'(\zeta)f(\zeta)+\varphi^2(\zeta)]\varphi^2(\zeta)}{f^4(\zeta)} - \frac{2\varphi^4(\zeta)}{f^2(\zeta)[1-f^2(\zeta)]^2}\right]\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\varphi^4(\zeta)f(z)[f(z)+f(\zeta)]^2}{f^4(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi^4(\zeta)f(z)[1+f(z)f(\zeta)]^2}{f^4(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]^2} -$$

$$- \frac{\varphi^4(\zeta)f(z)[f(z)+f(\zeta)][1+f(z)f(\zeta)]}{f^4(\zeta)[f(z)-f(\zeta)][1-f(z)f(\zeta)]} - \frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f^2(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} +$$

$$+ 2\,\frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)f(z)}{f(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]^2}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} + \frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{f^2(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} +$$

$$\left.+ 2\,\frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)f(z)}{f(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]^2}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{2}\,z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)^2}{(z-\zeta)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{|\varphi(\zeta)|^4}\left\{\frac{2|\zeta|^2\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)[1-|\zeta|^2]^2}\,\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{2|\zeta|^2\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)[1-|\zeta|^2]^2}\,\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)} +\right.$$

$$+ \frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f^2(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} - \frac{2\varphi^2(\zeta)f(z)\varphi(z)}{f(\zeta)[f(z)-f(\zeta)]^2}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} - \tag{21}$$

$$- \frac{\varphi^2(\zeta)\varphi(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{f^2(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} - \frac{2\varphi^2(\zeta)f(z)\varphi(z)}{f(\zeta)[1-f(z)f(\zeta)]^2}\,\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} -$$

$$- z\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)(1+z\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(1-z\bar{\zeta})}\right]\Bigg\} + \frac{e^{-2i\beta}}{\varphi^4(\zeta)}\,\frac{1}{2}\,z\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})^2}{(1-z\bar{\zeta})^2}\right]. \tag{21}$$

Powyższy wzór otrzymaliśmy zakładając, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w kole domkniętym $\bar{U}$. Ponieważ funkcja (21) zależy od zachowania się funkcji $f(z)$ w wewnętrznym punkcie ζ, więc otrzymany rezultat można uogólnić poprzez aproksymację w sensie zbieżności niemal jednostajnej na wszystkie funkcje klasy $\mathcal{E}$.

Niech L będzie funkcjonałem liniowym ciągłym, określonym w klasie funkcji $\mathcal{E}$. Po dołączeniu do klasy $\mathcal{E}$ funkcji tożsamościowo równej zero, otrzymamy klasę zwartą, a więc funkcjonał L przyjmuje w klasie $\mathcal{E} \cup \{0\}$ wartość maksymalną. Niech $f(z) \in \mathcal{E}$ będzie funkcją ekstremalną ze względu na funkcjonał $\mathrm{Re}\{L\}$. Porównując $\mathrm{Re}\{L(f^*(z))\}$ z $\mathrm{Re}\{L(f(z))\}$, otrzymujemy

$$\varepsilon \mathrm{Re}\{L(f_1(z))\} + \varepsilon^2\,\mathrm{Re}\{L(f_2(z))\} + o(\varepsilon^2) \le 0 \tag{22}$$

dla wszystkich dostatecznie małych $\varepsilon > 0$. Dzieląc (22) obustronnie przez ε i zmierzając z ε do zera, uzyskujemy nierówność

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\beta}}{\varphi^2(\zeta)}\left[L\left(\frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\,\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)}\right) - L\left(\frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\,\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - L\left(\frac{\varphi(z)(z+\zeta)}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{1-z\bar{\zeta}}\right)}\right]\right\} \le 0\,. \tag{23}$$

Nierówność ta jest spełniona dla dowolnego, rzeczywistego β, a więc z (23) otrzymujemy równanie

$$\frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\left[L\left(\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)}\right) - L\left(\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)}\right)\right] -$$

$$- L\left(\frac{\varphi(z)(z+\zeta)}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{1-z\bar{\zeta}}\right)} = 0\,,$$

z którego możemy napisać równanie typu Schiffera dla funkcji klasy $\mathcal{E}$

$$\frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\left[L\left(\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]}{f(z)-f(\zeta)}\right) - L\left(\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]}{1-f(z)f(\zeta)}\right)\right] = q(\zeta)\,, \tag{24}$$

gdzie

$$q(\zeta) = L\left(\frac{\varphi(z)(z+\zeta)}{z-\zeta}\right) - L\left(\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{1-z\bar{\zeta}}\right)$$

jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu okręgu ∂U, rzeczywistą na ∂U. Równanie tego typu dla funkcji klasy $\mathcal{E}$ otrzymał J.A. Hummel i M.M. Schiffer w [2].

Dzieląc nierówność (22) przez ε^2 i stosując (24) oraz zmierzając z ε do zera, otrzymujemy nierówność

$$\mathrm{Re}\left\{L(f_2(z))\right\} \le 0\,, \tag{25}$$

którą możemy zapisać w postaci

$$\mathrm{Re}\left\{a\,e^{2i\beta} + b + c\,e^{-2i\beta}\right\} \le 0\,. \tag{26}$$

Nierówność (26) jest prawdziwa dla dowolnego $\beta \in R$, a więc także dla takiego β, dla którego $e^{2i\beta} = \dfrac{|a+\bar{c}|}{a+\bar{c}}$. W tym przypadku nierówność (26) przyjmuje postać

$$|a+\bar{c}| \le -\mathrm{Re}\, b. \tag{27}$$

Korzystając z tej nierówności dla funkcji $f_2(z)$, otrzymujemy

$$\Bigg|\left(\zeta\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} - \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\right)\zeta q'(\zeta) + \left(2\zeta\frac{\varphi'(\zeta)}{f(\zeta)} - 2\zeta^2\left(\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right)^2 - \frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)} +\right.$$

$$\left. + M(\zeta) - \frac{2\varphi^2(\zeta)}{[1-f^2(\zeta)]^2}\right)q(\zeta) + \frac{1}{2}\frac{\varphi^4(\zeta)}{f^4(\zeta)}\left[L\left(\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)]^2}{[f(z)-f(\zeta)]^2}\right) +\right.$$

$$\left. + L\left(\frac{f(z)[1+f(z)f(\zeta)]^2}{[1-f(z)f(\zeta)]^2}\right) - 2\,L\left(\frac{f(z)[f(z)+f(\zeta)][1+f(z)f(\zeta)]}{[f(z)-f(\zeta)][1-f(z)f(\zeta)]}\right)\right] -$$

$$- \frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\left[L\left(\frac{[f(z)+f(\zeta)]\varphi(z)(z+\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)}\right) - L\left(\frac{[1+f(z)f(\zeta)]\varphi(z)(z+\zeta)}{[1-f(z)f(\zeta)](z-\zeta)}\right)\right] +$$

$$+ 2\,\frac{\varphi^2(\zeta)}{f(\zeta)}\left[L\left(\frac{f(z)\varphi(z)(z+\zeta)}{[f(z)-f(\zeta)]^2(z-\zeta)}\right) + L\left(\frac{\varphi(z)f(z)(z+\zeta)}{[1-f(z)f(\zeta)]^2(z-\zeta)}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[L\left(z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)^2}{(z-\zeta)^2}\right]\right) + \overline{L\left(z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})^2}{(1-z\bar{\zeta})^2}\right]\right)}\right]\Bigg| \le$$

$$\le \mathrm{Re}\left\{- \frac{2|\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2}\,q(\zeta) - \frac{\varphi^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\left[L\left(\frac{[f(z)+f(\zeta)]\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{[f(z)-f(\zeta)](1-z\bar{\zeta})}\right) -\right.\right.$$

$$\left. - L\left(\frac{[1+f(z)f(\zeta)]\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{[1-f(z)f(\zeta)](1-z\bar{\zeta})}\right) + 2\,\frac{\varphi^2(\zeta)}{f(\zeta)}\,L\left(\frac{f(z)\varphi(z)(1+z\bar{\zeta})}{[f(z)-f(\zeta)]^2(1-\bar{z}\zeta)}\right) +\right.$$

$$\left. + L\left(z\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(z)(z+\zeta)(1+z\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(1-z\bar{\zeta})}\right]\right)\right\}.$$

Mnożąc nierówność (28) przez $(1 - |\zeta|)^2$, a następnie zmierzając z $|\zeta|$ do jedynki, otrzymujemy $-\frac{1}{2}\,q(\zeta) \le 0$, a stąd $q(\zeta) \le 0$ dla $|\zeta| = 1$.

LITERATURA

[1] Chang A., Schiffer M.M., Schober G.: On the second variation for univalent functions, Jurnal d'Analise Mathematique, 40 (1981), 203-239.

[2] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational methods for Bieberbach-Eilenberg functions and for pairs, Annales Academie Scientarum Fenice, Series A.I. Math. Vol. 3, (1977), 3-42.

SECOND VARIANCE OF THE FUNCTION OF A CLASS

S u m m a r y

The class of analytic and one-leaf functions $f(z)$ in a unit circle $U = \{z : |z| < 1,\ f(0) = 0$ with the expansion $f(z) = b_1 z + b_z z^2 + \ldots$, satisfying the condition $f(z_1) \cdot f(z_2) \ne 1$ for each $z_1, z_2 \in U$ has been consi-

dered in the paper. It is a class of Bieberbach-Eilenberg's functions marked with $\mathcal{E}$.
The curve Γ being the edge $D = f(U)$ is - at the additional assumption that $f(z)$ is analytic' on the cirde ∂U - subjected to deformation through the function $w^*(w) = w \exp(\varepsilon\phi_1(w) + \varepsilon^2\phi_2(w))$, where $\phi_1(w)$, $\phi_2(w)$ are analitic functions described within the environment Γ and satisfying the condition $\phi_i w = - \phi_i(\frac{1}{w})$, $i = 1,2$.
After work - consuming calculations the function $f_2(z)$ given by the formula (21), which is the second variance of the function $f(z)$ is obtained. Since the function $f_2(z)$ depends on the behavioour of the function $f(z)$ in the inner point ζ the obtained result can generalized over all functions of the class $\mathcal{E}$. It can be done through approximation meaning almost regular convergence.

Р е з ю м е

В настоящей работе рассмотрывается класс функции $f(z)$ аналитических и однолистных в единичнои круге $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ которые имеют развитие в ряд вида $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, и которые совершают условие $f(z_1)\cdot f(z_2) \neq 1$ для всех $z_1, z_2 \in U$. Это класс функции Бебэрбаха-Алленбэрга, которой обозначаем $\mathcal{E}$. При придабочном положении что $f(z)$ есть аналитическая тоже на округе ∂U, кривую Γ которая есть кромой $D = f(U)$ подвергается деформации через функцию $w^*(w) = w \exp(\varepsilon\phi_1(w) + \varepsilon^2\phi_2(w))$, где $\phi_1(w)$, $\phi_2(w)$ аналитические функции, определенные в окружении Γ которые совершают условие $\phi_i(w) = - \phi_i(\frac{1}{w})$, $i = 1,2$.
После трудоёмких вычислений получается функцию $f_2(z)$ определённую (21) которая является второй вариацией функции $f(z)$.
Так как функция $f(z)$ зависит от поведения функции $f_2(z)$ во внутренней точке ζ, мы можем этот результат обобщить через приблизительность в смысле однообразного сходства на все функции класса