ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 67 Nr kol. 1115

Brunon SZOCIŃSKI

POJECIE ROWNOWAZNOSCI GEOMETRII KLEINA

Streszczenie. Przestrzenią Kleina nazywamy trójkę (M,G,f), złożoną z dowolnego zbioru niepustego M, dowolnej grupy abstrakcyjnej G oraz z efektywnego działania f grupy G na zbiorze M. Obiektem geometrycznym tej przestrzeni nazywamy każdą trójkę (X,G,F), gdzie F jest działaniem grupy G na zbiorze niepustym X. Klasa wszystkich obiektów geometrycznych przestrzeni Kleina z odwzorowaniami ekwiwariantnymi jako morfizmami i składaniem takich odwzorowań jako kompozycją tworzy kategorię $OG(f)$. Parę $((M,G,f), OG(f))$ nazywamy geometrią Kleina przestrzeni Kleina (M,G,f). W pracy tej podano definicję równoważności dwóch geometrii Kleina i wykazano, że na to, aby geometrie Kleina dwóch przestrzeni Kleina były równoważne, potrzeba i wystarcza, aby przestrzenie te były równoważne.

1. POJĘCIE GEOMETRII KLEINA

Zgodnie z definicją podaną w skrypcie [1] obiektem abstrakcyjnym nazywamy trójkę

$$(X, G, F) , \tag{1.1}$$

złożoną z dowolnego zbioru niepustego X, dowolnej grupy abstrakcyjnej G oraz z działania F grupy G na zbiorze X, tzn. z odwzorowania $F\colon X \times G \longrightarrow X$, które spełnia dwa warunki:

$$\bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{g_1,g_2\in G} F(F(x,g_1),g_2) = F(x,g_2 \cdot g_1) ,$$

$$\bigwedge_{x\in X} F(x,e) = x ,$$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy G, zaś $g_2 \cdot g_1$ oznacza iloczyn w tej grupie. Warunki te nazywamy odpowiednio równaniem translacji i warunkiem identyczności. Jeżeli spełniony jest ponadto warunek efektywności:

$$\left[\bigwedge_{x \in X} F(x,g) = x \right] \Longrightarrow g = e ,$$

to obiekt (1.1) nazywamy efektywnym lub przestrzenią Kleina. Zbiór X nazywa się włóknem obiektu (1,1), zaś działanie F - prawem transformacji tego obiektu.

Obok obiektu (1.1) rozważmy drugi obiekt abstrakcyjny

$$(X_o, G_o, F_o) \tag{1.2}$$

oraz parę odwzorowań

$$(\psi, \varphi), \quad \psi : X \longrightarrow X_o, \quad \varphi : G \longrightarrow G_o , \tag{1.3}$$

gdzie φ jest homomorfizmem grupy G w grupę G_o. Odwzorowaniem ekwiwariantnym obiektu abstrakcyjnego (1.1) w obiekt (1.2) nazywamy każdą parę odwzorowań (1.3), spełniającą następujący warunek ekwiwariantności

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{g \in G} F_o(\psi(x), \varphi(g)) = \psi(F(x,g)). \tag{1.4}$$

Łatwo sprawdzić (por. [1]), że klasa wszystkich obiektów abstrakcyjnych, a także klasa wszystkich przestrzeni Kleina, z odwzorowaniami ekwiwariantnymi jako morfizmami i składaniem par odwzorowań (1.3) jako kompozycją, tworzą kategorie. Kategorie te oznaczamy odpowiednio przez OA oraz PK i nazywamy kategorią obiektów abstrakcyjnych oraz kategorią przestrzeni Kleina.

Obiektem geometrycznym (por. [1]) ustalonej przestrzeni Kleina

$$(M, G, f) \tag{1.5}$$

nazywa się każdy obiekt abstracyjny (1.1) oparty na tej samej grupie G, na której oparta jest przestrzeń Kleina (1.5).

Niech trójka

$$(X_1,\ G,\ F_1) \tag{1.6}$$

będzie obiektem geometrycznym przestrzeni (1.5), zaś para

$$(\psi,\ id_G),\quad \text{gdzie}\quad \psi : X \longrightarrow X_1\ , \tag{1.7}$$

odwzorowaniem ekwiwariantnym obiektu (1.1) w obiekt (1.6). Okazuje się, że klasa wszystkich obiektów geometrycznych danej przestrzeni Kleina (1.5) z odwzorowaniami ekwiwariantnymi postaci (1.7), jako morfizmami i składaniem takich odzworowań jako kompozycją, również tworzy kategorię. Oznaczać ją będziemy przez OG(f) i nazywać kategorią obiektów geometrycznych przestrzeni Kleina (1.5).

Z podanych powyżej definicji wynika od razu, że kategorie PK oraz OG(f) są podkategoriami kategorii OA.

Ponieważ klasy obiektów abstrakcyjnych, przestrzeni Kleina i obiektów geometrycznych ustalonej przestrzeni Kleina tworzą kategorie, dlatego aby określić pojęcie równoważności odpowiednich obiektów, należy wykorzystać pojęcie izomorfizmu w odpowiednich kategoriach (por. [1] i [3]). Obiekty abstrakcyjne (przestrzenie Kleina) (1.1) i (1.2) nazywamy abstrakcyjnie równoważnymi, jeżeli istnieje taka bijekcja $\psi : X \longrightarrow X_o$ i taki izomorfizm $\varphi : G \longrightarrow G_o$, że spełniony jest warunek ekwiwariantności (1.4). Dwa obiekty geometryczne (1.1) i (1.6) przestrzeni Kleina (1.5) nazywają się geometrycznie równoważnymi, gdy istnieje bijekcja $\psi : X \longrightarrow X_1$ spełniająca warunek

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{g \in G} F_1(\psi(x), g) = \psi(F(x,g))\ .$$

Łatwo zauważyć, ża każde dwa obiekty (1.1) i (1.6), które są geometrycznie równoważne, są również abstrakcyjnie równoważne. Powstaje pytanie, czy z abstrakcyjnej równoważności tych obiektów wynika ich geometryczna równoważność. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Stosowny przykład można znaleźć w pracy [3].

W skrypcie [1] kategorię OG(f) obiektów geometrycznych ustalonej przestrzeni Kleina (1.5) nazwano geometrią Kleina grupy G. Definicja ta budzi jednak pewne zastrzeżenia. Okazuje się bowiem, że obok danej przestrzeni Kleina (1.5) istnieją nierównoważne z nią obiekty efektywne kategorii OG(f).

Można udowodnić (por. [5]), że takich obiektów efektywnych istnieje nawet nieskończenie wiele. Powoduje to, że ta sama kategoria OG(f) jest geometrią Kleina nierównoważnych przestrzeni Kleina. Jak pokazali E. Siwek i E. Kasparek (wynik nieopublikowany) w kategorii OG(f) istnieją nawet prymitywne i tranzytywne przestrzenie Kleina, które nie są równoważne. Z podanych powyżej powodów przyjmiemy następującą definicję geometrii.

Definicja 1.1. Geometrią Kleina przestrzeni Kleina (1.5) nazywamy parę

$$((M, G, f), \; OG(f)),$$

złożoną z przestrzeni Kleina (1.5) i kategorii obiektów geometrycznych tej przestrzeni.

Pojęcie równoważności dwóch geometrii Kleina określimy za pomocą funktora prostego.

2. FUNKTOR PROSTY

Rozważmy dowolny obiekt abstrakcyjny

$$(X, G, F) \tag{2.1}$$

oraz izomorfizm

$$\varphi : \tilde{G} \longrightarrow G \tag{2.2}$$

grupy $\tilde{G}$ na grupę G, na której oparty jest obiekt (2.1).
Odwzorowanie

$$\tilde{F}: X \times \tilde{G} \longrightarrow X, \qquad \tilde{F}(x, \tilde{g}) := F(x, \varphi(\tilde{g}))$$

jest działaniem grupy $\tilde{G}$ na zbiorze X (por. [1]). Otrzymany w ten sposób obiekt abstrakcyjny

$$(X, \tilde{G}, \tilde{F}) \tag{2.3}$$

nazywamy obiektem indukowanym (lub wyznaczonym) przez obiekt (2.1) i izomorfizm (2.2).

Łatwo zauważyć (por. [3]), że zachodzi następujący prosty lemat.

Lemat 2.1. Obiekt (2.3) indukowany przez obiekt (2.1) i izomorfizm (2.2) jest abstrakcyjnie równoważny z obiektem (2.1), przy czym para (id_X, φ) jest izomorfizmem (kategorii OA) obiektu (2.3) na obiekt (2.1).

Niech teraz pary

$$((M, G, f), \ OG(f)) \tag{2.4}$$

$$((\bar{M}, \tilde{G}, \bar{f}), \ OG(\bar{f})) \tag{2.5}$$

będą geometriami Kleina odpowiednio przestrzeni Kleina

$$(M, G, f) \tag{2.6}$$

$$(\bar{M}, \tilde{G}, \bar{f}) . \tag{2.7}$$

Przez T_φ, gdzie φ jest izomorfizmem (2.2), oznaczmy przyporządkowanie, które:

1° każdemu obiektowi (2.1) kategorii OG(f) przyporządkowuje obiekt indukowany przez obiekt (2.1) i izomorfizm (2.2), tzn.

$$T_\varphi((X,G,F)) := (X,\tilde{G},\tilde{F}), \text{ gdzie } \tilde{F}(x,\tilde{g}) := F(x,\varphi(\tilde{g})) \tag{2.8}$$

2° każdemu morfizmowi (ψ, id_G) obiektu (2.1) kategorii OG(f) w obiekt

$$(X_1, G, F_1) \tag{2.9}$$

tej kategorii, przyporządkowuje parę $(\psi, id_{\tilde{G}})$, tzn.

$$T_\varphi((\psi, id_G)) := (\psi, id_{\tilde{G}}). \tag{2.10}$$

Można łatwo udowodnić (por. [5]) że obiekt abstrakcyjny

$$(M, \tilde{G}, \tilde{f}) , \quad \tilde{f}(p,\tilde{g}) := f(p,\varphi(\tilde{g})) , \tag{2.11}$$

indukowany przez przestrzeń Kleina (2.6) i izomorfizm (2.2) jest również przestrzenią Kleina. Wykażemy teraz, że zachodzi następujący lemat.

Lemat 2.2. Jeżeli przestrzeń Kleina (2.7) jest geometrycznie równoważna z przestrzenią Kleina (2.11), indukowaną przez przestrzeń (2.6) i izomorfizm (2.2), to przyporządkowanie T_φ określone wzorami (2.8) i (2.10) jest bijektywnym funktorem kowariantnym kategorii $OG(f)$ na kategorię $OG(\bar{f})$.

Dowód. Przyporządkowanie T_φ obiektom kategorii $OG(f)$ przyporządkowuje oczywiście obiekty kategorii $OG(\bar{f})$. Ponadto, jeżeli $(\psi,\ id_G)$ jest morfizmem (kategorii $OG(f)$) obiektu (2.1) w obiekt (2.9), to dla dowolnych $x \in X$ oraz $g \in G$ mamy

$$F_1(\psi(x), g) = \psi(F(x, g)).$$

Stąd

$$F_1(\psi(x), \varphi(\tilde{g})) = \psi(F(x, \varphi(\tilde{g})) ,$$

czyli dla dowolnych $x \in X$ oraz $\tilde{g} \in \tilde{G}$ zachodzi równość

$$\tilde{F}_1(\psi(x), \tilde{g}) = \psi(\tilde{F}(x, \tilde{g})) .$$

Oznacza to, że para $(\psi,\ id_{\tilde{G}})$ jest morfizmem (kategorii $OG(\bar{f})$) obiektu (2.8) w obiekt $T_\varphi((X_1, G, F_1))$, a zatem T_φ również morfizmom kategorii $OG(f)$ przyporządkowuje morfizmy kategorii $OG(\bar{f})$. Ponieważ morfizmami identycznościowymi obiektów (2.1) i (2.8) są pary $(id_X,\ id_G)$ i $(id_X,\ id_{\tilde{G}})$, więc w myśl (2.10) przyporządkowanie T_φ spełnia warunek

$$T_\varphi((id_X,\ id_G)) = (id_X,\ id_{\tilde{G}}) .$$

Ponadto, jeśli $\omega = (\psi,\ id_G)$ jest morfizmem obiektu (2.1) w obiekt (2.9), zaś $\omega_1 = (\psi_1,\ id_G)$ - morfizmem obiektu (2.9) w obiekt $(X_2,\ G,\ F_2)$, to wówczas

$$T_\varphi(\omega_1 \circ \omega) = T_\varphi((\psi_1 \circ \psi,\ id_G)) = (\psi_1 \circ \psi,\ id_{\tilde{G}})$$

oraz

$$T_{\varphi}(\omega_1) \circ T_{\varphi}(\omega) = (\psi_1, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) \circ (\psi, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = (\psi_1 \circ \psi, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) ,$$

a zatem T_{φ} spełnia także warunek

$$T_{\varphi}(\omega_1 \circ \omega) = T_{\varphi}(\omega_1) \circ T_{\varphi}(\omega) .$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że T_{φ} jest funktorem kowariantnym kategorii $OG(f)$ w kategorię $OG(\bar{f})$.

Z założenia przestrzenie Kleina (2.7) i (2.11) są geometrycznie równoważne. Istniej więc taka bijekcja $\psi : \bar{M} \longrightarrow M$, że spełniony jest warunek ekwiwariantności

$$\bigwedge_{\bar{p}\in\bar{M}} \bigwedge_{\tilde{g}\in\tilde{G}} f(\psi(\bar{p}), \varphi(\tilde{g})) = \psi(\bar{f}(\bar{p},\tilde{g})) .$$

Warunek ten można również zapisać w postaci

$$\bigwedge_{p\in M} \bigwedge_{g\in G} \bar{f}(\psi^{-1}(p), \varphi^{-1}(g)) = \psi^{-1}(f(p,g)).$$

Oznacza to, że przestrzeń (2.6) jest geometrycznie równoważna z przestrzenią indukowaną przez przestrzeń (2.7) i izomorfizm φ^{-1}. Stąd i z powyżej przeprowadzonych rozważań wynika, że możemy utworzyć funktor kowariantny $T_{\varphi^{-1}}$ kategorii $OG(\bar{f})$ w kategorię $OG(f)$. Łatwo zauważyć, że funktory T_{φ} oraz $T_{\varphi^{-1}}$ spełniają związki

$$T_{\varphi} \circ T_{\varphi^{-1}} = \mathrm{id}_{OG(\bar{f})} , \quad T_{\varphi^{-1}} \circ T_{\varphi} = \mathrm{id}_{OG(f)} .$$

Wynika stąd, że T_{φ} jest funktorem bijektywnym . □

Definicja 2.1. Bijektywny funktor kowariantny T kategorii obiektów geometrycznych $OG(f)$ przestrzeni Kleina (2.6) na kategorię obiektów geometrycznych $OG(\bar{f})$przestrzeni Kleina (2.7) nazywa się prostym, jeżeli spełnia warunki:

(a) istnieje taki izomorfizm φ grupy $\tilde{G}$ na grupę G, że dla każdego obiektu (2.1) i dla każdego morfizmu (ψ, id_G) kategorii OG(f) zachodzą związki:

$$T((X,G,F)) = T_\varphi((X,G,F)), \quad T((\psi, id_G)) = T_\varphi((\psi, id_G)),$$

(b) przestrzeń Kleina (2.7) jest geometrycznie równoważna z przestrzenią T((M,G,f)).

Pewne własności funktora prostego podają poniższe dwa lematy. Z lematu 2.1 wynika od razu pierwszy z nich.

Lemat 2.3. Jeżeli T jest funktorem prostym kategorii OG(f) na kategorię OG($\bar{f}$), to dowolny obiekt (2.1) kategorii OG(f) jest abstrakcyjnie równoważny z obiektem T(X,G,F)).

Lemat 2.4. Przestrzenie Kleina (2.7) i (2.6) są równoważne (abstrakcyjnie) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funktor prosty kategorii OG(f) na kategorię OG($\bar{f}$).

Dowód. Załóżmy, że przestrzenie (2.7) i (2.6) są równoważne. Istnieje wówczas taka para odwzorowań

$$(\psi, \varphi), \quad \psi : \bar{M} \longrightarrow M, \quad \varphi : \tilde{G} \longrightarrow G,$$

gdzie φ jest izomorfizmem grupy $\tilde{G}$ na grupę G, że spełniony jest warunek ekwiwariantności

$$\bigwedge_{\bar{p}\in\bar{M}} \bigwedge_{\tilde{g}\in\tilde{G}} f(\psi(\bar{p}), \varphi(\tilde{g})) = \psi(\bar{f}(\bar{p},\tilde{g})) . \tag{2.12}$$

Stąd wobec (2.11), mamy

$$\bigwedge_{p\in M} \bigwedge_{g\in G} \tilde{f}(\psi(\bar{p}),\tilde{g}) = \psi(\bar{f}(\bar{p},\tilde{g})) \tag{2.13}$$

Za pomocą izomorfizmu φ możemy utworzyć funktor T_φ, przy czym w myśl (2.13) przestrzeń Kleina (2.7) jest geometrycznie równoważna z przestrzenią

$$(M,\ \tilde{G},\ \tilde{f}) = T_{\varphi}((M,\ G,\ f))\ ,$$

a zatem T_{φ} jest funktorem prostym.

Na odwrót, jeżeli istnieje funktor prosty kategorii OG(f) na kategorię OG($\bar{f}$), to na mocy (b) istnieje taka bijekcja $\psi : \bar{M} \longrightarrow M$, że zachodzi związek (2.13). Z zależności (2.11) i (2.13) wynika wówczas, że spełniony jest warunek ekwiwariantności (2.12), co dowodzi równoważności przestrzeni Kleina (2.7) i (2.6). □

3. RÓWNOWAŻNOŚĆ DWÓCH GEOMETRII KLEINA

Wyżej podane własności funktora prostego uzasadniają przyjęcie następującej definicji.

Definicja 3.1. Geometrię Kleina (2.4) przestrzeni Kleina (2.6) nazywamy równoważną z geometrią Kleina (2.5) przestrzeni Kleina (2.7), jeżeli istnieje funktor prosty kategorii OG(f) na kategorię OG($\bar{f}$).

Łatwo zauważyć, że relacja równoważności geometrii Kleina jest relacją równoważnościową, tzn. jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Z powyższej definicji i lematu 2.4 wynika natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. Geometrie Kleina (2.4) i (2.5), odpowiednio przestrzeni Kleina (2.6) i (2.7), są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie te są równoważne.

Bardziej naturalną od definicji 3.1 byłaby następująca definicja równoważności geometrii: Geometrie Kleina (2.4) i (2.5) nazywamy równoważnymi, gdy istnieje bijektywny funktor kowariantny T kategorii OG(f) na kategorię OG($\bar{f}$), spełniający warunek:

$$T((M,\ G,\ f)) = (\bar{M},\ \tilde{G},\ \bar{f})$$

Z tak przyjętej definicji musiałoby również wynikać twierdzenie 3.1. Dowód tego twierdzenia w tym przypadku nie jest jednak znany i na razie nie wiadomo jak go przeprowadzić.

LITERATURA

[1] Kucharzewski M.: Własności przestrzeni Kleina I, Pol. Śl., Gliwice 1985 (skrypt).
[2] Kucharzewski M.: Własności przestrzeni Kleina II, Pol. Śl., Gliwice 1986 (skrypt).
[3] Kucharzewski M., Szociński B., Żabka M.: On the relations between abstract and geometrical equivalence of abstract objects, Ann. Polon. Math. (w druku).
[4] Semadeni Z., Wiweger A.: Wstęp do teorii kategorii i funktorów, Warszawa 1978.
[5] Szociński B.: Podstawowe pojęcia geometrii Kleina (w opracowaniu).

EQUIVALENCE OF KLEIN GEOMETRIES

S u m m a r y

Any triplet (M,G,f) consisting of a nonempty set M, abstract group G and an effective operation f of the group G on the set M will be called Klein space. A triplet (X,G,F), where F is an operation of the group G on a nonempty set X, will be called a geometric object of this space. The class of all geometric objects of Klein space with equivariant mappings as morphisms and superposition of such mappings as composition forms the category OG(f). The pair ((M,G,f), OG(f)) will be called a Klein geometry of Klein space (M,G,f). The paper gives the definition of equivalence of two Klein geometries. It is proven that the necessary and sufficient condition for two Klein geometries to be equivalent is that the spaces are equivalent.

ПОНЯТИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГЕОМЕТРИИ КЛЕЙНА

Р е з ю м е

Тройку (M,G,f), составлену из произвольного непустого множества M, произвольной, абстрактной группы G эффективного действия f группы G на множество M, называем пространством Клейна. Тройку (X,G,F), где F -действие группы G на непустом множествие X называем геометрическом обьектом этого пространства. Класс всех геометрических объектов простраиства Клейна морфизмами которого эквивариантные отображения, суперпозиция этих отображений это композиция является категорей OG(f).
Пару ((M,G,f), OG(f)) называем геометрию Клейна пространства Клейна (M,G,f). В этой работе представлено понятие эквивалентности геометрии Клейна и доказано что геометрие Клейна двух пространств Клейна эквивалентные тогда и только тогда когда эти пространства эквивалентные.