ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 67 Nr kol. 1115

Andrzej MACH

SUR L'EFFECTIVITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE TRANSLATION

Summary. In this paper the necessary and sufficient condition of effectivity of certain solutions of the translation equation on the semigroups of the positive elements of a linearly ordered and archimedian group is given. The examples contained in the paper show applications of this condition.

Soit Γ un ensemble arbitraire non-vide et soit $(G, +, e, \leq)$ un groupe linéairement ordonné et archimédien. Par G^+ désignons le demi-groupe de ces éléments non-négatifs.

Soit $F : \Gamma \times G^+ \longrightarrow \Gamma$ une solution de l'équation de translation

$$F(\alpha, x + y) = F(F(\alpha, x), y) , \tag{1}$$

remplissant la condition

$$\bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma} (O(\alpha_1) \cap O(\alpha_2) \neq \phi \Longrightarrow O(\alpha_1) \subset O(\alpha_2) \text{ ou } O(\alpha_2) \subset O(\alpha_1)) , \tag{2}$$

où $O(\alpha) := F(\alpha, G^+)$.

On sait ([1]) qu'on peut obtenir chaque solution F par la

construction C:

1) Soit $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ une fonction telle que

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} f(f(\alpha)) = f(\alpha) .$$

2) Décomposons $f(\Gamma) = \bigcup_{k\in K} \Gamma_k$ en ensembles Γ_k non-vides, disjoints et tels que pour chaque k de K il existe une décomposition invariante*) $\{W_{ik}\}_{i\in I_k}$ d'un intervalle J_k de G pour lequel $G^+ \subset J_k$ et la puissance $|J_k|$ de J_k est égale à la puissance de Γ_k.

3) Soit $h_k : \{W_{ik}\}_{i\in I_k} \longrightarrow \Gamma_k$ une bijection et définissons

$$g_k(x) := h_k(W_{ik}) \quad \text{pour} \quad x \in W_{ik} .$$

4) Posons

$$F(\alpha,x) := \}g_k(g_k^{-1}(f(\alpha)) + x)\{ \quad \text{pour} \quad f(\alpha) \in \Gamma_k ,$$

où $\}A\{$ désigne l'élément de l'ensemble A qui n'a q'un seul élément et $g_k^{-1}(f(\alpha))$ désigne la contre-image de l'ensemble $\{f(\alpha)\}$.

On sait aussi ([2]) que chaque décomposition invariante de J_k doit être de la forme:

(i) il existe un élément u de la complétion de G tel que les points de l'intervalle $\Delta_k := \{x \in J_k : x \int u\}$, où $\int = \leq$ ou $\int = <$, forment les composantes de cette décomposition (peut être $\Delta_k = \phi$),

(ii) les autres composantes de la décomposition considérée sont des restrictions à l'ensemble $J_k \setminus \Delta_k$ des classes d' équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe G_k.

Dans le travail [3] on formule en outre une condition nécessaire mais non-suffisante pour que la solution de l'équation de translation soit effective, c'est-à-dire pour laquelle l'application $G^+ \ni x \longrightarrow F(\cdot,x) \in \Gamma^\Gamma$ soit univalente. Cette condition est suivante:

$$\bigvee_{k\in K} \Delta_k \neq \phi \quad \text{ou} \quad N = \{e\} , \quad \text{ou} \quad N := \bigcap_{l\in K} G_l . \tag{3}$$

---

*) La famille des ensembles $\{W_{ik}\}_{i\in I_k}$ est dite une décomposition invariante de J_k, si

$$J_k = \bigcup_{i\in I_k} W_{ik}, \bigwedge_{i\in I_k} W_{ik} \neq \phi , \bigwedge_{i\neq j} W_{ik} \cap W_{jk} = \phi, \bigwedge_{\substack{i\in I_k \\ x\in G^+}} \bigvee_{j\in I_k} W_{ik} + x \subset W_{jk} .$$

Le but de cette note est de donner une condition équivalente à ce sujet.

Pour chaque k de l'ensemble K désignons

$$B_k := \{x-y : x,y \in \Delta_k\} .$$

Remarquons que les ensembles $\{B_k\}_{k\in K}$ forment une chaine.

Théorème. Soient $(G, +, e, \leq)$ un groupe linéairement ordonné et archimédien, G^+ son demi-groupe des éléments non-négatifs et Γ un ensemble arbitraire. La solution $F : \Gamma \times G^+ \longrightarrow \Gamma$ donnée par la construction C de l'équation de translation (1) (remplissant (2) dans ce cas) est effective si et seulement si la condition

$$N = \{e\} \quad \text{ou} \quad G^+ \subset \bigcup_{k\in K} B_k \tag{4}$$

est remplie.

Demonstration "si". Supposons d'abord que $N = \{e\}$ et que $F(\alpha,x) = F(\alpha,y)$ pour certains x,y de G^+ et pour chaque α de Γ. On peut poser que $x-y \in G^+$. Nous avons

$$\bigwedge_{k\in K} \bigwedge_{\alpha\in\Gamma_k} F(F(\alpha,y),x-y) = F(\alpha,y) ,$$

et de là

$$\bigwedge_{k\in K} x-y \in G_k \cap G^+ ,$$

d'où $x-y \in N = \{e\}$, donc $x = y$.

Alors la solution F est effective.

Supposons maintenant que $G^+ \subset \bigcup_{k\in K} B_k$ et que $x,y \in G^+$ et $x \neq y$.

Puisque les ensembles $\{B_k\}_{k\in K}$ forment une chaîne donc il existe k_o de K tel que $x,y \in B_{k_o}$, et $\max\{x,y\} < z-t$ pour certains z,t de Δ_{k_o}. Soit $\alpha := g_{k_o}(t)$. Nous avons $t \le t+x < z$ et $t \le t+y < z$, donc $t+x,\ t+y \in \Delta_{k_o}$. De là $g_{k_o}(t+x) \ne g_{k_o}(t+y)$, d'où

$$F(\alpha,x) = g_{k_o}(t+x) \ne g_{k_o}(t+y) = F(\alpha,y) .$$

Alors la solution F est effective.

Cela achève la demonstration "si".

Demonstration "seulement si". Supposons que la condition (4) n'est pas remplie, donc $N \ne \{e\}$ et $G^+ \not\subset \bigcup_{k\in K} B_k$. Puisque $G^+ \setminus \bigcup_{k\in K} B_k$ forme un intervalle pas superieurement borné on peut prendre x,y de G^+ tels que $x,y \notin \bigcup_{k\in K} B_k$ et $x-y \in N \cap G^+\setminus\{e\}$. Nous avons de là

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} f(\alpha) \in \Gamma_k \Longrightarrow (g_k^{-1}(f(\alpha)) + x \subset J_k\setminus\Delta_k \quad \text{et} \quad g_k^{-1}(f(\alpha)) + y \subset J_k\setminus\Delta_k),$$

puisque dans le cas contraire nous aurions, pour certain α de Γ, $f(\alpha) \in \Gamma_k$, $g_k^{-1}(f(\alpha)) \in \Delta_k$ et de là $x \in B_k$ ou $y \in B_k$, donc la contradiction.
Il résulte de susdit que pour α de Γ et k de K tel que $f(\alpha) \in \Gamma_k$:

$$F(\alpha,y) = \}g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))+y)\{=\}g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))+y+x-y)\{=\}g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))+x)\{= F(\alpha,x),$$

alors puisque $x \ne y$, la solution F n'est pas effective.

Cela achève la preuve du théorème.

Remarque. Il est visible d'après la preuve du théorème qu' on peut remplacer la condition (4) par la condition équivalente:

$$N = \{e\} \text{ ou il existe } k \text{ de } K \text{ tel que l'ensemble } B_k \tag{5}$$

n'est pas superieurement borné ou chaque l'ensemble B_k est superieurement borné et $G^+ \subset \bigcup_{l\in K} \langle e, b_l)$, où

$$b_1 := \begin{cases} \sup B_1^{*)}, & \text{si } B_1 \neq \phi \text{ et } B_1 \text{ est supérieurement borne,} \\ e\,, & \text{si } B_1 = \phi\,. \end{cases}$$

La condition (5) est commode pour les applications.

Remarquons encore que la condition (3) résulte évidemment de la condition (4) et de la condition (5) aussi.

Dans le travail [3] on donne un exemple de la solution $F : \Gamma \times G^+ \to \Gamma$ de (1) remplissant (2) et (3) et n'étant pas en même temps effective. Nous présenterons cette solution ci-dessous dans exemple 1 et montrerons que la condition (4) n'est pas remplie ici.

Exemple 1. Soient $G = (R, +, 0, \le)$, $K = \{1\}$, $G_1 = Z$, où Z désigne l'ensemble des nombres entiers, $\Gamma = \Gamma_1 := [-2,1)$, $J_1 := [-2, +\infty)$, $\Delta_1 :=$ $:= [-2,0)$, $f = id_\Gamma$,

$$g_1(x) := \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ de } [-2,0)\,, \\ M(x) & \text{pour } x \text{ de } [0, +\infty)\,, \end{cases}$$

où $M(x)$ désigne la mantisse de x.

Posons

$$F(\alpha,x) = \}g_1(g_1^{-1}(\alpha) + x)\{ \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Gamma\,, \quad x \in R^+\,.$$

Nous avons $\Delta_1 \neq \phi$ et $N = Z \neq \{0\}$, donc la condition (3) est remplie, mais la condition (4) n'a pas évidemment lieu, car $B_1 = (-2,2)$ et $R^+ \not\subset B_1$. La solution F n'est pas effective, car par exemple $F(\cdot,3) = F(\cdot,4)$.

Nous donnerons encore deux exemples des solutions effectives et montrerons pourquoi la condition (4) (ou la condition (5)) est remplie dans ces cas.

Exemple 2. Soient $G = (R, +, 0, \le)$, $K = \{1\}$, $G_1 = Z$, $\Gamma = \Gamma_1 := (-\infty,1)$, $J_1 := (-\infty, \infty)$, $\Delta_1 := (-\infty, 0)$, $f = id_\Gamma$,

*) Si le groupe G n'est pas complet, dans ce cas nous prenons $\sup B_1$ dans la complétion de G.

$$g_1(x) := \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ de } (-\infty, 0) , \\ M(x) & \text{pour } x \text{ de } [0, +\infty) . \end{cases}$$

Posons

$$F(\alpha, x) := \}g_1(g_1^{-1}(\alpha) + x)\{ \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Gamma, \quad x \in R^+ .$$

La solution F est effective, car pour chaque de R^+, $x \neq y$, et α de $(-\infty, 0)$ tel que $|\alpha| > \max\{x, y\}$, nous avons $F(\alpha, x) \neq F(\alpha, y)$.
Il est visible que l'ensemble B_1 n'est pas supérieurement borné, donc la condition (5) est remplie.

Exemple 3. Soient $G = (R, +, 0. \leq)$ et $K = IN$, où IN désigne l'ensemble des nombres naturels. Pour chaque k de K définissons: $J_k := [-k, \infty)$, $\Delta_k := [-k, 0]$, $\Gamma_k := [4^k, 4^k + k] \cup [4^k + k + 1, 4^k + k + 2)$, $\Gamma = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$, $f = id_\Gamma$, $G_k = Z$,

$$g_k(x) := \begin{cases} x + 4^k + k & \text{pour } x \text{ de } [-k, 0] , \\ M(x) + 4^k + k + 1 & \text{pour } x \text{ de } (0, +\infty) . \end{cases}$$

Posons

$$F(\alpha . x) := \}g_k(g_k^{-1}(\alpha) + x)\{ \qquad \text{pour} \quad \alpha \text{ de } \Gamma_k \text{ et } x \text{ de } R^+ .$$

Il est visible que pour chaque l de K l'ensemble B_l est supérieurement borné, $b_l = l$, et $R^+ \subset \bigcup_{l \in K} \langle 0, l)$, donc la condition (5) est remplie. Pour chaque x, y de G^+ et $x \neq y$, ils existent l de IN et t de $[-l, 0]$ tels que $\max\{x, y\} < -t$. De là pour $\alpha := g_l(t)$ nous avons

$$F(\alpha, x) = g_l(t + x) \neq g_l(t + y) = F(\alpha, y) ,$$

alors la solution F est effective.

TRAVAUX CITÉS

[1] Moszner Z.: Solution générale de l'équation de translation sur un demi-groupe, Rocznik Nauk. Dydak. WSP w Krakowie, Travaux Math. IX (1979), p. 97-104.

[2] Moszner Z.: Décomposition invariantes du demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe archimédien, Tensor 34 (1980), p. 8-10.

[3] Moszner Z.: Sur les propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation, Annales Pol. Math., 52 (1990), p. 27-36.

O EFEKTYWNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA TRANSLACJI

S t r e s z c z e n i e

W pracy podano warunek konieczny i dostateczny efektywności pewnych rozwiązań równania translacji na półgrupach elementów nieujemnych grupy liniowo uporządkowanej i archimedesowskiej. Zilustrowano też zastosowanie tego warunku na przykładach.

О ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРАНСЛЯЦИИ

Р е з ю м е

В настоящей работе приведено необходимое и достаточное условие эффективности некоторых решений уравнения трансляции на полугруппах положительных элементов линейно упорядоченной и архимедовой группы. В работе данные примеры, которые показывают применения этого условия.