ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 64 Nr kol. 1070

DEDICATED TO PROFESSOR MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI
WITH BEST WISHES ON HIS 70TH BIRTHDAY

Zenon MOSZNER

LES OBJETS ABSTRAITS COMME LES SYSTEMES DES SOUS-GROUPES

La théorie des objets abstraits, amorcée par la définition de la notion de l'objet géométrique donnée par A. Wundheiler [6], a attendue beaucoup des travaux, des généralisations et des monographies. Les listes des élaborations à ce sujet les plus complètes sont données dans [1], [2], [3]. Dans cette note je veux attirer l'attention sur le fait que la théorie des objets abstraits sur un groupe c'est en vérité la théorie des systèmes des sous-groupes de ce groupe et je donne quelques remarques à ce sujet.

On sait [3] que par l'objet abstrait on comprend la trois (M,G,F), où M est un ensemble arbitraire, G forme un groupe noté multilicativement avec l'élément neutre e et $F: M\times G \longrightarrow M$ est une fonction remplissante l'équation de translation

$$F\big(F(\alpha,g),g'\big) = F(\alpha,gg') \tag{1}$$

pour chaque α de M et chaques g,g' de G et la condition d'identité

$$F(\alpha,e) = \alpha \tag{2}$$

pour chaque α de M.

On dit que l'objet (M,G,F) est équivalent abstraitement à l'objet (M',G,F') s'il existe une bijection h de M sur M' et un automorphisme φ de G tels que

$$F'(h(\alpha),\varphi(g)) = h(F(\alpha,g)) \tag{3}$$

pour chaque α de M et chaque g de G.

Si ici $\varphi = id|_G$ nous disons que ces objets sont équivalents géométriquement.

Si la condition (3) est remplie pour une surjection h de M sur M' et pour $\varphi = id|_G$ nous disons que l'objet (M',G,F') est un comitant de l'objet (M,G,F).

L'exemple simple de l'objet abstrait est suivant. Soit G un groupe, $\{G_k\}_{k\in K}$ le système des sous-groupes de G, G/G_k la famille des classes d'équivalence à droit du groupe G par rapport à G_k et posons

$$M^* = \bigcup_{k\in K} \bigcup_{C\in G/G_k} (k,C)$$

et

$$F^*((k,C),g) = (k,Cg). \tag{4}$$

Dans ce cas (M^*,G,F^*) est un objet abstrait, nomé dans la suite l'objet spécial. Cet objet est déterminé uniquement par le système des sous-groupes G_k pour k de K, donc il sera désigné dans la suite par $\{G_k\}_{k\in K}$. C'est un exemple en quelque sens universel puisque il est vrai le

Théorème 1. Chaque objet abstrait (M,G,F) est équivalent géométriquement à un objet spécial.

Démonstration. On sait [4] que la fonction F remplissante (1) et (2) est de la forme

$$F(\alpha,g) = g_k^{-1}(g_k(\alpha)g) \qquad \text{pour } \alpha\in M_k, \tag{5}$$

où $\{M_k\}_{k\in K}$ est une décomposition de M, c'est-à-dire

$$M = \bigcup_{k\in K} M_k, \quad \forall k\in K: M_k \neq \Phi, \ \forall k,l\in K: (k\neq l \Longrightarrow M_k\cap M_l = \Phi),$$

de telle maniere qu'il existe, pour chaque k de K, un sous-groupe G_k de G dont l'indice est égal à la puissance de M_k et g_k est une bijection de M_k sur G/G_k. La fonction $h(\alpha):=(k,g_k(\alpha))$ pour α de M_k est une bijection de M sur $\bigcup_{k\in K} \bigcup_{C\in G/G_k} (k,C)$ pour laquelle a lieu $h(F(\alpha,g)) = F^*(h(\alpha),g)$, où F^* est donnée par (4), c.q.f.d.

Remarquons que l'objet spécial dans le théorème 1 c'est le système des sous-groupes de stabilité, formés pour les points d'un sélecteur de la famille des fibres transitives de l'objet (M,G,F). Plus précisément la construction de cet objet spécial est suivante (voir [4]). Considérons la famille des classes d'équivalence (ces sont les fibres transitives) de la relation ϱ définie sur M comme il suit: $\alpha\varrho\beta \Longleftrightarrow \exists g\in G: F(\alpha,g) = \beta$ et un sélecteur S arbitraire de cette famille. L'objet spécial en considération c'est le système des sous-groupes de G sous la forme $\{g\in G | F(x,g) = x\}$ pour x de S.

Voila les trois exemples très simples.

1) Si (M,G,F) est un scalaire, c.à d. si $F(\alpha,g) = \alpha$ pour chaque α de M et chaque g de G, dans ce cas l'objet spécial équivalent à ce objet c'est le système $\{G_\alpha\}_{\alpha\in M}$, où $G_\alpha = G$ pour chaque α de M.

2) Si $(R,GL(n,R),F)$ est un biscalaire, c.à d. si $F(\alpha,A) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Det}A)\,\alpha$ pour chaque α de R et chaque A de $GL(n,R)$, dans ce cas l'objet spécial en considération c'est le système $\{G_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$, où $G_0 = GL(n,R)$ et $G_\alpha = \{A\in GL(n,R) \mid \mathrm{Det}\ A>0\}$ pour $\alpha > 0$. Dans le cas plus général le biscalaire c'est le système composé d'un groupe G (ou non) et des sous-groupes d'indice 2 de ce groupe.

3) Pour le vectuer contravariant $(R^n,GL(n,R),F)$, où $F(\alpha,A) = A\alpha$, l'objet spécial en considération est égal à $\{G,G'\}$, où $G = GL(n,R)$ et G' c'est la famille des matrices de $GL(n,R)$ qui ont la première colonne sous la forme $(1,0,\ldots,0)$. L'ensemble $\{G,G''\}$, où G'' c'est la famille des matrices de $GL(n,R)$ dont la deuxième colonne a la forme $(0,1,0,\ldots,0)$, forme aussi un objet spécial équivalent au vecteur contravariant. L'objet spécial dans le théorème 1 n'est pas donc uniquement déterminé. Nous verrons d'après le théorème 2 qu'il est déterminé avec précision jusqu'aux sous-groupes conjugués.

Il résulte du théorème 1 qu'on peut identifier l'objet abstrait avec un système des sous-groupes du groupe, sur lequel nous considérons cet objet. Il se pose donc le problème quelle répercussion aux ces sous-groupes ont les propriétés complémentaires des objets. Soit (M,G,F) un objet abstrait et considérons les propriétés suivantes.

a) Transitivité, c.à d. la condition suivante

$$\forall \alpha,\beta\in M\ \exists g\in G:\ F(\alpha,g) = \beta,$$

est équivalente à la condition que la puissance $|K|$ de K est égale à 1.

b) Presque-transitivité, c.à d. la condition suivante

$$\forall \alpha,\beta\in M\ \exists g\in G: F(\alpha,g) = \beta \ \text{ ou } \ F(\beta,g) = \alpha,$$

est équivalente à la transitivité.

c) Transitivité simple, c.à d. la transitivité et univalence $F(\alpha,g)$ par rapport à la variable g pour chaque α de M, est équivalente aux conditions $|K| = 1$ et $G_k = \{e\}$ pour chaque k de K.

d) L'effectivité, c.à d. la condition

$$\forall g\in G\left[\forall\alpha\in M: F(\alpha,g) = \alpha \Longrightarrow g = e\right],$$

est univalente à la condition $N := \bigcap_{k\in K} \bigcap_{g\in G} g^{-1}G_k g = \{e\}$.
L'objet effectif est dit aussi l'espace de Klein.

e) La condition: G opère par F d'une manière libre sur M, c.à d.

$$\forall g \in G \; \{\exists \alpha \in M : F(\alpha, g) = \alpha \Longrightarrow g = e\},$$

est équivalente à la condition : $G_k = \{e\}$ pour chaque k de K.

f) La condition: F est disjointe, c.à d.

$$\forall \alpha \in M \; \forall g, g' \in G\,[F(\alpha, g) = F(\alpha, g') \Longrightarrow \forall \beta M : F(\beta, g) = F(\beta, g')],$$

est équivalente à la condition: $G_k = N$ pour chaque k de K.

Les équivalences énoncées plus hatu sont démontrées dans [5].

Nous avons aussi le

Théorème 2. Les deux objets spéciaux $\{G_k\}_{k\in K}$ et $\{G_t\}_{t\in T}$ sont équivalents si et seulement s'il existe une bijection $b: K \to T$, un automorphise φ de G et une fonction $f: K \to G$ tels que

$$\varphi(G_k) = [f(k)]^{-1} G_{b(k)} f(k) \tag{6}$$

pour chaque k de K.

Démonstration de "si"

Au commencement nous allons démontrer que la focntion h définie comme il suit

$$h((k, G_k a)) = (b(k), G_{b(k)} f(k)\varphi(a))$$

est une bijection de l'ensemble $E_1 = \bigcup_{k\in K} \bigcup_{C\in G/G_k} (k, C)$ sur l'ensemble $E_2 = \bigcup_{t\in T} \bigcup_{C\in G/G_t} (t, C)$. La fonction h est bien définie sur E_1 puisque si $G_k a = G_k a'$ nous avons

$$f^{-1}(k) G_{b(k)} f(k)\varphi(a) = \varphi(G_k a) = \varphi(G_k a') = f^{-1}(k) G_{b(k)} f(k)\varphi(a'),$$

d'où

$$G_{b(k)} f(k)\varphi(a) = G_{b(k)} f(k)\varphi(a).$$

Considérons $(t,G_tc) \in E_2$ et soit k tel que $b(k) = t$. De plus soit a tel que $f(k)\varphi(a) = c$. Dans ce cas $h(k,G_ka)) = (t,G_tc)$. Supposons à présent que

$$(b(k),G_{b(k)}f(k)\varphi(a)) = (b(k'),G_{b(k')}f(k')\varphi(b)).$$

Il en résulte que $b(k) = b(k')$, d'où $k = k'$ et

$$G_{b(k)}f(k)\varphi(a) = G_{b(k)}f(k)\varphi(b).$$

De là

$$f(k)\varphi(a)[\varphi(b)]^{-1}[f(k)]^{-1} \in G_{b(k)},$$

d'où

$$\varphi(ab^{-1}) \in [f(k)]^{-1}G_{b(k)}f(k) = \varphi(G_k).$$

Il en résulte que $ab^{-1} \in G_k$ et de là $G_ka = G_kb$, d'où $(k,G_ka) = (k',G_{k'}b)$. La fonction h est donc univalente.

Il a lieu aussi la condition (3) pour la fonction h et l'automorphisme φ dans la supposition. En effet

$$F'(h((k,G_ka)),\varphi(g)) = (b(k),G_{b(k)}f(k)\varphi(a)\varphi(g)) =$$

$$(b(k),G_{b(k)}f(k)\varphi(ag)) = h((k,G_kag)) = h(F((k,G_ka),g)).$$

<u>Démonstration de "seulement si"</u>

D'après la supposition il existe une bijection h de E_1 sur E_2 tel que (3) a lieu, d'où en désignant

$$h((k,C)) = (h_1((k,C)), h_2((k,C))),$$

où $h_1: E_1 \longrightarrow T$ et $h_2: E_1 \longrightarrow \bigcup_{t \in T} G/G_t$, nous avons

$$h_1((k,Cg)) = h_1((k,C)) \tag{7}$$

et

$$h_2((k,Cg)) = h_2((k,C))\varphi(g). \tag{8}$$

Il résulte de (7) que $h_1((k,C))$ ne dépend pas de la variable C, donc nous pouvons écrire $h_1((k,C)) = h'_1(k)$.

Soit k un élément fixé de K et désignons $h_2((k,C)) = h'_2(C)$. La fonction $h'_2(C)$ est définie sur G/G_k et elle est univalente puisque $h'_2(C) = h'_2(C')$ nous donne

$$h((k,C)) = (h'_1(k), h'_2(C)) = (h'_1(k), h'_2(C')) = h((k,C')),$$

d'où $C = C'$.

Nous avons d'après (3):

$$h'_2(Cg) = h'_2(C)\varphi(g).$$

En posant ici $C = G_k$ on a

$$h'_2(G_k g) = h'_2(G_k)\varphi(g). \tag{9}$$

Il existe un t' de T tel que $h'_2(G_k) = G_{t'}a$ pour un a de G. D'après (9) on a

$$h'_2(G_k g) = G_{t'}a\varphi(g).$$

Il en résulte pour chaque g de G_k que

$$G_{t'}a = h'_2(G) = G_{t'}a\varphi(g),$$

d'où

$$a\varphi(g)a^{-1} \in G_{t'} \text{ pour chaque } g \text{ de } G_k$$

et de là

$$a\varphi(G_k)a^{-1} \subset G_{t'}.$$

Nous allons montrer l'implication inverse. Remarquons que d'après (9) pour chaque g de G

$$h'_2(G_k\varphi^{-1}(a^{-1}ga)) = h'_2(G_k m)a^{-1}ga = G_{t'}aa^{-1}ga = G_{t'}ga,$$

d'où pour g de $G_{t'}$

$$h'_2(G_k\varphi^{-1}(a^{-1}ga)) = G_{t'}a = h'_2(G_k)$$

et de là: $G_k\varphi^{-1}(a^{-1}ga) = G_k$, puisque la fonction h_2' est univalente. Il en résulte que pour g de $G_{t'}$:

$$\varphi^{-1}(a^{-1}ga) \in G_k,$$

d'où $a^{-1}ga \in \varphi(G_k)$ pour g de $G_{t'}$. Enfin

$$G_{t'} \subset a\varphi(G_k)a^{-1}, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Nous avons donc la conclusion suivante

pour chaque k de K il existe un t' de T et un a de G tels que (10)

$$G_{t'} = a\varphi(G_k)a^{-1}. \tag{11}$$

Définissons la fonction $b: K \to T$ de la manière suivante: $b(k) = t'$ s'il existe a de G tel que $h_2'(G_k) = G_{t'}a$. La fonction b est bien définie sur K puisque si $G_{t'}a = h_2'(G_k) = G_{t''}a'$, donc

$$(t', G_{t'}a) = (h_1'(k), h_2'(G_k)) = h((k, G_k)) = (h_1'(k), h_2'(G)) =$$
$$= (t'', G_{t''}a'),$$

d'où $t' = t''$. Supposons que $b(k) = b(k') = t'$, donc il existe a et a' tels que

$$h_2((k, G_k)) = G_{t'}a \text{ et } h_2((k', G_{k'})) = G_{t'}a'. \tag{12}$$

La fonction h^{-1} remplit la condition

$$h^{-1}(F'(\beta, \varphi(g))) = F(h^{-1}(\beta), g)$$

pour chaque β de E_2 et chaque g de G. En désignant

$$h^{-1}((t, C)) = (h_1^*(t, C), h_2^*(t, C))$$

nous constatons comme plus haut que $h_1^*(t, C)$ ne dépend pas de C, donc nous pouvons la écrire sous la forme $h_1^*(t)$, donc

$$h^{-1}((t, C)) = (h_1^*(t), h_2^*(t, C)). \tag{13}$$

D'après (12) nous avons

$$h((k,G_k)) = (t',G_t a) \text{ et } h((k',G_{k'})) = (t',G_{t'}a'),$$

d'où

$$h^{-1}((t',G_{t'}a)) = (k,G_k) \text{ et } h^{-1}((t',G_{t'}a')) = (k',G_{k'}).$$

Il en résulte d'aprés (13) que

$$h^{-1}((t',G_{t'}a)) = (h_1^* t'), h_2^*(t',G_t a)) = (k,G_k),$$

d'où $h_1^*(t') = k$ et

$$h^{-1}((t',G_t a')) = (h_1^*(t'),h_2^*(t',G_t a')) = (k',G_{k'}),$$

d'où $h_1^*(t') = k'$. De là $k = k'$. La fonction b est donc univalente. Cette fonction est une surjection de K sur T puisque la fonction h est une surjection de E_1 sur E_2.

Si nous posons $f(k) = a$, où a est le même comme dans (10), nous avons de (11) que (6) a lieu. La démonstration du théorème 2 est donc terminée.

<u>Corollaire 1</u>. Les deux objets spéciaux transitifs $\{G_1\}$ et $\{G_2\}$, où $G_1 \subset G$ et $G_2 \subset G$, sont équivalentes géométriquement si et seulement s'il existe un a de G tel que

$$G_2 = aG_1a^{-1}.$$

De la même manière que le théorème 2 on peut démontrer le

<u>Théorème 3</u>. L'objet spécial $\{G_t\}_{t\in T}$ est un comitant de l'objet spécial $\{G_k\}_{k\in K}$ si et seulement s'il existe une surjection $b:K \to T$ et une fonction $f:K \to G$ tels que

$$G_k \subset [f(k)]^{-1} G_{b(k)} f(k)$$

pour chaque k de K.

Il résulte de ce théorème et du théorème 2 que la désignation des comitants d'un objet spécial $\{G_k\}_{k\in K}$ se réduit, avec précision à l'équivalence, à la détermination des sur-groupes des groupes G_k. D'après le théorème 1 nous avons la même situation pour les objets abstraits arbitraires.

Coome une application des considérations plus haut nous démontrerons le

Théorème 4. Dans un espace de Klein (X,G,F) transitif il existe un objet effectif et transitif qui n'est pas équivalent abstraitement à cet espace si et seulement s'il existe un sous-groupe G_1 de G, non-trivial ($\{e\} \neq G_1 \neq G$) et tel que

$$\bigcap_{a\in G} a^{-1}Ga = \{e\}. \tag{14}$$

Démonstration de "si"

Soit x' un élément fixé de X et posons

$$G_2 := \{g \in G \mid F(x',g) = x'\}.$$

Considérons les deux cas:

$$G_2 = \{e\} \tag{a}$$

ou

$$G_2 \neq \{e\}. \tag{b}$$

Ad (a). L'objet spécial $\{G_1\}$ est transitif et effectif. Nous allons démontrer qu'il n'est pas équivalent à l'espace de Klein considéré. En effet dans le cas contraire il existerait une bijection h de X sur G/G_1 et un automorphisme φ de G tels que

$$h(F(x,g)) = h(x)\varphi(g) \tag{15}$$

pour chaque x de X et chaque g de G. Fixons x_1 tel que $h(x_1) = G_1$, soit g_1 de G tel que $x_1 = F(x',g_1)$ et supposons que $F(x_1,g) = F(x_1,g')$. De là $F(x',g_1g) = F(x',g_1g')$, d'où

$$F(x',g_1g(g_1g')^{-1}) = F(x',e) = x'.$$

Il en résulte que $g_1g(g_1g')^{-1} \in G_2 = \{e\}$, d'où $g_1g(g_1g')^{-1} = e$ et de là $g = g'$. La fonction $F(x_1,\cdot)$ est donc injective, donc la fonction $h(F(x_1,\cdot))$ est univalente. Pour g, g' de G tels que $g \neq g'$ et $\varphi(g)$, $\varphi(g') \in G_1$ on a

$$h(x_1)\varphi(g) = G_1\varphi(g) = G_1 = G_1\varphi(g') = h(x_1)\varphi(g'),$$

donc une contradiction avec (15).

<u>Ad (b)</u>. L'objet spécial $\{e\}$ est transitif et effectif et il n'est pas équivalent à notre espace de Klein, puisque le membre droit de la relation (15) est pour $x = x'$ univalente par rapport à g et pour le membre gauche et g, g' de G_2 et $g \neq g'$ nous avons

$$h(F(x',g)) = h(x') = h(F(x',g')).$$

<u>Démonstration de "seulement si"</u>

Supposons qu'il n'existe pas un sous-groupe G_1, non-trivial, pour lequel (14) a lieu, c.à d.que $G_1 = \{e\}$ est le seul sous-groupe pour lequel on a (14). Nous allons démontrer que chaque objet transitif et effectif est équivalent abstraitement (et même géométriquement) à notre espace de Klein. Soit (M,G,F') un tel objet. Dans ce cas

$$F'(m,g) = f^{-1}(f(m)g),$$

où f est une bijection de M sur G. De même raison

$$F(x,g) = l^{-1}(l(x)g),$$

où l est une bijection de X sur G. En posant $h = f^{-1}l$ et $\varphi = id|_G$ nous constatons que h est une bijection de X sur M et nous avons

$$h(F(x,g)) = F'(h(x),\varphi(g)).$$

La démonstration du théorème 4 est donc finie.

Nous donnerons un <u>exemple</u> d'un groupe G pour lequel il existe un sous-groupe G_1, non-trivial et remplissant (14).

Soit H un groupe pour lequel il existe un sous-groupe H_1 pas normal. Posons $H_2 = \bigcap_{a \in G} a^{-1} H_1 a$ et $G = H/H_2$. Dans ce cas $G_1 = H_1/H_2$ sera le sous-groupe exigé. En effet nous démontrerons (14), c.à d.que

$$\bigcap_{[a] \in G} [a]^{-1} G_1 [a] = [e].$$

Soit $[x] \in \bigcap_{[a] \in G} [a]^{-1} G_1 [a]$. Dans ce cas il existe un $b(a)$ de H_1 tel que

$$[x] = [a]^{-1} H_2 b(a) [a] = [a^{-1} b(a) a],$$

d'où $xa^{-1}b(a)^{-1}a \in H_2$. Il existe donc un $c(a)$ de H_1 tel que

$$xa^{-1}b(a)^{-1}a = a^{-1}c(a)a.$$

Il en résulte que

$$x = a^{-1}c(a)b(a)a \in a^{-1}H_1a$$

pour chaque a de H. De là $x \in H_2$, d'où $[x] = [e]$.

Remarque. La condition dans le théorème 4 est équivalent à la suivante: il existe dans notre espace de Klein un objet transitif et effectif, mais pas transitif simplement.

On sait que pour les objets abstraits le groupoïde de Brandt (ou plue général de Ehresmann) est une structure plus convenable que le groupe. Pour cette structure les considération analogues aux actuelles seront le sujet d'une note suivante.

REFERENCES

[1] Aczél J. und Gołąb S.: Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, Warszawa 1960.

[2] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych, Katowice 1969.

[3] Kucharzewski M.: Własności przestrzeni Kleina I, II, Gliwice 1985-1986.

[4] Moszner Z.: Structure de l'automate plein, reduit et inversible, Aequationes Math. 9 (1973), 46-59.

[5] Moszner Z.: Sur les propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation, sous presse dans Annal. Polon. Math.

[6] Wundheiler A.: Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien, Trudy Semin. po Wektor. i Tenzor. Analizu 4 (1937), 366-375.