ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 68 Nr kol. 1147

Marian PALEJ
Anna POGONOWSKA

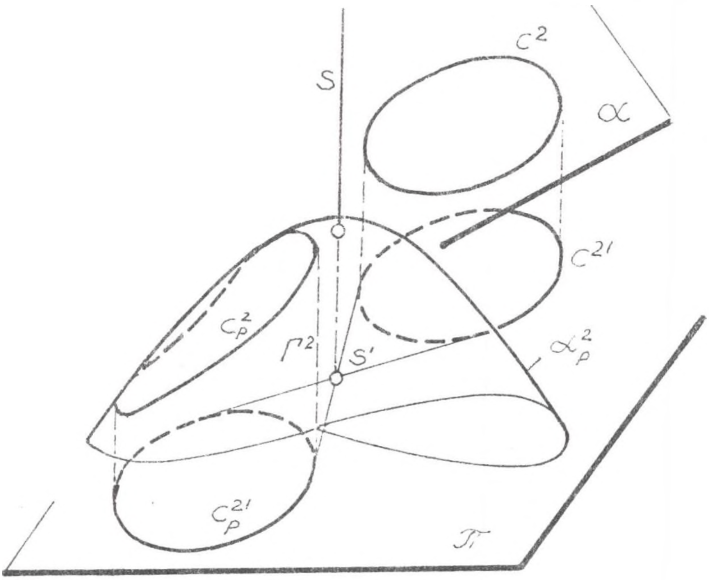
OBRAZY UTWORÓW STOPNIA DRUGIEGO W SZCZEGÓLNYM PRZYPADKU PRZEKSZTAŁCENIA TRÓJBIEGUNOWEGO

Streszczenie. Praca stanowi kontynuację badań nad szczególnym przypadkiem przekształcenia biegunowego, w którym bazą są trzy paraboloidy obrotowe o wspólnej, stycznej w wierzchołkach płaszczyźnie, a obraz dowolnego punktu jest częścią wspólną trzech odpowiednich płaszczyzn biegunowych. Udowodniono siedem twierdzeń, z których najważniejsze orzekają, zę obrazem ogólnie położonej stożkowej jest krzywa rzędu szóstego zdegenerowana zawsze do krzywej rzędu czwartego i pary prostych niewłaściwych, natomiast obrazem ogólnie położonej kwadryki jest powierzchnia rzędu szóstego składająca się z powierzchni rzędu czwartego oraz podwójnie liczonej płaszczyzny niewłaściwej.
Rozpatrzono również przekształcenie szczególnie przyjętych krzywych i powierzchni stopnia drugiego względem bazy kwadryk.

W pracy [1] omówiono szczególny przypadek przekształcenia trójbiegunowego, w którym bazę stanowią trzy przystające paraboloidy obrotowe o wspólnej, stycznej w wierzchołkach płaszczyźnie i zgodnych zwrotach osi, a obraz dowolnego punktu otrzymuje się z przecięcia trzech płaszczyzn przyporządkowanych biegunowo temu punktowi w odniesieniu do każdej z trzech kwadryk bazy.

W przekształceniu tym szczególną rolę odgrywa prosta "s" równoległa do osi paraboloid.
Dowiedziono m.in.,że obrazem ogólnie położonej prostej jest parabola i prosta niewłaściwa, obrazem płaszczyzny - paraboloida eliptyczna wraz z płaszczyzną niewłaściwą oraz że prosta "s" połowi odcinek ograniczony dowolnym punktem właściwym i jego obrazem.

W artykule niniejszym poddano analizie utwory stanowiące obrazy krzywych i powierzchni stopnia drugiego.



Rys. 1

1. Przyjmijmy dowolną stożkową c^2 ogólnie położoną względem kwadryk bazy (rys. 1). Rozważmy prostokątny rzut stożkowej c^2 oraz jej obrazu c_p^2 na płaszczyznę prostopadłą do osi paraboloid. Ponieważ, jak wspomniano wyżej, prosta "s" rozdziela symetrycznie obraz punktu i jego oryginał - punkt s' stanowiący rzut prostej "s" będzie środkiem symetrii zachodzącej pomiędzy rzutem stożkowej c^2 i jej obrazu c_p^2.
Stąd otrzymujemy:

Twierdzenie 1

Rzuty w kierunku $k \parallel s$ ogólnie położonej stożkowej c^2 oraz jej obrazu c_p^2 są stożkowymi środkowo-symetrycznymi; środkiem symetrii jest rzut prostej "s" - punkt s'.

Wniosek 1

Obraz ogólnie położonej stożkowej c^2 leży na powierzchni walcowej Γ^2, której kierująca jest stożkową środkowo-symetryczną względem rzutu c^2 w kierunku $k \parallel s$, a tworzące - równoległe do prostej "s".

Ponieważ wiadomo [1], że obrazem ogólnie położonej płaszczyzny α jest paraboloida eliptyczna α_p^2 wraz z płaszczyzną niewłaściwą τ^∞ - można wnosić, że obraz stożkowej c^2 należącej z jednej strony do powierzchni walcowej Γ^2

- z drugiej - do paraboloidy α_p^2 i płaszczyzny τ^∞ jest ich elementem wspólnym, tj.

$$c_p^2 = \left\{\alpha_p^2 \cup \tau^\infty\right\} \cap \Gamma^2$$

Linia przenikania paraboloidy α_p^2 z powierzchnią walcową Γ^2 jest przestrzenną krzywą rzędu czwartego, natomiast przekrój powierzchni walcowej Γ^2, płaszczyzną niewłaściwą τ^∞ zawierającą wierzchołek tej powierzchni, jest parą tworzących niewłaściwych (rzeczywistych, różnych lub zjednoczonych, bądź urojonych). Stąd:

Twierdzenie 2

Obrazem ogólnie położonej stożkowej c^2 jest krzywa rzędu szóstego zdegenerowana zawsze do krzywej rzędu czwartego i pary prostych niewłaściwych (różnych lub zjednoczonych).

Zauważyć warto, że w przypadku, gdy stożkowa c^2 jest:

a) elipsą,

b) parabolą,

c) hiperbolą,

uzupełnienie krzywej rzędu czwartego do krzywej rzędu szóstego - obrazu tej stożkowej jest:

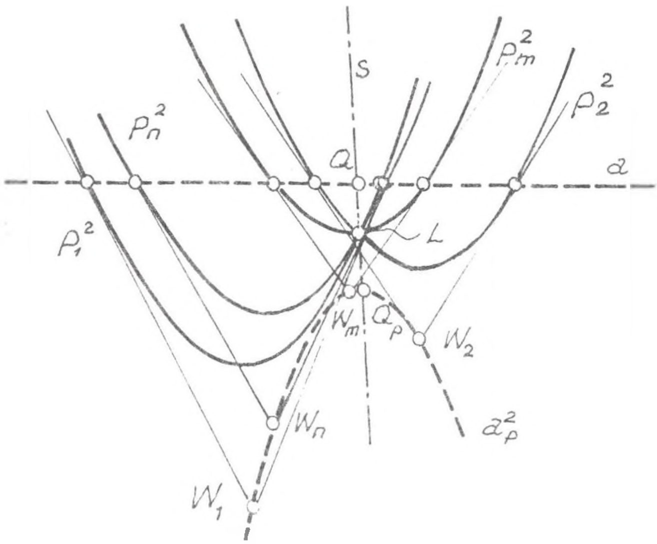
a) parą prostych niewłaściwych, urojonych,

b) jedną rzeczywistą prostą niewłaściwą (parą zjednoczonych prostych niewłaściwych),

c) parą różnych, rzeczywistych prostych niewłaściwych.

Rozważmy jeszcze szczególne położenie stożkowej c^2, w którym zawierająca ją płaszczyzna α spełnia warunek $\alpha \parallel s$. Ponieważ obrazem płaszczyzny α jest płaszczyzna $\alpha_p \parallel \alpha$ (wraz z płaszczyzną niewłaściwą τ^∞) wnosimy, że na obraz stożkowej c^2 składać się będzie płaska krzywa $f \in \alpha_p$ oraz $g \in \tau^\infty$. Łatwo ustalić, że f jest krzywą rzędu czwartego. Wystarczy bowiem rozważyć stożkową c^2, jako zbiór punktów przecięcia homologicznych promieni dwóch rzutowych pęków (W_1) i (W_2). Każdy promień (W_1) bądź (W_2) przechodzi w rozpatrywanym przekształceniu na parabolę pęku (W_{1p}), bądź (W_{2p}) oraz prostą niewłaściwą przynależną do wspólnego środka parabol punkt $S^\infty \in s$. Ponieważ przekształcenie nie narusza relacji rzutowych - obraz stożkowej c^2 powstaje z przecięcia homologicznych parabol pęków (W_1) i (W_2) oraz homologicznych promieni dwóch pęków prostych niewłaściwych o wspólnych środku S^∞.

Łatwo jednak zauważyć, że obydwa pęki prostych niewłaściwych redukują się do jednej prostej sprzężonej z płaszczyzną α - prostej g^{∞} $(g^{\infty} \perp \alpha)$.



Rys. 2

Tak więc sformułować można:

Twierdzenie 3

Obrazem stożkowej leżącej w płaszczyźnie $\alpha \parallel s$ jest krzywa rzędu szóstego zdegenerowana do płaskiej krzywej rzędu czwartego i podwójnie liczonej prostej niewłaściwej.

Gdy wreszcie stożkowa c^2 była parabolą o środku S^{∞}, można by przewidywać, że obraz c_p^2 ulegnie dalszej degeneracji. Przewidywanie takie potwierdza następujące rozumowanie. Rozważmy dowolną prostą q_p leżącą w płaszczyźnie α_p, stanowiącej element obrazu płaszczyzny $\alpha \in c^{2^p}$.

Niech:

1° - $q_p \notin S^{\infty}$

Wiadomo, że w rozpatrywanym przekształceniu prostej q_p odpowie parabola q^2 wraz z prostą niewłaściwą $t^{\infty} \in S^{\infty}$, $t^{\infty} \notin \alpha$. Ponieważ część wspólną właściwą stożkowej c^2 (parabola) z utworem $q^2 \cup t^{\infty}$ stanowią dwa punkty, można wnosić, że dowolna prosta $q_p \notin S^{\infty}$ przecina krzywą c_p^2 zawsze w dwóch punktach właściwych. Pozwala to na stwierdzenie, że c_p^2 jest krzywą stopnia drugiego. Niech z kolei:

2^o - q_p

W takim przypadku obrazem prostej q_p w rozważanym przekształceniu jest prosta $q \in S^\infty$ oraz płaszczyzna niewłaściwa τ^∞.

Utwór $q \cup \tau^\infty$ przecina parabolę c^2 w jednym punkcie niewłaściwym - S^∞. Implikuje to istnienie w układzie $q_p \cup c^2_p$ elementu niewłaściwego, przy czym wobec ustaleń 1^o może to być tylko jeden punkt niewłaściwy - S^∞. Można zatem wypowiedzieć

Twierdzenie 4

Obrazem ogólnie przyjętej paraboli o środku S^∞ jest krzywa zdegenerowana do paraboli współśrodkowej oraz płaszczyzna niewłaściwa τ^∞.

W tym miejscu należałoby zrobić uwagę, że na zasadzie przyporządkowania dowolnej prostej "a" - odpowiednio skonstruowanej paraboli a^2_p jest możliwe takie przyjęcie paraboli c^2 by elementem jej obrazu była nie parabola, jak orzeka to twierdzenie 4, lecz prosta c_p.

Prześledźmy warunki, w których elementem obrazu paraboli będzie prosta. W tym celu (rys. 2) powróćmy do konstrukcji paraboli będącej przekształceniem dowolnej prostej. Przy przyjętych parabolach bazy p^2_1, p^2_2 (tj. przekrojach płaszczyzną zawierającą oś "s" dwóch spośród trzech paraboloid bazy [1]) obraz dowolnej prostej a tworzą rzutowe pęki prostych o wierzchołkach W_1, W_2 gdzie W_1, W_2 są biegunami tej prostej względem parabol p^2_1, p^2_2.

Ponieważ zamiana parabol p^2_1, p^2_2 na inną parę p^2_m, p^2_n parabol przystających i należących do pęku (L, S^∞) zgodnie z właściwością pęku [1], [2] nie zmienia wyników przekształcenia - możemy wnosić, że ten sam obraz prostej a - parabola a^2_p powstanie wówczas, gdy rozważymy rzutowe pęki prostych o wirzchołkach W_m, W_n stanowiących bieguny prostej a względem parabol p^2_n, p^2_m. Stwierdzamy więc, że punkty W_n, W_m są elementami paraboli a^2_p, a w dalszej konsekwencji, że obraz prostej a zawiera tzw. stożkową biegunową tej prostej względem pęku parabol (L, S^∞). Prawdziwy jest więc

Lemat 1

Elementem obrazu dowolnej prostej a przecinającej oś "s" w punkcie właściwym jest parabola a^2_p, będąca stożkową biegunową tej prostej względem pęku (L, S^∞) parabol p^2_i, z których każda przystaje do południków kwadryk bazowych: paraboloid Π_1, Π_2, Π_3.

Z lematu 1 i ustaleń [1] wyciągnąć można:

Wniosek 2

Obrazem paraboli a o środku S^∞ może być prosta a oraz płaszczyzna niewłaściwa. Przypadek taki zachodzi wówczas, kiedy parabola a^2 jest stożkową biegunową pęku (L,S^{∞}) parabol, takiej prostej "a", która przechodzi równolegle do stycznej do paraboli a^2 w punkcie $a^2 \cap s = Q$.

Zajmijmy się z kolei obrazem Φ^2_p dowolnej niezdegenerowanej kwadryki Φ^2. W tym celu obierzemy dowolną prostą q_p w układzie Φ^2_p i ustalmy liczbę punktów wspólnych $q_p \cap \Phi^2_p$, tj. rząd powierzchni Φ^2_p. Ponieważ, na zasadzie inwolucji, utwór Φ^2_p przekształca się na kwadrykę Φ^2, a prosta q_p na parabolę q^2 i prostą niewłaściwą t^{∞} $(t^{\infty} \in S^{\infty})$ liczba punktów przebicia utworu Φ^2_p prostą q_p jest równa liczbie punktów $(q^2 \cup t^{\infty}) \cap \Phi^2$. Uwzględniając, że parabola q^2 ma z ogólnie przyjętą kwadryką Φ^2 zawsze 4 punkty wspólne, a prosta t^{∞} przebija tę kwadrykę w dwóch punktach, otrzymamy:

Twierdzenie 5

Obrazem dowolnej kwadryki jest powierzchnia rzędu szóstego.

Wiadomo, że punktowi niewłaściwemu odpowiada w analizowanym przekształceniu [1] prosta niewłaściwa przechodząca przez S^{∞}.

Ponieważ punkty M^{∞}, N^{∞} przebicia prostą $t^{\infty} \in S^{\infty}$ kwadryki Φ^2 są współliniowe z S^{∞} - każdemu z tych punktów odpowiada ta sama prosta niewłaściwa n^{∞} (sprzężona z t^{∞}). Prosta n^{∞} jako element utworu Φ^2_p winna być zatem liczona podwójnie. Przyjmując tedy różne proste q_{pi} otrzymujemy różne, związane z nimi proste t^{∞}_i, a w konsekwencji - różne pary punktów M^{∞}_i, N^{∞}_i i podwójnie im odpowiadające proste niewłaściwe. Ponieważ wypełniają one płaszczyznę niewłaściwą można sformułować kolejne:

Twierdzenie 6

Powierzchnia rzędu szóstego stanowiąca obraz kwadryki składa się zawsze z podwójnie liczonej płaszczyzny niewłaściwej oraz powierzchni rzędu czwartego.

Rozważmy jeszcze szczególny przypadek przekształcenia kwadryki, w którym ta ostatnia jest paraboloidą eliptyczną Φ^2 o środku S^{∞}. Analizując jej obraz - powierzchnię Φ^2_p - obierzemy dowolną prostą q_p i ustalmy liczbę punktów przebicia tą prostą utworu Φ^2_p. Zauważmy, że prosta q_p przekształca się na parabolę q^2 i prostą niewłaściwą, a utwór Φ^2_p, zgodnie z inwolucyjnym charakterem przekształcenia - na wyjściową paraboloidę Φ^2. Parabola q^2 posiada z paraboloidą cztery punkty wspólne. Dwa z nich jednoczą się z S^{∞} (któremu w obrazie odpowiada płaszczyzna niewłaściwa), dwa właściwe odpowiadają punktom przebicia prostą c_p utworu Φ^2. Ponieważ prosta q_p wybrana została dowolnie, wynika stąd natychmiast, że utwór Φ^2_p jest rzędu drugiego. Można przy tym ustalić rodzaj powierzchni Φ^2_p. Jeżeli bowiem

zauważymy, że pęk płaszczyzn o osi "s" przecina paraboloidę Φ^2 w parabolach o środku S^∞, a te z kolei przekształcają się na parabole bądź proste przekroju utworu Φ_p^2 tymże pękiem możemy wnioskować, że utwór Φ_p^2 jest paraboloidą.
Stąd kolejne:

Twierdzenie 7

Obrazem ogólnie przyjętej paraboloidy eliptycznej Φ^2 o środku S^∞ leżącym na osi "s" jest współśrodkowa paraboloida Φ_p^2 i płaszczyzna niewłaściwa.

Analogicznie jak w rozważaniach dotyczących przekształcenia paraboli o środku S^∞ należy wspomnieć o możliwości przekształcenia paraboloidy o środku S^∞ w parę płaszczyzn, z których jedna stanowi zawsze płaszczyznę niewłaściwą. Dotyczy to bardzo szczególnych założeń odnośnie do tej paraboloidy. Przeprowadźmy przy tym następujące rozumowanie. Niech dowolnie, nierównolegle do osi "s", przyjęta będzie płaszczyzna α. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami [1] obrazem płaszczyzny α jest paraboloida eliptyczna α_p^2 wraz z płaszczyzną niewłaściwą. Rozważmy przekroje płaszczyznami pęku (s). Otrzymujemy: w płaszczyźnie α pęk prostych o środku $M = s \cap \alpha$, a na paraboloidzie Φ_p^2 - pęk parabol, z których każda jako obraz odpowiedniej prostej pęku (M) (ściślej jako element takiego obrazu) jest jej stożkową biegunową (por. lemat 1). Nazwijmy paraboloidę Φ_p^2 zawierającą wszystkie stożkowe biegunowe pęku (M) kwadryką biegunową. Ma ona tę własność, że leżące na niej parabole pęku o osi "s" przekształcają się na proste pęku o środku M. Jeżeli zatem jako wyjściową do przekształcenia przyjmiemy paraboloidę identyczną z kwadryką biegunową (dowolnie przesuniętą w kierunku S^∞) otrzymamy przypadek, w którym elementem obrazu paraboloidy jest nie, jak orzeka twierdzenie 7, paraboloida współśrodkowa, lecz płaszczyzna. Wprowadzenia pojęcia kwadryki (paraboloidy) biegunowej umożliwia dyskusję rodzaju paraboloidy Φ_p, która jako element obrazu powstaje przy przekształceniu paraboloidy eliptycznej Φ. W dyskusji tej przyjmijmy dowolną paraboloidę eliptyczną przecinającą oś "s" w punkcie L. Rozważmy płaszczyznę styczną α do paraboloidy w tym punkcie oraz element obrazu tej płaszczyzny - kwadrykę (paraboloidę) biegunową α_p^2. Zauważmy, że kwadryka biegunowa α_p^2 jest styczna do płaszczyzny α (na zasadzie styczności parabol pęku (s) i przyporządkowanych im prostych pęku (M) i że paraboloidy Φ^2 i α_p^2 przenikają się w krzywej rzędu czwartego zawierającej dwa punkty podwójne. Są to punkt styczności L oraz wspólny środek S^∞.

Krzywa przenikania rozpada się więc na dwie krzywe stopnia drugiego, które wobec przynależności do S^{∞} są parabolami. Parabole te, należąc do kwadryki biegunowej, ulegają przekształceniu na proste. W przypadku kiedy są to krzywe rzeczywiste - w obrazie przekształconej paraboloidy znaleźć się muszą rzeczywiste proste, skąd wnosimy, że paraboloida Φ_p^2 jest paraboloidą hiperboliczną. W przypadku przeciwnym (parabole przenikania są urojone) mamy do czynienia z elementem obrazu paraboloidy Φ^2 w postaci paraboloidy eliptycznej.

LITERATURA

[1] **Palej M., Pogonowska A.**: O pewnym przekształceniu trójbiegunowym. Zesz. Nauk. Pol.Śl. Matematyka-Fizyka z. 60, Gliwice 1988.

[2] **Vojtiech J.**: Geometrie projektiwni. Jednota Ceskosloenskich Matematiku a Fysicu. Praha 1932.

ОБРАЗЫ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-й СТЕПЕНИ ДЛЯ ОСОБОГО СЛУЧАЯ ТЕХНОЛЯРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Резюме. Работа является продолжением уследований особенного слуая полярного преобразования, в котором базу составляют три параболоида вращения (имеющие в своих вершинах общую касательную плоскость), а образ произвольной точки есть точка пересечения трех полярных плоскостей.

Доказано 7 теорем, из которых самые главные определяют, что образом линии 2-й степени является кривая 6 го порядка которая всегда является линией 4 го порядка и парой несобственных прямых. Образом поверхностей 2 ой степени зато является поверхность 6 го порядка складывающаяся из поверхности 4 го порядка и двукратно считаной, несобственной плоскости. Рассмотрены также преобразования особо принятых кривых и поверхностей 2 ой степени.

IMAGES OF CURVES AND SURFACES OF THE SECOND ORDER INA A SPECJAL CASE OF THE TRIPOLAR TRANSFORMATION

S u m m a r y

The paper is a continuation of studies of a special case of polar transformation in which the basis consists of three congruent paraboloids of revolution (with a common tangent plane at the vertices) and the image of any point is the intersection of its polar planes in reference to each paraboloid.

Seven theorems have been proved, most of them saying, that the image of a curve of the second order is the curve of the sixth order (always in the form of a curve of fourth order and two straight lines at infinity) and the image of a surface of the second order is the surface of the fourth order and the plane at infinity (twice calculated).

The specially situated curves and surfaces of the second order are also considered.