ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 68 Nr kol. 1147

Anna LASKOWSKA
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska w Gliwicach

ZASTOSOWANIE WARIACJI MIESZANYCH RZĘDU DRUGIEGO WZGLĘDEM POTĘG $1 \le p_1, p_2 < \infty$ DO SZEREGÓW FOURIERA

Streszczenie. W pracy zostały udowodnione cztery twierdzenia, z których pierwsze dotyczy oszacowań współczynników szeregu Fouriera funkcji $f(x,y)$ za pomocą wariacji mieszanych rzędu drugiego względem potęg $1 \le p_1, p_2 < \infty$, drugie podaje oszacowanie pewnych sum dla funkcji ciągłych oraz dwa analogiczne dla wielomianów interpolacyjnych.

Niech f będzie funkcją rzeczywistą, określoną na R^2, 2π - okresową, mierzalną.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k,y) = f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(x_{k-1},y),$$

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ x,y_{i-1},y_i) = f(x,y_i) - 2f\left(x,\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,y_{i-1}),$$

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ x_{k-1},\ x_k,y_{i-1},y_i) =$$

$$= f(x_k,y_i) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y_i\right) + f(x_{k-1},y_i) -$$

$$- 2f\left(x_k,\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) - 2f\left(x_{k-1},\ \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) +$$

$$+ f(x_k,y_{i-1}) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},\ y_{i-1}\right) + f\left(x_{k-1},y_{i-1}\right).$$

Niech π_a, π_b, π_{ab} będą skończonymi podziałami przedziałów odpowiednio $[a,a+2\pi]$, $[b,b+2\pi]$ oraz $[a,a+2\pi]\times[b,b+2\pi]$ postaci

$$\pi_a = \pi_{[a,a+2\pi]} = (a = x_o < x_1 < \ldots < x_m = a+2\pi),$$

$$\pi_b = \pi_{[b,b+2\pi]} = (b = y_o < y_1 < \ldots < y_n = b+2\pi),$$

$\pi_{ab} = \pi_{[a,a+2\pi]\times[b,b+2\pi]}$, gdzie a i b są skończonymi liczbami rzeczywistymi.

Definicja. Dla $1 \le p_1, p_2 < \infty$ wariacjami mieszanymi rzędu drugiego funkcji f nazywamy wyrażenia postaci

$$V^{(1)}(f) = \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_a} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}{}_x\,(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{1}$$

$$V^{(2)}(f) = \sup_{b,x}\ \sup_{\pi_b} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}{}_y\,(f;\ x,y_{i-1},y_i)\right|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}, \tag{2}$$

$$V^{(3)}(f) = \sup_{a,b}\ \sup_{\pi_{ab}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}{}_{xy}\,(f;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}. \tag{3}$$

Definując wariacje mieszane na przedziałach dowolnych i oznaczając

$$V^{(1)}(f;\alpha,\beta) = \sup_{y}\ \sup_{\pi[\alpha,\beta]} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}{}_x\,(f;\ t_{k-1},t_k,y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

gdzie: $\pi_{[\alpha,\beta]} = (\alpha = t_o < t_1 <\ldots< t_m = \beta,$

$$V^{(2)}(f;\gamma,\delta) = \sup_{x}\ \sup_{\pi[\gamma,\delta]} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{2}\Delta^{(2)}_y(f;\ x,l_{i-1},l_i)\right|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

gdzie: $\pi_{[\gamma,\delta]} = (\gamma = l_o < l_1 < \ldots < l_n = \delta),$

$$V^{(3)}(f;\alpha,\gamma,\delta) = \sup_{\pi_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}{}_{xy}\,(f;\ t_{k-1},t_k,l_{i-1},l_i\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

otrzymujemy

Lemat 1

Wariacje mieszane rzędu drugiego są funkcjami monotonicznymi przedziału, tzn.

a) $\sup\limits_{a} V^{(1)}(f;\ a+\alpha_1,\ a+\beta_1) \le \sup\limits_{a} V^{(1)}(f;\ a+\alpha,\ a+\beta)$,

b) $\sup\limits_{b} V^{(2)}(f;\ b+\gamma_1,\ b+\delta_1) \le \sup\limits_{b} V^{(2)}(f;\ b+\gamma,\ b+\delta)$,

c) $\sup\limits_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+\alpha_1,\ a+\beta_1 b+\gamma_1, b+\delta_1) \le \sup\limits_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+\alpha,\ a+\beta, b+\gamma, b+\delta)$,

gdzie: $\alpha \le \alpha_1 < \beta_1 \le \beta$ i $\gamma \le \gamma_1 < \delta_1 \le \delta$.

Dowód a) Weźmy dowolne podziały

$$\pi_{[a+\alpha,a+\beta]} = (a+\alpha = x_o < x_1 < \ldots < x_m = a+\beta),$$

$$\pi_{[a+\alpha,a+\alpha_1]} = (a+\alpha = \bar{x}_o < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_{m_1} = a+\alpha_1),$$

$$\pi_{[a+\alpha_1,a+\beta_1]} = (a+\alpha_1 = x'_o < x'_1 < \ldots < x'_{m_2} = a+\beta_1),$$

$$\pi_{[a+\beta_1,a+\beta]} = (a+\beta_1 = \tilde{x}_o < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_{m_3} = a+\beta).$$

Wtedy

$$\sup_{a} V^{(1)}(f;a+\alpha_1,a+\beta_1)\ \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_{[a+\alpha_1,a+\beta_1]}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}\ (f;\ x'_{k-1}, x'_k, y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_{[a+\alpha_1,a+\beta_1]}} \left[\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k, y)\right|^{p_1} + \sum_{k=1}^{m_2} \left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ x'_{k-1}, x'_k, y)\right|^{p_1} +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_2} \left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ \tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k, y)\right|^{p_1}\right]^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_{[a+\alpha,a+\beta]}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1}, x_k, y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \sup_{a} V^{(1)}(f;\ a+\alpha,\ a+\beta).$$

Podobnie dowodzi się b)

Dowód c). Weźmy dowolne podziały

$$\pi_{[b+\gamma,\, b+\delta]} = (b+\gamma = y_o < y_1 < \ldots < y_n = b+\delta),$$

$$\pi_{[b+\gamma_1,\, b+\delta_1]} = (b+\gamma_1 = y'_o < y'_1 < \ldots < y'_{n_2} = b+\delta_1),$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie części a) i korzystając z oznaczeń tam wprowadzonych, otrzymamy

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+\alpha_1,\ a+\beta_1, b+\gamma_1, b+\delta_1) =$$

$$= \sup_{a,b} \sup_{\substack{\pi_{[a+\alpha_1, a+\beta_1]\times} \\ \times[b+\gamma_1, b+\delta_1]}} \left[\sum_{i=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{m_2} \left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x'_{k-1}, x'_k, y'_{i-1}, y_i\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le \sup_{a,b} \sup_{\substack{\pi_{[a+\alpha, a+\beta]\times} \\ \times[b+\gamma_1, b+\delta_1]}} \left[\sum_{i=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x_{k-1}, x_k, y'_{i-1}, y'_i\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}} \le$$

$$\le \sup_{a,b} \sup_{\substack{\pi_{[a+\alpha, a+\beta]\times} \\ \times[b+\gamma_1, b+\delta_1]}} \left[\sum_{i=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ x_{k-1}, x_k, y_{i-1}, y_i\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}} =$$

$$= \sup_{a,b} V^{(3)}(f; a+\alpha,\ a+\beta, b+\gamma, b+\delta).$$

Lemat 2

Dla k_j i l_j całkowitych i takich, że $l_j > k_j$ dla $j = 1,2$ zachodzi

a) $$\sup_{a} V^{(1)}(f;\ a+k_1\pi,\ a+l_1\pi) \le \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1\right) V^{(1)}(f),$$

b) $\sup_{b} V^{(2)}(f;\ b+k_2\pi,\ b+l_2\pi) \le \left(2\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right] - 1\right) V^{(2)}(f)$,

c) $\sup_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+k_1\pi,\ a+l_1\pi,\ b+k_2\pi,\ b+l_2\pi) \le$

$$\le \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1\right)\left(2\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right] - 1\right) V^{(3)}(f),$$

gdzie symbol $[x]$ w powyższych nierównościach oznacza cechę x.

Dowód a). Niech $[\alpha,\beta]$ będzie przedziałem osi Ox, a $\pi_{[\alpha,\beta]} = (\alpha = x_o < x_1 <\ldots< x_m = \beta)$ jego dowolnym podziałem. Ustalamy podział $\pi_{1[\alpha,\beta]} = (\alpha = t_o < t_1 <\ldots< t_r = \beta)$. Oznaczmy

$$S = \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{2}\,\Delta^{(2)}{}_x\,(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

oraz utwórzmy uporządkowane podzbiory A_ν dla $\nu = 1,2,\ldots,r$ zbioru $\{0,1,2,\ldots,m\}$ w sposób następujący: $j_\nu, j_{\nu+1},\ldots,x_{j_\nu+m_\nu} \in A_\nu$ jeśli

$x_{j_\nu},\ x_{j_\nu+1},\ldots,x_{j_{\nu+m}} \in [t_{\nu-1},t_\nu]$ i $m_\nu \ge 1$ oraz niech $A_\nu = \phi$, jeśli $m_\nu = 0$

lub jeśli przedział $[t_{\nu-1},t_\nu]$ nie zawiera punktów podziału $\pi_{[\alpha,\beta]}$. Dalej, niech C będzie uporządkowanym podzbiorem zbioru $\{0,1,2,\ldots,m\}$ i takim, że dwie kolejne liczby $m'_j+t-1,\ m'_j+t\in C$, jeśli przedział $(x_{m'_j+t-1},\ x_{m'_j+t})$ zawiera co najmniej jeden punkt podziału $\pi_{1[\alpha,\beta]}$.

Ilość takich przedziałów jest nie większa niż $r-1$.

Zapiszmy $C = \{m'_1, m'_1+1,\ldots,\ m'_1+r_1,\ m'_2+1,\ldots,\ m'_2+r_2,\ldots,\ m'_l,\ m'_l+1,\ldots,\ m_l+r_l\}$, gdzie $r_1+r_2+\ldots+r_l \le r-1$.

Korzystając z subaddytywności funkcji $u^{\frac{1}{p_1}}$ oraz lematu 1 mamy oszacowania

$$S\le\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}+\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1}x_{m'_j+t}y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\le \tag{4}$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{r} V^{(1)}(f;t_{\nu-1},t_\nu)+\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Niech l_1-k_1 będzie liczbą parzystą oraz $[\alpha,\beta] = [a+k_1\pi,\ a+l_1\pi]$, $t_\nu-t_{\nu-1}=2\pi$ dla $\nu = 1,2,\dots,\frac{1}{2}(l_1-k_1)$.

Z okresowości funkcji f względem x dla $2\pi < x_k - x_{k-1}$ wynika istnienie takich liczb d_{k-1}, d_k, dla których

$$0 < d_k - d_{k-1} \le 2\pi \quad \text{i}$$

$$\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k,y) = \Delta_x^{(2)}(f;\ d_{k-1},d_k,y).$$

Ponieważ dla x_{k-1} i x_k takich, że $0 \le x_k - x_{k-1} \le 2\pi$ oraz dla każdego y ustalonego $\left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right| \le V^{(1)}(f)$, więc korzystając z (4), otrzymujemy

$$\sup_{a,y}\ \sup_{\pi[a+k_1\pi,a+l_1\pi]}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{1}{2}\,\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k,y)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\,(l_1-k_1)V^{(1)}(f) + \left(\frac{1}{2}(l_1-k_1)-1\right)V^{(1)}(f) = (l_1-k_1-1)\ V^{(1)}(f) =$$

$$= \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1\right)\ V^{(1)}(f).$$

Dla l_1-k_1 nieparzystego, $l_1-k_1 = l_1-k_1+1-1 = 2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1$.

Z lematu 1 oraz z ostatniej nierówności mamy

$$\sup_a V^{(1)}(f;\ a+k_1\pi,\ a+l_1\pi) \le \sup_a V^{(1)}(f;\ a+k_1\pi,\ a+(l_1+1)\pi) \le$$

$$\le (l_1-k_1)\ V^{(1)}(f) = \left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right] - 1\right)\ V^{(1)}(f).$$

Nierówności b) dowodzi się analogicznie.

Dowód c). Niech $\pi_{[\alpha,\beta]}$ i $\pi_{1[\alpha,\beta]}$ będą zdefiniowane, jak w dowodzie nierówności a), $[\gamma,\delta]$ niech będzie przedziałem na osi oy, a $\pi_{[\gamma,\delta]}$ dowolnym podziałem postaci $(\gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_n = \delta)$ oraz $\pi_{1[\gamma,\delta]}$ podziałem ustalonym postaci $(\gamma = u_0 < u_1 < \dots < u_s = \delta)$. Niech A_ν i C będą zdefiniowane jak wyżej, a B_μ dla $\mu = 1,2,\dots,s$ będą uporządkowanymi podzbiorami zbioru $\{0,1,2,\dots,n\}$ takimi, że i_μ, $i_{\mu+1},\dots i_\mu+n_\mu \in B_\mu$, jeśli

$y_{i_\mu}, y_{i_\mu+1}, \dots, y_{i_\mu+n_\mu} \in [u_{\mu-1}, u_\mu]$ i $n_\mu \geq 1$ oraz niech $B_\mu = \phi$, jeśli $n_\mu = 0$ lub jeśli przedział $[u_{\mu-1}, u_\mu]$ nie zawiera punktów podziału $\pi_{[\gamma,\delta]}$.

D niech będzie uporządkowanym podzbiorem zbioru $\{0,1,\dots,n\}$ i takim, że n'_h+p-1, $n'_h+p \in D$, jeśli przedziały $(y_{n'_h+p-1}, y_{n'_h+p})$ zawierają co najmniej jeden punkt podziału $\pi_{1[\gamma,\delta]}$. Ilość takich przedziałów jest nie większa niż s-1. Oznaczmy $D = \{n'_1, n'_1+1, \dots, n'_1+z_1, n'_2, n'_2+1, \dots, n'_2+z_2, \dots, n'_k, n'_k+1, \dots, n'_k+z_k\}$, gdzie $z_1+z_2+\dots+z_k \leq s-1$. Korzystając z nierówności Minkowskiego i subaddytywności funkcji $u^{\frac{1}{p_2}}$ mamy

$$S = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}} \leq$$

$$\leq\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{i-1},y_i)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{i-1},y_i)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right]^{p_2}\right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq \tag{5}$$

$$\leq\sum_{\mu=1}^{s}\left(\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\left[\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{w-1},y_w)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]\right)^{\frac{1}{p_2}}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{s}\left(\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\left[\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{w-1},y_w)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}}+$$

$$+\left(\sum_{h=1}^{k}\sum_{p=1}^{z_h}\left(\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)\right)^{\frac{1}{p_2}}+$$

$$+\left[\sum_{h=1}^{k}\sum_{p=1}^{z_h}\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{r_j}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}}.$$

Niech teraz l_j-k_j dla $j=1,2$ będzie parzyste, $[\alpha,\beta]=[a+k_1\pi,\ a+l_1\pi]$, $[\gamma,\delta]=[b+k_2\pi,\ b+l_2\pi]$, $t_\nu-t_{\nu-1}=2\pi$ dla $\nu=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(l_1-k_1)$ oraz $u_\mu-u_{\mu-1}=2\pi$ dla $\mu=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(l_2-k_2)$.

Korzystając z okresowości funkcji f ze względu na obie zmienne, z nierówności $\left|\frac{1}{2}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|\le V^{(3)}(f)$, z (5), nierówności Minkowskiego i subaddytywności funkcji u^{p_i} $(i=1,2)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}S\le{}&\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{r}\left[\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{w-1},y_w)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}}+\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{r_j}\left(\sum_{w=i_\mu+1}^{i_\mu+n_\mu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{w-1},y_w)\right|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}+\\&+\sum_{h=1}^{k}\sum_{p=1}^{z_h}\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=j_\nu+1}^{j_\nu+m_\nu}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{j-1},x_j,y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}+\\&+\sum_{h=1}^{k}\sum_{p=1}^{z_h}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{r_j}\left|\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{m'_j+t-1},x_{m'_j+t},y_{n'_h+p-1},y_{n'_h+p})\right|\end{aligned}\tag{6}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\sup_{a,b}V^{(3)}(f;\ a+k_1\pi,\ a+l_1\pi,\ b+k_2\pi,\ b+l_2\pi)\le\\&\le\frac{1}{4}(l_2-k_2)(l_1-k_1)\,V^{(3)}(f)+\frac{1}{2}(l_2-k_2)\left(\frac{1}{2}(l_1-k_1)-1\right)V^{(3)}(f)+\\&+\left(\frac{1}{2}(l_2-k_2)-1\right)\frac{1}{2}(l_1-k_1)V^{(3)}(f)+\left(\frac{1}{2}(l_2-k_2)-1\right)\left(\frac{1}{2}(l_1-k_1)-1\right)V^{(3)}(f)=\\&=(l_1-l_1-1)(l_2-k_2-1)V^{(3)}(f)=\left(2\left[\frac{l_1-k_1+1}{2}\right]-1\right)\left(2\left[\frac{l_2-k_2+1}{2}\right]-1\right)V^{(3)}(f).\end{aligned}$$

Dla l_j-k_j nieparzystych, gdzie $j=1$ lub $j=2$ korzystamy podobnie jak w dowodzie a) z własności 2 dla wariacji oraz z równości $l_j-k_j = 2\left[\frac{l_j-k_j+1}{2}\right] - 1$ otrzymując tezę.

Niech

$$a_{i,j} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos ix \cos jy \, dx\, dy,$$

$$b_{i,j} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\sin ix \cos jy \, dx\, dy,$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos ix \sin jy \, dx\, dy,$$

$$d_{i,j} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos ix \sin jy \, dx\, dy,$$

dla $i,j = 0,1,2,\ldots$ oznaczają współczynniki szeregu Fouriera $f(x,y)$ oraz

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } i = j = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } i > 0,\ j = 0 \text{ lub } i = 0,\ j > 0\ , \\ 1 & \text{dla } i > 0,\ j = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie 1. Niech f będzie funkcją całkowalną,

a

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n}\left[a_{m,n}\cos mx \cos ny + b_{m,n}\sin mx \cos ny + \right.$$

$$\left. + c_{m,n}\cos mx \sin ny + d_{m,n}\sin mx \sin ny\right]$$

jej szeregiem Fouriera, gdzie

$$\lambda_{m,n},\ a_{m,n},\ b_{m,n},\ c_{m,n},\ d_{m,n} \quad \text{dla} \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

określone są wyżej.

Wtedy:

a) jeśli $V^{(1)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{m,n}\right|,\ \left|b_{m,n}\right|,\ \left|c_{m,n}\right|,\ \left|d_{m,n}\right| \le \frac{3\cdot 2^{1-\frac{1}{p_1}} V^{(1)}(f)}{m^{\frac{1}{p_1}}} \quad \text{dla} \quad m \ge 1,$$

b) jeśli $V^{(2)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{m,n}\right|,\ \left|b_{m,n}\right|,\ \left|c_{m,n}\right|,\ \left|d_{m,n}\right| \le \frac{3\cdot 2^{1-\frac{1}{p_2}} V^{(2)}(f)}{n^{\frac{1}{p_2}}} \quad \text{dla} \quad n \ge 1,$$

c) jeśli $V^{(3)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{m,n}\right|,\ \left|b_{m,n}\right|,\ \left|c_{m,n}\right|,\ \left|d_{m,n}\right| \le \frac{9V^{(3)}(f)}{2^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} m^{\frac{1}{p_1}} n^{\frac{1}{p_2}}} \quad \text{dla} \quad m,n \ge 1,$$

Dowód a). Dla funkcji 2π - okresowej $g(x)$ mamy

$$\int_0^{2\pi} g(x) \cos nx dx = (-1)^k \int_0^{2\pi} g(x + \frac{k\pi}{n}) \cos nx dx.$$

Korzystając z założenia okresowości $f(x,y)$, z lematu 2, z nierówności Höldera, oraz podstawiając $h = \frac{\pi}{m}$ dla m naturalnego, $rh = 2\pi$ i $x = u + kh$ otrzymamy

$$\left|a_{m,n}\right| = \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x,y) - 2f(x+\frac{\pi}{m},y) + f(x+\frac{2\pi}{m},y)\right]\cos mx \cos ny dx dy\right| =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{r-1}\int_{kh}^{(k+1)h}\left[f(x,y)-2f(x+h,y)+f(x+2h,y)\right]\cos mx\cos ny dx dy\right| \le$$

$$\le \frac{2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{1}{2}\left|f(u+kh,y)-2f(u+(k+1)h,y)+f(u+(k+2)h,y)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} r^{\frac{1}{q_1}} du dy \le$$

$$\le \frac{2}{4\pi^2} 2\pi h\, V^{(1)}(f;0,(r+1)h) r^{\frac{1}{q_1}} \le \frac{3\, V^{(1)}(f)\, (2m)^{\frac{1}{q_1}}}{m} = \frac{3\cdot 2^{1-\frac{1}{q_1}} V^{(1)}(f)}{m^{\frac{1}{p_1}}}$$

dla $m \ge 1$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$.

Dowód dla pozostałych współczynników przebiega analogicznie.

Korzystamy tam z równości

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx dx = (-1)^k \int_0^{2\pi} g(x + \tfrac{k}{n}\pi)\sin nx\, dx.$$

Dowód b) przebiega jak dowód a).

Dla dowodu c) mamy $h = \frac{\pi}{m}$, $t = \frac{\pi}{n}$, $rh = 2\pi$, $st = 2\pi$, $x = u+kh$, $y = v+it$.

Wtedy:

$$\left|a_{m,n}\right| = \frac{1}{16\,\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^{(2)}_{xy}(f: x, x+\tfrac{2\pi}{m},\ y, y+\tfrac{2\pi}{n})\cos mx \cos ny\, dxdy\right| \le$$

$$\le \frac{4}{16\,\pi^2}\int_0^t\int_0^h\left[\sum_{i=0}^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\left|\tfrac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}(f; u+kh, u+(k+2)h, v+it, v(i+2)t)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}} r^{\frac{1}{q_1}} s^{\frac{1}{q_2}} dudv \le$$

$$\le \frac{9\, V^{(3)}(f)}{2^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}\, m^{\frac{1}{p_1}}\, n^{\frac{1}{p_2}}} \quad \text{dla } m,n \ge 1, \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \quad i = 1,2.$$

Twierdzenie 2. Niech f będzie funkcją ciągłą,

$$\rho_{m,n} = \left[(a_{m,n})^2 + (b_{m,n})^2 + (c_{m,n})^2 + (d_{m,n})^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ są współczynnikami szeregu Fouriera.

Wtedy:

a) jeśli $V^{(1)}(f) < \infty$, $1 \le p_1 < 2$, to

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,l}\rho^2_{j,l}\, j^4 = o(m^3) \text{ i } \sup_l \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,l}\rho_{j,l}\, j^2 = o(m^2),$$

b) jeśli $V^{(2)}(f) < \infty$, $1 \le p_2 < 2$, to

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j,l}\rho^2_{j,l}\, l^4 = o(n^3) \text{ i } \sup_j \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,l}\rho_{j,l}\, j^2 = o(n^2),$$

c) jeśli $V^{(3)}(f) < \infty$, $1 \le p_2 \le p_1 < 2$, to

$$\frac{1}{m^3 n^3} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho_{j,l}^2\, j^4 l^4 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \ \text{i}\ \frac{1}{n^2 m^2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho_{j,l}^2\, j^2 l^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.$$

Dowód. Oznaczmy

$$\varphi_m(x,y) = \sum_{k=0}^{2m-2} \left\{ f(x + \frac{k\pi}{m}, y) - 2f(x + \frac{k+1}{m}\pi, y) + f(x + \frac{k+2}{m}\pi, y) \right\}^2.$$

Wtedy

$$0 \le \varphi_m(x,y) \le \sup_{\substack{0\le k\le 2m-2 \\ y}} \left| \Delta_x^{(2)}(f; x + \frac{k\pi}{m},\ x + \frac{k+2}{m}\pi, y) \right|^{2-p_1} 2^{p_1} \left[V^{(1)}(f) \right]^{p_1} \longrightarrow 0,$$

gdy $m \longrightarrow \infty$, $2-p_1 > 0$.

Ponieważ f jest funkcją ciągłą i okresową ze względu na x i y, więc

$$0 \le \varphi_m(x,y) \le \left(4 \sup_{x,y} \left| f(x,y) \right| \right)^{2-p_1} 2^{p_1} \left[V^{(1)}(f) \right]^{p_1}.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a mamy

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m(x,y)\,dxdy = 0.$$

Korzystając ze wzoru

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x,y)\ dxdy = \sum_{j,l=0}^{\infty} \lambda_{j,l}\, \rho_{j,l}^2 \tag{6}$$

dostajemy

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m(x,y)\ dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2m-2} \left\{ f(x + \frac{k\pi}{m}, y) - 2f(x + \frac{k+1}{m}\pi, y) + \right.$$

$$\left. f(x + \frac{k\pi}{m}, y) \right\}^2 dxdy = \pi^2 \sum_{k=0}^{2m-2} \sum_{j,l=0}^{\infty} \lambda_{j,l} (\rho'_{j,l})^2,$$

gdzie $(\rho'_{j,l})^2 = (a'_{j,l})^2 + (b'_{j,l})^2 + (c'_{j,l})^2 + (d'_{j,l})^2$,

$$(a'_{j,l})^2 = \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+\frac{k\pi}{m},y)-2f(x+\frac{k+1}{m}\pi,y)+f(x+\frac{k+2}{m}\pi,y)\right]\cos jx\cos ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)(\cos j(x-\frac{k\pi}{m})-2\cos j(x-\frac{k+1}{m}\pi)+\cos j(x-\frac{k+2}{m}\pi))\cos ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)4\sin^2 j\frac{\pi}{2m}\cos j(x-\frac{k+1}{m}\pi)\cos ly\,dxdy\right]^2 = 16\sin^4 j\frac{\pi}{2m}\cdot$$

$$\cdot\left[a^2_{j,l}\cos^2 j\frac{k+1}{m}\pi + b^2_{j,l}\sin^2 j\frac{k+1}{m}\pi + a_{j,l}b_{j,l}\sin^2 j\frac{k+1}{m}\pi\right].$$

Analogicznie

$$(c'_{j,l})^2 = \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+\frac{k\pi}{m},y)-2f(x+\frac{k+1}{m}\pi,y)+f(x+\frac{k+2}{m}\pi,y)\right]\cos jx\sin ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= 16\sin^4 j\frac{\pi}{2m}\left[c^2_{j,l}\cos^2 j\frac{k+1}{m}\pi + d^2_{j,l}\sin^2 j\frac{k+1}{m}\pi + c_{j,l}d_{j,l}\sin^2 j\frac{k+1}{m}\pi\right]$$

oraz

$$(b'_{j,l})^2 = \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+\frac{k\pi}{m},y)-2f(x+\frac{k+1}{m}\pi,y)+f(x+\frac{k+2}{m}\pi,y)\right]\sin jx\cos ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)(\sin j(x-\frac{k\pi}{m})-2\sin j(x-\frac{k+1}{m}\pi)+\sin j(x-\frac{k+2}{m}\pi))\cos ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)(-4)\sin^2 j\frac{\pi}{2m}\sin j(x-\frac{k+1}{m}\pi)\cos ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= 16\sin^4 j\frac{\pi}{2m}\left[b_{j,l}^2\cos^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi + a_{j,l}^2\sin^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi - a_{j,l}\,b_{j,l}\sin^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi\right]$$

i

$$(d'_{j,l})^2 = \left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+\frac{k\pi}{m},y)-2f(x+\frac{k+1}{m}\pi,y)+f(x+\frac{k+2}{m}\pi,y)\right]\sin jx\,\sin ly\,dxdy\right]^2 =$$

$$= 16\sin^4 j\frac{\pi}{2m}\left[d_{j,l}^2\cos^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi + c_{j,l}^2\sin^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi + c_{j,l}\,d_{j,l}\sin^2 j\,\frac{k+1}{m}\pi\right]$$

Stąd

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_m(x,y)\,dxdy = 16\,\pi^2(2m-1)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2\sin^4 j\,\frac{1}{2m}.$$

Z nierówności $\frac{2}{\pi}x \le \sin x$ dla $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
otrzymujemy oszacowanie

$$\beta_m = \frac{1}{m^3}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2 j^4 \le m\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2\sin^4\frac{j\pi}{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Korzystając z nierówności Buniakowskiego-Schwarza mamy dalsze oszacowania

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{m^4}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2\,j^2\right)^2 \le \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{m^4}\left[\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,l}\,\rho_{j,l}^2\,j^4\sum_{j=1}^{m}1^2\right] \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{m^4}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2\,j^4 \longrightarrow 0, \quad \text{bo } \beta_m \longrightarrow 0, \quad \text{a stąd}$$

$$\sup_l \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,l}\rho_{j,l}^2\,j^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Nierówność b) otrzymuje się analogicznie.

Dla dowodu c) oznaczmy

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \sum_{i=0}^{2n-2}\sum_{k=0}^{2m-2}\left(\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x+\frac{k\pi}{m},\ x+\frac{k+2}{m}\pi, y+\frac{i\pi}{n}, y+\frac{i+2}{n}\pi)\right|\right)^2.$$

Wtedy

$$0 \le \varphi_{m,n}(x,y) \le \sup_{\substack{0\le k\le 2m-2\\ 0\le i\le 2n-2}} \left|\Delta^{(2)}_{xy}\left(f; x+\frac{k\pi}{m}, x+\frac{k+2}{m}\pi, y+\frac{i\pi}{n}, y+\frac{i+2}{n}\pi\right)\right|^{2-p_1} \cdot$$

$$\cdot\, 4^{p_1} \sum_{i=0}^{2n-2}\left[\sum_{=0}^{2m-2}\left|\frac{1}{4}\Delta^{(2)}_{xy}\left(f; x+\frac{k\pi}{m}, x+\frac{k+2}{m}\pi, y+\frac{i\pi}{n}, y+\frac{i+2}{n}\pi\right)\right|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_2}} \longrightarrow 0, \text{ gdy}$$

$$m \text{ i } n \longrightarrow \infty, \quad 2-p_1 > 0 \quad \text{i} \quad \frac{p_1}{p_2} \ge 1.$$

Z założenia okresowości funkcji f ze względu na każdą zmienną i z ciągłości mamy oszacowanie

$$0 \le \varphi_{m,n}(x,y) \le 16 \sup_{x,y} \left|f(x,y)\right|^{2-p_1} 4^{p_1} \left[V^{(3)}(f)\right]^{p_1}.$$

Podobnie jak w dowodzie a), ze wzoru (6) dostajemy

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{m,n}(x,y)\, dxdy = \pi^2(2m-1)(2n-1)16^2 \sum_{j,l=1}^{\infty} \rho^2_{j,l} \sin^4\frac{j\pi}{2m} \sin^4\frac{l\pi}{2n}.$$

Analogicznie jak w pierwszej części dowodu, całka po lewej stronie dąży do zera, przy m i $n \longrightarrow \infty$, $1\le p_2\le p_1<2$ oraz

$$\frac{1}{m^3}\frac{1}{m^3}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho^2_{j,l}\, j^4 l^4 \le mn \sum_{j,l=1}^{\infty} \rho^2_{j,l} \sin^4\frac{j\pi}{2m} \sin^4\frac{l\pi}{2n} \longrightarrow 0$$

i

$$\left(\frac{1}{m^2n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho^2_{j,l}\, j^2 l^2\right)^2 \le \frac{1}{m^3n^3}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho^2_{j,l}\, j^4 l^4 \longrightarrow 0, \text{ gdy } m \text{ i } n \longrightarrow \infty.$$

Twierdzenie 3. Niech funkcja f będzie zadana w punktach

$$x^m_l = \frac{2\pi\, l}{2m+1}, \quad l = 0,1,\dots,2m, \quad m = 1,2,\dots$$

i

$$y^n_s = \frac{2\pi\, s}{2n+1}, \quad s = 0,1,\dots,2n, \quad n = 1,2,\dots .$$

Oznaczmy

$$a_{k,j}^{m,n} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} f(x_l^m, y_s^n) \cos kx_l^m \cos j\, y_s^n,$$

$$b_{k,j}^{m,n} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} f(x_l^m, y_s^n) \sin kx_l^m \cos j\, y_s^n,$$

$$c_{k,j}^{m,n} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} f(x_l^m, y_s^n) \cos kx_l^m \sin j\, y_s^n,$$

$$d_{k,j}^{m,n} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} f(x_l^m, y_s^n) \sin kx_l^m \sin j\, y_s^n,$$

gdzie $k = 0,1,2,\ldots m$, $j = 0,1,2,\ldots,n$.

Wtedy:

a) jeśli $V^{(1)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{k,j}^{m,n}\right|, \left|b_{k,j}^{m,n}\right|, \left|c_{k,j}^{m,n}\right|, \left|d_{k,j}^{m,n}\right| \le \frac{6V^{(1)}(f)}{(2m+1)^{\frac{1}{p_1}} \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}}, \quad k \neq 0,$$

b) jeśli $V^{(2)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{k,j}^{m,n}\right|, \left|b_{k,j}^{m,n}\right|, \left|c_{k,j}^{m,n}\right|, \left|d_{k,j}^{m,n}\right| \le \frac{6V^{(2)}(f)}{(2n+1)^{\frac{1}{p_2}} \sin^2 \frac{j\pi}{2n+1}}, \quad j \neq 0,$$

c) jeśli $V^{(3)}(f) < \infty$, to

$$\left|a_{k,j}^{m,n}\right|, \left|b_{k,j}^{m,n}\right|, \left|c_{k,j}^{m,n}\right|, \left|d_{k,j}^{m,n}\right| \le \frac{9V^{(3)}(f)}{(2m+1)^{\frac{1}{p_1}}(2n+1)^{\frac{1}{p_2}} \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1} \sin^2 \frac{j\pi}{2n+1}}$$

$$k, j \neq 0.$$

Dowód a). Oznaczmy $h = \frac{k\pi}{2m+1}$, $t = \frac{2\pi}{2n+1}$ oraz

$$Q_{k,j} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} \left[f(x_l^m - h, y_s^n) - 2f(x_l^m, y_s^n) + f(x_l^m + h, y_s^n) \right] \cdot \cos kx_l^m \cos jy_s^n$$

Grupując odpowiednio wyrazy w $Q_{k,j}$ i korzystając ze wzoru na różnicę cosinusów i sinusów oraz z 2π-okresowości funkcji f względem x otrzymujemy (dla funkcji jednej zmiennej p. [3] s. 16)

$$Q_{k,j} = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1} a_{k,j}^{m,n}.$$

Stosując nierówność Höldera i korzystając z lematu 2 mamy oszacowania

$$\left| Q_{k,j} \right| \le \frac{4(2n+1)}{(2m+1)(2n+1)} 2 V^{(1)}(f; -h, \frac{4\pi m}{2n+1} + h)(2m+1)^{\frac{1}{q_1}} \le \frac{24 V^{(1)}(f)}{(2m+1)^{\frac{1}{p_1}}}.$$

Analogicznie przebiega dowód dla oszacowania pozostałych współczynników. Stąd teza.

Dowód b) przebiega jak dowód a).

Dowód c). Oznaczmy

$$P_{k,j} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} \left[\Delta_{xy}^{(2)}(f; x_l^m - h, x_l^m + h, y_s^n - t, y_s^n + t) \right] \cdot \cos kx_l^m \cos jy_s^n.$$

Analogicznie jak w dowodzie a), po przekształceniu mamy

$$P_{k,j} = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1} \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2m} \left[f(x_l^m, y_s^n - t) - 2f(x_l^m, y_s^n) + f(x_l^m, y_s^n + t) \right] \cdot$$

$$\cdot \cos kx_l^m \cos jy_s^n = 16 \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1} \sin^2 \frac{j\pi}{2n+1} a_{k,j}^{m,n}.$$

Stąd

$$\left|a_{k,j}^{m,n}\right| \le \frac{4\cdot 4V^{(3)}\left(f;-h,\frac{4\pi m}{2m+1}+h,-t,\frac{4\pi n}{2n+1}+t\right)(2m+1)^{\frac{1}{q_1}}(2n+1)^{\frac{1}{q_2}}}{16\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}(2m+1)(2n+1)} \le$$

$$\le \frac{9V^{(3)}(f)}{(2m+1)^{\frac{1}{p_1}}(2n+1)^{\frac{1}{p_1}}\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}\sin^2\frac{j\pi}{2m+1}} \quad \text{dla} \quad k,j \ne 0.$$

Podobnie szacuje się pozostałe współczynniki.

Twierdzenie 4. Niech f będzie funkcją ciągłą,

$$\tau_{k,j}^{m,n} = \left[\left(a_{k,j}^{m,n}\right)^2 + \left(b_{k,j}^{m,n}\right)^2 + \left(c_{k,j}^{m,n}\right)^2 + \left(d_{k,j}^{m,n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$a_{k,j}^{m,n}$, $b_{k,j}^{m,n}$, $c_{k,j}^{m,n}$, $d_{k,j}^{m,n}$ zdefiniowane są w tw. 3.

Wtedy, jeśli $V^{(3)}(f) < \infty$, $1 \le p_2 \le p_1 < 2$,

to

$$\frac{1}{m^3n^3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau_{k,j}^{m,n}\right]^2 k^4 l^4 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

oraz

$$\frac{1}{m^2n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tau_{k,j}^{m,n}\, k^2 j^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.$$

Dowód. Budujemy interpolacyjny wielomian trygonometryczny

$$L_{m,n}(f;x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,j}\left[a_{k,j}^{m,n}\cos kx\cos jy + b_{k,j}^{m,n}\sin kx\cos jy +\right.$$

$$\left. c_{k,j}^{m,n}\cos kx\sin jy + d_{k,j}^{m,n}\sin kx\sin jy\right].$$

Wielomian ten spełnia warunek

$$L_{m,n}(f;x_l^m,y_s^n) = f(x_l^m,y_s^n), \quad \text{gdzie} \quad x_l^m \ \text{i} \ y_s^n$$

dla $l = 0,1,\dots,2m$ i $s = 0,1,\dots,2n$ zostały zdefiniowane z twierdzeniu 3. Korzystając z tożsamości

$$L_{m,n}(T_{m,n};\ x,y) \equiv T_{m,n}(x,y),$$

gdzie $T_{m,n}(x,y)$ jest dowolnym wielomianem trygonometrycznym, wykażemy wzór

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[T_{m,n}(x,y)\right]^2 dxdy = \frac{1}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[T_{m,n}(x_l^m,\ y_s^n)\right]^2$$

(dla jednej zmiennej p. [2] s. 495).

Stosując wzór (6) oraz wzór $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$ i wzory na $a_{k,j}^{m,n}$, $b_{k,j}^{m,n}$, $c_{k,j}^{m,n}$, $d_{k,j}^{m,n}$ (tw. 3), mamy

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[T_{m,n}(x,y)\right]^2 dxdy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[L_{m,n}(T_{m,n};x,y)\right]^2 dxdy =$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\left\{\lambda_{k,j}\frac{16}{(2m+1)^2\ (2n+1)^2}\left[\left(\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[T_{m,n}(x_l^m,\ y_s^n)\cos kx_l^m\cos jy_s^n\right]^2 +\right.\right.\right.$$

$$+\left(\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}T_{m,n}(x_l^m,\ y_s^n)\sin kx_l^m\cos jy_s^n\right)^2 + \left(\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}T_{m,n}(x_l^m,y_s^n)\cos kx_l^m\sin jy_s^n\right)^2 +$$

$$\left.\left.\left.+\left(\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}T_{m,n}(x_l^m,y_s^n)\sin kx_l^m\sin jy_s^n\right)^2\right]\right]\right\} =$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\lambda_{k,j}\frac{16}{(2m+1)^2(2n+1)^2}\left\{\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[T_{m,n}(x_l^m,y_s^n)\right]^2 +\right.$$

$$+ 2\sum_{\substack{s_1=0\\ s_1\neq s_2 \vee l_1\neq l_2}}^{2n}\sum_{s_2=0}^{2n}\sum_{l_1=0}^{2m}\sum_{l_2=0}^{2m} T_{m,n}(x^m_{l_1}, y^n_{s_1})T_{m,n}(x^m_{l_2}, y^n_{s_2})\cos k(x^m_{l_1} - x^m_{l_2})\cos j(y^m_{s_1} - y^m_{s_2})\Big\}.$$

Podstawiając $T_{m,n}(x,y) = \sum_{j_1=-n}^{n}\sum_{k_1=-n}^{m} c_{k_1,j_1} e^{(k_1x + j_1y)i}$ do drugiego składnika w nawiasie powyższego wyrażenia, otrzymujemy

$$\sum_{l_1=0}^{2m} T(x^m_{l_1}, y^n_{s_1}) \cos k (x^m_{l_1} - x^m_{l_2}) = 0.$$

Stąd

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[T_{m,n}(x,y)\right]^2 dxdy =$$

$$= \frac{16\left(mn + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right)}{(2m+1)^2(2n+1)^2}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[T_{m,n}(x^m_l, y^n_s)\right]^2 =$$

$$= \frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[T_{m,n}(x^m_l, y^n_s)\right]^2.$$

Korzystając z ostatniej równości oraz ze wzoru (6) i dowodu twierdzenia 2 mamy

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Delta^{(2)}_{xy}(L_{m,n}(f;x,x+2h,y,y+2t))\right]^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m}\left[\Delta^{(2)}_{xy}(f;x^m_l, x^m_l+2h, y^n_s, y^n_s+2t)\right]^2 =$$

$$= \frac{(16)^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau^{m,n}_{k,j}\right]^2 \sin^4\frac{kh}{2}\sin^4\frac{jt}{2},$$

gdzie $h = \frac{2\pi}{2m+1}$, $t = \frac{2\pi}{2n+1}$.

Z ciągłości funkcji f, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 części c), otrzymujemy

$$\sup_{\substack{0\le l\le 2m\\ 0\le s\le 2n}} \left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_l^m,x_l^m+2h,y_s^n,y_s^n+2t)\right|^{2-p_1} \longrightarrow \text{ gdy } m,n \longrightarrow \infty,\quad 2-p_1 > 0,$$

a z założenia

$$\sum_{s=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m} \left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_l^m,x_l^m+2h,y_s^n,y_s^n+2t)\right|^{p_1} \le 4^{p_1}\left[V^{(3)}(f)\right]^{p_1} < \infty \quad \text{dla } \frac{p_1}{p_2} \ge 1.$$

Stąd

$$(2m+1)(2n+1)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau_{k,j}^{m,n}\right]^2 \sin^4\frac{hk}{2}\sin^4\frac{tj}{2} \xrightarrow[m,n\longrightarrow\infty]{} 0 \qquad \text{dla } 2-p_1 > 0,\quad \frac{p_1}{p_2} \ge 1.$$

Korzystając z nierówności $\frac{2}{\pi}x \le \sin x$ dla $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, mamy

$$\left(\frac{2}{3}\right)^8 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau_{k,j}^{m,n}\right]^2 \frac{k^4j^4}{m^2n^2} \le$$

$$\le mn\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau_{k,j}^{m,n}\right]^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^8\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)^4\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)^4 \longrightarrow 0.$$

gdy $m,n \longrightarrow \infty$.

Stosując nierówność Buniakowskiego-Schwarza dwa razy, otrzymamy

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tau_{k,j}^{m,n}\frac{k^2j^2}{m^2n^2}\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\tau_{k,j}^{m,n}\frac{k^2j^2}{m^2n^2}\right)^2\sum_{j=1}^{n}1^2 \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\tau_{k,j}^{m,n}\right]^2\frac{k^4j^4}{m^4n^4}\,mn \longrightarrow 0.$$

LITERATURA

[1] Ахобацзе Т.И.:Функции ограниченной обобщенной второй вариации. Математический сборник, 1979, т.109/151/:2/6/,с.291-326.

[2] Верман Д.Л.: Об одном интерполяционном аналоге критерия Винера непрерывности функции ограниченной вариации. ДАН СССР, 1971, т.196, No3, с.495-497.

[3] Берман Д.Л.: Об одном интерполяционном признаке непрерывности периодической функции с ограниченным вторым изменением. Известия высших учебных заведений, Математика, 1973, No3/130/,с.14-18.

ПРИМЕНЕНИЕ МИКСИРОВАННЫХ ВАРИАЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО СТЕПЕНЕЙ $1 \le p_1, p_2 < \infty$ К РЯДАМ ФУРЬЕ

Резюме. В работе доказаны 4 теоремы. Первая из них позволяет находить оценки коэффициентов ряда фурье функций f (x,y) с помощью миксированных вариации второго порядка относительно степеней $1 \le p_1, p_2 < \infty$. Вторая теорема определяет оценки некоторых сумм для непрерывных хункций. Остальные теоремы аналогины, но доказаны для интерполяционных многочленов.

AN APPLICATION OF MIXED VARIATIONS OF THE SECOND ORDER IN RELATION TO POWERS $1 \le p_1, p_2 < \infty$ TO FOURIER SERIES

S u m m a r y

In this paper we have proved four theorems. The first concerns the estimation for the Fourier coefficients, second one- certains sums for continuous and two last are analogical, but for the interpolation polynomials.