ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA Z. 68 Nr kol. 1147

A. ROST

J. ŚLADKOWSKA

RECHERCHES SUR LA CLASSE DES FONCTIONS DE MONTEL

CE TRAVAIL EST DÉDICÈ A L'OCCASION DE 70-IÈME ANNIVERSAIRE DE MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

Résumé. Soit $M(r)$, $0 < r < 1$, la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans $U = \{z: |z| < 1\}$ de la forme

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots ,$$

telles que

$$f(r) = 1$$

et soit $M_R(r)$ la famille des fonctions de $M(r)$ qui sont symétriques par rapport à l'axe réel. On trouve quelques familles de variations pour la fonction $f \in M(r)$ et $f \in M_R(r)$ (voir les formules (7),(8),(9),(10),(18),(21),(23),(24),(25),(26) et (27)) et les conditions nécessaires pour la fonction extrémale dans $M(r)$ et $M_R(r)$ par rapport à une fonctionnelle différentiable (voir les théoremes 1,2,3,1' et 3'). Comme exemple on trouve en particulier les bornes supérieure et inférieure pour la fonctionnelle b_1 dans la classe $M_R(r)$.

On étude dans ce travail des extrémums des certaines fonctionnelles dans la classe des fonctions de Montel. Cette classe est définie de la façon suivante:

$f \in M(r)$, $0 < r < 1$, si

(i) f est univalente dans $U = \{z: |z| < 1\}$,

(ii) $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots ,$ $z \in U$,

(iii) $f(r) = 1$.

1. DES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES

Deux fonctions

$$k_1(z) = \frac{(1-r)^2}{r}\,\frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{et} \quad k_2(z) = \frac{(1+r)^2}{r}\,\frac{z}{(1+z)^2}$$

jouent un rôle important dans cette classe. k_1 transforme U sur $\mathbb{C}\setminus\left(-\infty, -\frac{(1-r)^2}{4r}\right]$, $k_2(z)$ transforme U sur $\mathbb{C}\setminus\left[\frac{(1+r)^2}{4r}, +\infty\right)$.

Si $f \in M(r)$, donc $g = f\, b_1^{-1} \in S$ (la classe des fonctions univalentes dans U, telles que $f(0) = f'(0) - 1 = 0$). En appliquant les théorèmes sur la déformation pour la fonction g, nous obtenons

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le \left|\frac{f(z)}{b_1}\right| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{1}$$

pour tout $z \in U$. En posant dans (1) $z = r$ et prenant en considération que $f(r) = 1$, nous obtenons une estimation pour $|b_1|$:

$$\frac{(1-r)^2}{r} \le |b_1| \le \frac{(1+r)^2}{r}. \tag{2}$$

Cette inégalité est exacte. Des fonctions extrémales sont k_1 est $k_2 \cdot |b_1|$ parcourt toutes les valeurs de l'intervalle $\left[\frac{(1-r)^2}{r}, \frac{(1+r)^2}{r}\right]$. Si $t \in \left[\frac{(1-r)^2}{r}, \frac{(1+r)^2}{r}\right]$, alors la fonction de la classe M(r) pour laquelle $b_1 = t$ est la fonction

$$f(z) = t\,\frac{z}{\left(1 + \frac{\sqrt{rt}-1}{r}\,z\right)^2}.$$

En outre nous avons des inégalités (1) et (2):

$$\frac{(1-r)^2}{r}\,\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{(1+r)^2}{r}\,\frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{3}$$

En appliquant le théorème de la valeur absolue de la dérivée des functions de la classe S, nous obtenons

$$\frac{(1-r)^2}{r}\,\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^2}{r}\,\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{4}$$

On ne sait pas quand même si les inégalités (3) et (4) sont exactes. Puisque

$$\frac{z\,g'(z)}{g(z)} = \frac{z\,f'(z)}{f(z)},$$

nous avons

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1-|z|}{1+|z|}. \tag{5}$$

Cette inégalité est exacte. Les fonctions k_1 et k_2 sont des fonctions extrémales.

En vertu de (3) et de la condition (iii) la classe $M(r)$ est compacte. En particulier il en résulte que toute fonctionnelle réelle et continue dans $M(r)$ admet dans cette classe ses extrémums.

2. LE PROBLÈME DES COEFFICIENTS

Si $f \in M(r)$, alors $g = f\,b_1^{-1} \in S$, donc $|b_n\,b_1^{-1}| \le n$, d'ou

$$|b_n| \le n\,\frac{(1+r)^2}{r}, \tag{6}$$

L'égalité est remplie ssi $f(z) = k_2(z)$.

3. DES TRANSFORMATIONS ET VARIATIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit ϕ une functionnelle complexe, défine et continue au moins sur $M(r)$. Puisque ϕ est la fonctionnelle continue et $M(r)$ est la famille compacte, il y a donc la fonction dans cette classe, soit f, pour laquelle $\operatorname{Re}\phi$ atteint son minimum ou maximum. A présent supposons que la fonctionnelle ϕ

possède une différentielle au sens de Gàteaux en f. Il existe donce une fonctionnelle linéaire $L(\cdot;\ f) \in H'(U)$ ($H'(U)$ - un espace conjugué à l'espace $H(U)$ de toutes les fonctions holomorphes dans U) telle que

$$\phi(f^*) = \phi(f) + \varepsilon\, L(h;\ f) + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \longrightarrow 0,$$

lorsque $f^* = f + \varepsilon\, h + o(\varepsilon) \in M(r)$. Comme $\mathrm{Re}\,\{\phi(f^*)\} \le \mathrm{Re}\{\phi(f)\}$ dans le cas de maximum et $\mathrm{Re}\,\{\phi(f^*)\} \ge \mathrm{Re}\{\phi(f)\}$ dans le cas de minimum, nous pouvons obtenir des renseignements sur f à l'aide de la construction des fonctions proches $f^* \in M(r)$.

Nous allons utiliser des faits suivants:

(a) Si $f \in M(r)$, donc $\overline{f(\bar{z})} \in M(r)$.

(b) Si $f \in M(r)$, φ est une fonction univalente appliquante le disque unite dans soi -même, donc

$$f^* = \frac{f\circ\varphi - f(\varphi(0))}{f(\varphi(r)) - f(\varphi(0))} \in M(r).$$

(b_1) En posant $\varphi(z) = e^{i\theta}z$, nous avons

$$f^*(z) = \frac{f(e^{i\theta}\,z)}{f(e^{i\theta}\,r)} \in M(r),$$

d'où on a la formule pour la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) - i\theta(z\, f'(z) - r\, f'(r)\, f(z)) + o(\theta),$$

quand $\theta \longrightarrow 0$.

(b_2) En posant $\varphi(z) = \rho\, z$, $0 < \rho < 1$, nous obtenons

$$f^*(z) = \frac{f(\rho\, z)}{f(\rho\, r)} \in M(r),$$

et ainsi la formule pour la fonction proche a la forme

$$f^*(z) = f(z) - (1 - \rho)(z\, f'(z) - r\, f'(r)\, f(z)) + o(1 - \rho)), \tag{8}$$

lorsque $\rho \longrightarrow 1^-$.

(b_3) En posant $\varphi(z) = k^{-1}((1-t)\,k(z))$, où $k(z) = \dfrac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}$,

$0 \le \theta \le 2\pi$, $0 < t < 1$, nous avons

$$f^*(z) = \frac{f(\varphi(z))}{f(\varphi(r))} = \frac{f(k^{-1}((1-t)\,k(z)))}{f(k^{-1}((1-t)\,k(r)))},$$

d'où nous obtenons la formule pour la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) - t\left(z\,f'(z)\,\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} - f(z)\,r\,f'(r) \times \right. \tag{9}$$

$$\left. \times\,\frac{1+e^{i\theta}r}{1-e^{i\theta}r}\right) + o(t), \qquad t \longrightarrow 0^+.$$

(c) Si $f \in M(r)$, donc $f^*(z) = \dfrac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{f\left(\dfrac{r+\zeta}{1+\bar{\zeta}r}\right) - f(\zeta)} \in M(r)$, $\zeta \in U$.

Alors ainsi nous trouvons la formule pour la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) + ((f'(z) - f'(0)) - f(z)(f'(r) - f'(0)))\zeta + \tag{10}$$

$$+ (-z^2 f'(z) + r^2 f'(r)\,f(z))\bar{\zeta} + o(|\zeta|), \qquad \zeta \longrightarrow 0.$$

(d) Si $f \in M(r)$, F est une fonction univalente dans $f(U)$, donc

$$f^*(z) = \frac{F(f(z)) - F(0)}{F(1) - F(0)} \in M(r).$$

(d_1) Si $f \notin M(r)$ et $\omega \in f(U)$, alors

$$f^*(z) = \frac{(1-\omega)\,f(z)}{f(z) - \omega} \in M(r). \tag{11}$$

Nous obtenons facilement des développements asymptotiques (7),(8),(9) et (10) de certaines conditions nécessaires pour les fontions extrémales.

Théorème 1. Soit ϕ une fonctionnelle complexe, définie sur $M(r)$, qui possède une différentielle au sens de Gâteaux L. Supposons que $\text{Re}\phi$ atteint son maximum (minimum) en f; donc nous avons

$$(\alpha)\quad \operatorname{Im}\{L(z\, f'(z) - r\, f'(r)\, f(z))\} = 0;$$

$$(\beta)\quad \operatorname{Re}\{L(z\, f'(z) - r\, f'(z)\, f(z))\} \begin{array}{ll} \geq 0 & \text{pour maximum,} \\ \leq 0 & \text{pour minimum;} \end{array}$$

$$(\gamma)\quad \operatorname{Re}\left\{L(z\, f'(z)\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z} - r\, f'(r)\, f(z)\, \frac{\zeta + r}{\zeta - r})\right\}$$

$$\begin{array}{ll} \geq 0 \text{ pour maximum,} & \\ \leq 0 \text{ pour minimum,} & \zeta \in \partial U; \end{array}$$

$$(\delta)\quad L\{(f'(z) - f'(0)) - f(z)\,(f'(r) - f'(0))\} + L\{-z^2 f'(z) +$$

$$+ r^2 f'(r)\, f(z)\} = 0;$$

il résulte de (α) et (β)

$$(\beta_1)\quad L\{z\, f'(z) - r\, f'(r)\, f(z)\} \begin{array}{ll} \geq 0 & \text{pour maximum,} \\ \leq 0 & \text{pour minimum.} \end{array}$$

Ici $L(h;\, f) = L(h)$.

3. LA VARIATION DE LA FRONTIÈRE (BOUNDARY VARIATION)

De même comme dans [1] p. 304-305, nous arrivons au theoreme:

Théorème 2. Si Re ϕ atteint maximum (minimum) dans la classe $M(r)$ en f, dans lequel ϕ possède une différentielle au sens de Gâteaux L, qui n'est pas une constante sur $M(r)$, donc $\Gamma = \mathbb{C}\setminus f(U)$ est la somme des arcs analytiques $w = w(t)$, vérifiants une inégalité

$$\frac{1}{w(w-1)}\, L\left(\frac{f(f-1)}{f-w}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \begin{array}{l} > 0 \text{ pour max.} \\ < 0 \text{ pour min.} \end{array} \tag{12}$$

De plus, les seuls points où Γ se ramifie, ou bien n'est plus analytique, excepté ∞, ce sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{w(w-1)}\, L\left(\frac{f(f-1)}{f-w}\right) = 0. \tag{13}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que le premier membre de (13) ne s'annulle pas identiquement pour $w \in \Gamma$. C'est vérifie toujours, lorsque L n'a pas la forme

$$L(h) = L(1)\,h(0), \quad \text{voir [2].} \tag{14}$$

En effet, supposons que le premier membre de (13) s'annulle pour tout $w \in \Gamma$. Envisageons la fonctionnelle linéaire

$$M(h) = L(h) - L(1)\,h\,(0) + L(f)\,(h(0) - h(r)).$$

Nous avons de l'hypothese que

$$M\left(\frac{1}{f - w}\right) = \frac{1}{w(w - 1)}\,L\left(\frac{f(f - 1)}{(f - w)}\right) = 0 \tag{15}$$

pour tout $w \in \Gamma$, d'où en vertu de [5], lemme 4,5, nous déduisons que M s'annulle identiquement dans $H(U)$; alors

$$L(h) = L(1)\,h(0) + L(f)\,(h(0) - h(r)). \tag{16}$$

En posant dans (16) $h = f$, nous obtenons $L(f) = 0$, d'où

$$L(h) = L(1)\,h(0),$$

donc L est constante sur $M(r)$, contrairement à l'hypothèse.

Remarque. Nous avons bien sûr que $\infty \in \Gamma$. Le premier membre de (13) ne s'annulle pas identiquement sur Γ et est analytique dans l'infini, donc il peut avoir seulement un nombre fini des zéros sur Γ. Alors Γ se compose d'un nombre fini des arcs analytiques.

5. LES VARIATIONS INTÉRIEURES ET EXTÉRIEURE DE SCHIFFER

Notre but est trouver des variations du type Schiffer dans la famille $M(r)$. Soit $f \in M(r)$ et $w_o \notin \partial f(U)$. Posons

$$w = e^{i\alpha}\,\frac{w - 1}{w - w_o}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On voit que $\phi(1) = 0$ et $\phi(w)$ est une fonction holomorphe dans l'entourage de la frontière $\partial f(U)$. Soit en outre

$$w^*(w) = w \exp\{\varepsilon\, \phi\,(w)\} = w + \varepsilon\, w\, \phi\,(w) + o(\varepsilon),$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Cette fonction est aussi holomorphe pour $w \neq w_o$ et pour $|\varepsilon|$ suffisament petits univalente dans un certaine entourage de la frontière $\partial f(U)$. On peut admettre pour tels ε, que $w^*(\partial f(U))$ est la frontière d'un certaine domaine simplement connexe, contenant les points 0 et 1. Désignons ce domaine par D^*. D'après le théorème de Riemann il existe une fonction f_1^*, appliquante le disque U sur D^*, telle que $f_1^*(0) = 0$. Trouvons sa forme. Nous allons appliquer le théorème de Golousin [3] p. 99. Conformément a ce théorème il faut trouver la partie principale $S(z)$ du développement en série de Laurent au centre 0 de la fonction

$$\frac{f(z)}{z\, f'(z)}\, \psi\,(f(z)) = e^{i\alpha}\, \frac{f(z)(f(z) - 1)}{z\, f'(z)(f(z) - w_o)}, \tag{17}$$

qui est holomorphe dans un certain anneau $\{z\colon \eta < |z| < 1\}$, $\eta > 0$.
Si $w_o \notin \overline{f(U)}$, cette fonction ne possède pas des points singuliers dans U et dans ce cas $S(z) = 0$. Si par contre $w_o \in f(U)$, soit $w_o = f(\zeta)$, alors un seul point singulier de la fonction (17) dans le disque U est $z = \zeta$. C'est un pôle simple. Alors

$$S(z) = e^{i\alpha}\, \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1)}{\zeta\, f'^2(\zeta)(z - \zeta)} = e^{i\alpha}\, \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1}{2\, \zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{z + \zeta}{z - \zeta} - 1\right).$$

Dans le premier cas la fonction f_1^* a la forme

$$f_1^*(z) = f(z) + \varepsilon\, e^{i\alpha}\, \frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - w_o} + o(\varepsilon), \tag{18}$$

dans le second cas

$$\begin{aligned} f_1^*(z) = f(z) + \varepsilon &\left\{ e^{i\alpha}\, \frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - f(\zeta)} - \right. \\ &- e^{i\alpha}\, z\, f'(z)\, \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{z + \zeta}{z - \zeta} - 1\right) + \\ &\left. + e^{-i\alpha}\, z\, f'(z)\, \frac{\overline{f(\zeta)}(\overline{f(\zeta)} - 1)}{2\bar{\zeta}^2\, \overline{f'^2(\zeta)}} \left(\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} - 1\right) \right\} + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{19}$$

On voit facilement que la fonction f_1^* de (18) est la fonction de la classe $M(r)$ et elle correspond à la variation extérieure de Schiffer. Cependant il faut normaliser la fonction (19). Donc

$$f_1^*(r) = 1 + \varepsilon \left\{ -e^{i\alpha}\, r\, f'(r) \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{r + \zeta}{r - \zeta} - 1 \right) + \right. \tag{20}$$

$$\left. + e^{-i\alpha}\, r\, f'(r) \frac{\overline{f(\zeta)}\,(\overline{f(\zeta)} - 1)}{2\bar{\zeta}^2\, \overline{f'^2(\zeta)}} \left(\frac{1 + r\bar{\zeta}}{1 - r\bar{\zeta}} - 1 \right) \right\} + o(\varepsilon).$$

En divisant (19) par (20), nous obtenons

$$f^*(z) = \frac{f_1^*(z)}{f_1^*(r)} = f(z) + \varepsilon \left\{ e^{i\alpha} \frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - f(\zeta)} - \right.$$

$$- e^{i\alpha}\left(z\, f'(z) \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{z + \zeta}{z - \zeta} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - f(z)\, r\, f'(r) \frac{f(\zeta)(f(\zeta) - 1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{r + \zeta}{r - \zeta} - 1 \right) \right) + \tag{21}$$

$$+ e^{-i\alpha}\left(z\, f'(z) \frac{\overline{f(\zeta)}\,(\overline{f(\zeta)} - 1)}{2\bar{\zeta}^2\, \overline{f'^2(\zeta)}} \left(\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - f(z)\, r\, f'(r) \frac{\overline{f(\zeta)}\,(\overline{f(\zeta)} - 1)}{2\bar{\zeta}^2\, \overline{f'^2(\zeta)}} \left(\frac{1 + r\bar{\zeta}}{1 - r\bar{\zeta}} - 1 \right) \right) + o(\varepsilon).$$

On voit que $f^* \in M(r)$.

En vertu du théorème 1, (α) et (γ) et de (21) nous arivons d'une façon connue au théorème suivant:

Théorème 3. Si ϕ est une fonctionnelle complexe, définie et continue sur $M(r)$, f une fonction pour laquelle $\mathrm{Re}\,\phi$ atteint maximum (minimum) et si ϕ possède une différentielle L au sens de Gâteaux en f, donc

$$\frac{\zeta^2\, f'^2(\zeta)}{f(\zeta)(f(\zeta) - 1} L\left(\frac{f(z)\ (f(z) - 1)}{f(z) - f(\zeta)} \right) = \frac{1}{2} L\Big(z\, f'(z)\ \times$$

$$\times \frac{z+\zeta}{z-\zeta} - f(z)\, r\, f'(r)\, \frac{r+\zeta}{r-\zeta}\Bigg)$$

$$\overline{} \tag{22}$$

$$- \frac{1}{2} L\left(z\, f'(z)\, \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} - f(z)\, r\, f'(r)\, \frac{1+r\bar{\zeta}}{1-r\bar{\zeta}}\right);$$

le second membre de cet équation est réel pour $\zeta \in \partial U$ et nonpositif dans le cas de maximum, nonnegatif dans le cas de minimum.

6. DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DE MONTEL

Soit $M_R(r)$ désigne une famille des fonctions de Montel, qui satisfaient à la condition supplémentaire

$$\operatorname{Im} b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Remarquons que les fonctions k_1 et k_2 appartiennent à $M_R(r)$. $M_R(r)$ est bien sûr aussi une famille compacte. Des inégalités (2), (5) et (6) sont exactes dans cette classe, car des fonctions extrémales ce sont des fonctions k_1 et k_2. Indiquons des applications élémentaires qui nous ammènent des fonctions de la classe $M_R(r)$ aux fonctions de la classe $M_R(r)$:

(a') Si $f \in M_R(r)$, alors $\overline{f(\bar{z})} \in M_R(r)$ $(\overline{f(\bar{z})} = f(z))$.

(b') Si $f \in M_R(r)$ et φ est une fonction univalente dans U, $\varphi(U) \subset U$, $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$, alors

$$f^* = \frac{f \circ \varphi - f(\varphi(0))}{f(\varphi(r)) - f(\varphi(0))} \in M_R(r).$$

(b_1') En posant $\varphi(z) = \rho z$, $0 < \rho < 1$, nous obtenons $f^*(z) = \frac{f(\rho z)}{f(\rho r)} \in M_R(r)$, d'où on a la formule pour la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) - (1-\rho)(z\, f'(z) - r\, f'(r)\, f(z)) + o\,((1-\rho)), \quad \rho \longrightarrow 1. \tag{23}$$

(b_2') Prenons en considération une équation différentielle

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - w\, p(w),$$

où

$$p(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-i\theta}w}{1-e^{-i\theta}w} + \frac{1+e^{i\theta}w}{1-e^{i\theta}w}\right) \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

En vertu du théorème 6.3, [4], p. 160, pour tout $z \in U$, cette équation a une seule solution $w = \varphi(z,t)$, $0 \le t < \infty$, satisfisante à la condition initiale $\varphi(z,0) = z$, tandis que $\varphi(z,t)$ est une fonction absolument continue par rapport à t pour tout z fixe et $\varphi(z,t)$ est une fonction univalente par rapport à z pour tout t fixe. En outre $\varphi(0,t) = 0$, $|\varphi(z,t)| < 1$ et comme $p(\bar{w}) = \overline{p(w)}$, donc $\varphi(\bar{z},t) = \overline{\varphi(z,t)}$. Alors nous avons

$$f^*(z) = \frac{f(\varphi(z,t))}{f(\varphi(r,t))} \in M_R(r), \qquad 0 < t < +\infty,$$

d'où nous obtenons la formule pour la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) + t\left(-\frac{1}{2}\, z\, f'(z)\left(\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} + \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\, f(z)\, r\, f'(r)\left(\frac{1+e^{-i\theta}r}{1-e^{-i\theta}r} + \frac{1+e^{i\theta}r}{1-e^{i\theta}r}\right)\right) + o(t), \qquad t \longrightarrow 0. \tag{24}$$

(c') Si $f \in M_R(r)$, alors $f^*(z) = \dfrac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\zeta z}\right) - f(\zeta)}{f\left(\dfrac{r+\zeta}{1-r\zeta}\right) - f(\zeta)} \in M_R(r)$,

où $\zeta \in U$, $\zeta \in \mathbb{R}$. D'où nous arrivons à la formule de la fonction proche

$$f^*(z) = f(z) + (((f'(z) - f'(0)) - f(z)(f'(r) - f'(0)) +$$
$$+ (-z^2 f'(z) + r^2 f'(r)\, f(z)))\, \zeta + o(\zeta), \qquad \zeta \longrightarrow 0. \tag{25}$$

(d') Si $f \in M_R(r)$, F est une fonction holomorphe, univalente et symetrique dans $f(U)$, alors

$$f^*(z) = \frac{F(f(z)) - F(0)}{F(1) - F(0)} \in M_R(r).$$

(d_1') Si $f \in M_R(r)$ et $\omega \notin f(U)$, $\omega \in \mathbb{R}$, donc $f^*(z) = \dfrac{(1-\omega)\, f(z)}{f(z) - \omega} \in M_R(r)$.

Nous obtenons facilement des développements asymptotiques (23), (24) et (25) de certaines conditions nécessaires pour les fonctions extrémales.

Théorème 1'. Soit ϕ une fonctionnelle complexe, continue, définie sur $M_R(r)$, possèdant une différentielle au sens de Gâteaux L en f. Supposons que $\operatorname{Re}\phi$ atteint son maximum (minimum) en f. Alors

$$(\beta')\quad \left\{\operatorname{Re} L(z\, f'(z) - r\, f'(z)\, f(z))\right\} \begin{matrix} \geq 0 & \text{dans le cas de maximum,} \\ \leq 0 & \text{dans le cas de minimum;} \end{matrix}$$

$$(\gamma')\quad \operatorname{Re}\left\{L(z\, f'(z))\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1 + \zeta z}{1 - \zeta z}\right)\right.$$

$$\left. - f(z)\, r\, f'(r)\left(\frac{\zeta + r}{\zeta - r} + \frac{1 + \zeta r}{1 - \zeta r}\right)\right\} \begin{matrix} \geq 0 & \text{pour maximum.} \\ \leq 0 & \text{pour minimum,} \end{matrix} \qquad \zeta \in \partial U;$$

$$(\delta')\quad \operatorname{Re}\left\{L((f'(z) - f'(0)) - f(z)(f'(r) - f'(0)) + (-z^2\, f'(z) + \right.$$

$$\left. + r^2\, f'(r)\, f(z)))\right\} = 0.$$

Enfin nous avons trouver une équation du type Schiffer dans la classe $M_R(r)$. Soit $f \in M_R(r)$ et $w_o \notin \partial f(U)$. Posons

$$\phi(w) = e^{i\alpha}\frac{w - 1}{w - w_o} + e^{-i\alpha}\frac{w - 1}{w - \bar{w}_o}.$$

On voit que $\phi(1) = 0$ et que $\phi(w)$ est une fonction holomorphe et symétrique dans un entourage de la frontière $\partial f(U)$. Soit ensuite

$$w^*(w) = w \exp\{\varepsilon\, \phi(w)\} = w + \varepsilon\, w\, \phi(w) + o(\varepsilon), \quad \text{ou} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Le raisonnement pareil comme dans le cas des fonctions de la famille $M(r)$ nous ammène à deux formules asymptotiques. Si notamment $w_o \notin \overline{f(U)}$, alors il existe une fonction de la classe $M_R(r)$ sous la forme

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left\{e^{i\alpha}\frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - w_o} + e^{-i\alpha}\frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - \bar{w}_o}\right\} + o(\varepsilon). \quad (26)$$

Dans la cas quand $w_o \in f(U)$, il existe la fonction de la classe $M_R(r)$ sous la forme

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left\{\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - f(\zeta)} + e^{-i\alpha}\frac{f(z)(f(z) - 1)}{f(z) - f(\bar{\zeta})}\right) - \right.$$

$$-z\, f'(z) \left\{ e^{i\alpha} \frac{f(\zeta)(f(\zeta)-1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{z+\zeta}{z-\zeta} - \frac{1+z\zeta}{1-z\zeta} \right) + \right.$$

$$+ e^{-i\alpha} \frac{f(\bar\zeta)(f(\bar\zeta)-1)}{2\bar\zeta^2\, f'^2(\bar\zeta)} \left(\frac{z+\bar\zeta}{z-\bar\zeta} - \frac{1+z\bar\zeta}{1-z\bar\zeta} \right) \Bigg) + \tag{27}$$

$$+ f(z)\, r\, f'(r) \left\{ e^{i\alpha} \frac{f(\zeta)(f(\zeta)-1)}{2\zeta^2\, f'^2(\zeta)} \left(\frac{r+\zeta}{r-\zeta} - \frac{1+r\zeta}{1-r\zeta} \right) + \right.$$

$$+ e^{-i\alpha} \frac{f(\bar\zeta)(f(\bar\zeta)-1)}{2\bar\zeta^2\, f'^2(\bar\zeta)} \left(\frac{r+\bar\zeta}{r-\bar\zeta} - \left\{ \frac{1+r\bar\zeta}{1-r\bar\zeta} \right) \right) \right\} + o(\varepsilon), \qquad \text{ou} \quad f(\zeta) = w_o.$$

En vertu du théorème 1', (γ') et de (27) nous arrivons d'une façon connue au théorème:

Théorème 3'. Si ϕ est une fonctionnelle complexe, continue, définie sur $M_R(r)$, f est une fonction pour laquelle $\operatorname{Re}\phi$ attein maximum (minimum) dans $M_R(r)$ et si ϕ possède en f une différentielle L au sens de Gâteaux, donc

$$\frac{\zeta^2\, f'^2(\zeta)}{f(\zeta)(f(\zeta)-1)} \left(L\left(\frac{f(z)\;(f(z)-1)}{f(z)-f(\zeta)} \right) + \overline{L\left(\frac{f(z)\;(f(z)-1)}{f(z)-f(\bar\zeta)} \right)} \right) = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2} L\left(z\, f'(z) \left(\frac{z+\zeta}{z-\zeta} - \frac{1+r\zeta}{1-r\zeta} \right) - f(z)\, r\, f'(r) \left(\frac{r+\zeta}{r-\zeta} - \frac{1+r\zeta}{1-r\zeta} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{L\left(z\, f'(z) \left(\frac{z+\bar\zeta}{z-\bar\zeta} - \frac{1+r\bar\zeta}{1-r\bar\zeta} \right) - f(z)\, r\, f'(r) \left(\frac{r+\bar\zeta}{r-\bar\zeta} - \frac{1+r\bar\zeta}{1-r\bar\zeta} \right) \right)}.$$

On voit que le seconde membre de (28) est réel sur la circonférence ∂U et en vertu de (γ') il est nonpositif dans le cas de maximum et nonnegatif dans le cas de minimum.

Example. $\phi(f) = b_1$.

Nous voyons tout de suite d'après l'inégalité (2) que $\max \operatorname{Re} b_1 = \dfrac{(1+r)^2}{r}$. La fonction k_2 réalise ce maximum. Notre but maintenant est trouver minimum $\operatorname{Re} b_1$. L'équation (28) pour cette fonctionnelle prend la forme

$$\frac{\zeta^2 f'^2(\zeta)}{f^2(\zeta)(f(\zeta)-1)}\, b_1 = -b_1 + b_1 r f'(r)\left(\frac{\zeta+r}{\zeta-r} + \frac{1+r\zeta}{1-r\zeta}\right), \tag{29}$$

où le second membre est nonnegatif pour $\zeta \in \partial U$ et il doit avoir au moins une racine double sur ∂U. Comme le second membre peut avoir tout au plus deux racines et en outre il est symétrique par rapport à l'axe réel, donc c'est uniquement 1 ou -1 qui peut-être cette racine. Dans le cas que 1 est cette racine double, le seconde membre de (29) a la forme

$$\frac{b_1\, r\, (\zeta - 1)^2}{(\zeta - r)(1 - r\zeta)}$$

et doit être nonnegatif sur ∂U. Il en résulte facilement que $b_1 < 0$ et la fonction minimale doit satisfaire à l'équation

$$\frac{w}{w\sqrt{w-1}} = \pm \frac{\sqrt{r}\,(\zeta - 1)}{\zeta\sqrt{(\zeta - r)(1 - r\zeta)}}.$$

La fonction k_2 est ici la solution unique vérifiante la condition $f(r) = 1$.

Nous avons ainsi $b_1 = \frac{(1+r)^2}{r}$, ce qui est contradictoire avec une demande que $b_1 < 0$. Supposons maintenant que -1 est cette racine double. Alors $b_1 > 0$ et après avoir intégrer l'équation (29) nous obtenons comme une solution unique vérifiante la condition initiale $f(r) = 1$ la fonction k_1. Ainsi nous avons trouvé la borne inférieure et la borne supérieure du ceofficient b_1 pour la fonction $f \in M_R(r)$:

$$\frac{(1-r)^2}{r} \le b_1 \le \frac{(1+r)^2}{r}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Duren P.: Univalent functions, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 259, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer 1983.

[2] Duren P., Schober G.: Nonvanishing Univalent Functions, Math. Z. 170, 195-216 (1980).

[3] Gołuzin G.M.: Geometriczeskaja teorija funkcii kompleksnogo peremennogo, Moskwa 1966.

[4] Pommerenke Ch.: Univalent Functions, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen 1975.

[5] Schober G.: Univalent Functions-Selected Topics. Lecture Notes in Mathematics 478, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1975.

ON A CLASS OF THE MONTEL FUNCTIONS

Summary

Let $M(r)$ be a family of holomorphic univalent functions on the set $U = \{z: |z| < 1\}$ of the form $f(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots$, such that $f(r) = 1$. Let $M_R(r)$ be a subset of $M(r)$ consisting of all functions which are symmetric with respect to real axis. Some families of variations for functions $f \in M(r)$ and $f \in M_R(r)$ are found (formulas (7)-(10), (21)-(27) and (18)). Some sufficient conditions for extremal functions in $M(r)$ and $M_R(r)$ with respect to differential functionals are given (theorems 1,2,3,1' and 3'). As examples sup and inf of the functional b_1 in the family $M_R(r)$ are found.

O KLASIE FUNKCJI MONTELA

Streszczenie

Niech $M(r)$ będzie rodziną funkcji holomorficznych i jednolistnych w $U = \{z: |z| < 1\}$ postaci

$$f(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots,$$

takich, że

$$f(r) = 1$$

i niech $M_R(r)$ oznacza te funkcje rodziny $M(r)$, które są symetryczne względem osi rzeczywistej. Znaleziono kilka rodzin wariacji dla funkcji $f \in M_R(r)$ i dla funkcji $F \in M_R(r)$ (wzory (7),(8),(9),(10),(18),(21),(23),(24),(25),(26) i (27)) i rozmaite warunki konieczne dla funkcji ekstremalnych w $M(r)$ i $M_R(r)$ ze względu na funkcjonały różniczkowalne (twierdzenia 1,2,3,1' i 3'). W charakterze przykładu znaleziono kresy górny i dolny funkcjonału b_1 w rodzinie $M_R(r)$.

О КЛАССЕ ФУНКЦИИ МОНТЕЛЯ

Резюме. Пусть $M(r)$ есть семейство голоморфных и однолистных функций в $U = \{z: |z|<1\}$ вида

$$f(z)=b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\ldots$$

таких, что $f(r)=1$
и пусть $M_R(r)$ обозначает эти функции семейства $M(r)$, которые симметричны относительно вещественной оси. Найдены несколько семейств вариаций для функций $f \in M(r)$ и для функций $f \in M_R(r)$/ формулы (7),(8),(9),(10),(18),(21),(23), (24),(25),(26) и (27)/ и разнообразные необходимые условия для функций экстремальных в $M(r)$ и $M_R(r)$ по отношению к дифференцируемым функционалам /теоремы 1, 2, 3, 1' и 3'/. В качестве примера найдены верхняя и нижняя граница функционала b_1 в семействе $M_R(r)$.