ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Barbara BIŁY

OPTYMALNY REGULATOR LINIOWO-KWADRATOWY DLA UKŁADU 2-D

Streszczenie. W pracy rozważa się zagadnienie wyznaczenia sterowania optymalnego dla ogólnego liniowego, dyskretnego układu dwuwymiarowego przy kwadratowym wskaźniku jakości, z ograniczeniami na trajektorię układu i sterowanie. Wykorzystuje się idee programowania kwadratowego.

LINEAR QUADRATIC PROBLEM FOR 2-D SYSTEM

Summary. The quadratic optimal control problem for the general model of 2-D system, with constraints of control and state vector in fixed rectangle is considered. This problem, by transformation for system and performance index, is reduced to equivalent mathematical programming problem. The simple numerical example illustrates the presented method.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА 2-Д

Резюме. В настоящей работе решена проблема оптимального управления для двухмерной, дискретной системы типа 2-Д, с учетом квадратичного качественного критерия и дополнительных ограничений траэктории и управления. Задачу решено пользуящь соотвецтвенной трансформацией системы и показателя качества в равновецемую задачы квадратного программирования.

1. Postać zadania sterowania optymalnego

Dany jest obiekt dynamiczny opisany równaniem różnicowym o postaci [3]:

$$\begin{aligned} x(i+1,j+1) &= A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+ \\ &+ B_0u(i,j)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1) \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $x(i,j) \in \mathbb{R}^n$, $u(i,j) \in \mathbb{R}^m$, $i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych wraz z zerem), A_i, B_i $(i = 0,1,2)$ są macierzami rzeczywistymi odpowiednich wymiarów.

Dla takiego modelu sformułujemy następujące zadanie sterowania optymalnego:

Wyznaczyć sekwencję sterowań

$$u = [u(0,0), u(0,1), \dots, u(r-1,s), u(r,0), u(r,1), \dots, u(r,s-1)] \tag{2}$$

i odpowiadającą jej trajektorię układu (1)

$$x = [x(0,0), x(0,1), \dots, x(r-1,s), x(r,0), x(r,1), \dots, x(r,s-1), x(r,s)] \tag{3}$$

minimalizujące wskaźnik jakości postaci:

$$\begin{aligned} I_{r,s}(u) &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in D_{r,s}} x^T(i,j)Q(i,j)x(i,j) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in \bar{D}_{r,s}} u^T(i,j)P(i,j)u(i,j), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D_{r,s} &= \{0,1,\dots,r\} \times \{0,1,\dots,s\} \qquad (\times \text{ – iloczyn kartezjański zbiorów}) \\ \bar{D}_{r,s} &= \{0,1,\dots,r\} \times \{0,1,\dots,s\} \setminus \{(r,s)\} \end{aligned}$$

$Q(i,j)$ są macierzami $n \times n$ wymiarowymi, symetrycznymi, nieujemnie określonymi, $P(i,j)$ są macierzami $m \times m$ wymiarowymi, symetrycznymi, dodatnio określonymi.

Minimalizacja ta przeprowadzona jest przy następujących ograniczeniach:

a) ograniczenia sterowania : składowe wektora sterowania $u_l(i,j)$ spełniają warunek:

$$w_1 \leqslant u_l(i,j) \leqslant w_2, \tag{5}$$

gdzie w_1, $w_2 \in (-\infty, \infty)$ dla $(i,j) \in \bar{D}_{r,s}$,

b) ograniczenia trajektorii układu: składowe wektora stanu $x_l(i,j)$ spełniają warunek:

$$k_1 \leqslant x_l(i,j) \leqslant k_2, \tag{6}$$

gdzie k_1, $k_2 \in (-\infty, \infty)$ dla $(i,j) \in D_{r,s}$,

c) ograniczenie stanu końcowego

$$x(r,s) = c_k \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

oraz zadane są następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} x(i,0) &= x_{i0} \in \mathbb{R}^n, \\ x(0,j) &= x_{oj} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{8}$$

Dodatkowo konieczne jest założenie lokalnej sterowalności [4] w prostokącie $\bar{D}_{r,s}$, czyli możliwości osiągnięcia z dowolnych warunków brzegowych dowolnego stanu końcowego $x(r,s)$ poprzez odpowiedni dobór sekwencji sterującej u.

2. Metoda rozwiązania zagadnienia

Postawiony w rozdziale 1 problem zostanie sprowadzony do równoważnego mu problemu programowania kwadratowego z ograniczeniami nierównościowymi.

Zadanie programowania kwadratowego z ograniczeniami [2]:

Zminimalizować funkcję

$$f(z) = \frac{1}{2}\langle z, Hz\rangle \qquad (\langle,\rangle \text{ oznacza iloczyn skalarny wektorów})$$

przy ograniczeniach $Rz = c$ oraz $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$, przy czym H jest macierzą symetryczną nieujemnie określoną, o wymiarze $k \times k$, R jest macierzą o wymiarze $l \times k$ oraz α i β są wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^k$, których składowe mogą przyjmować dowolne wartości z przedziału $(-\infty, +\infty)$.

Warunek konieczny i wystarczający optymalności dla zadania programowania kwadratowego z ograniczeniami ma postać następującą [2]:

Twierdzenie 1. *Niech z będzie rozwiązaniem dopuszczalnym, tzn. spełnia ograniczenia $Rz = c$ oraz $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$. Wówczas z jest rozwiązaniem optymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor ψ, $\psi^T = [\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k] \in \mathbb{R}^k$, taki że dla $i = 1, 2, \ldots, k$ zachodzi:*

$$\begin{aligned} \langle r_i, \psi\rangle - \langle h_i, z\rangle &= 0, && \text{jeśli } \alpha_i < z_i < \beta_i \\ \langle r_i, \psi\rangle - \langle h_i, z\rangle &\leqslant 0, && \text{jeśli } z_i = \alpha_i \\ \langle r_i, \psi\rangle - \langle h_i, z\rangle &\geqslant 0, && \text{jeśli } z_i = \beta_i \end{aligned}$$

przy czym dla $i = 1, 2, \ldots, k$ r_i jest i-tą kolumną macierzy R, h_i jest i-tą kolumną macierzy H.

Dokonamy transformacji układu (1) i wskaźnika jakości (4) do postaci przedstawionego zadania programowania kwadratowego z ograniczeniami. W tym celu wprowadzimy pomocniczo wektor z zdefiniowany następująco:

$$\begin{aligned} z^T = & \big[x^T(0,0), x^T(0,1), \dots, x^T(0,s), x^T(1,0), \dots, x^T(r,s), u^T(0,0), \\ & u^T(0,1), \dots, u^T(0,s), u^T(1,0), \dots, u^T(r-1,s), \dots, u^T(r,s-1)\big], \end{aligned} \tag{9}$$

z jest wektorem $[(r+1)(s+1)n + (r+sr+s)m]$ wymiarowym.

Przekształćmy wskaźnik jakości (4) do interesującej nas postaci $\frac{1}{2}z^T Hz$. W tym celu przedstawmy $x(i,j)$ jako liniową funkcję wektora z

$$x(i,j) = w(i,j)z \tag{10}$$

gdzie macierz

$$w(i,j) = [0, \dots, 0, I_n, 0, \dots, 0], \tag{11}$$

tzn. macierz jednostkowa n-tego stopnia stawiana jest w odpowiednim miejscu wynikającym z przyjęcia wektora z. Zatem można zapisać

$$x^T(i,j)Q(i,j)x(i,j) = z^T w^T(i,j)Q(i,j)w(i,j)z = z^T L(i,j)z. \tag{12}$$

Analogicznie dla sterowań

$$u^T(i,j)P(i,j)u(i,j) = z^T w^T(i,j)P(i,j)w(i,j)z = z^T \hat{L}(i,j)z \tag{13}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_{r,s} = & \frac{1}{2}z^T\big[L(0,0), L(0,1), \dots, L(0,s), L(1,0), \dots, L(r-1,s), \\ & \dots, L(r,s-1), 0, \hat{L}(0,0), \hat{L}(0,1), \dots, \hat{L}(0,s), \hat{L}(1,0), \dots, \\ & \hat{L}(r-1,s), \dots, \hat{L}(r,s-1)\big]z. \end{aligned} \tag{14}$$

Zatem macierz H ma postać następującą:

$$\begin{aligned} H = & \big[L(0,0), L(0,1), \dots, L(0,s), L(1,0), \dots, L(r-1,s), \\ & \dots, L(r,s-1), 0, \hat{L}(0,0), \hat{L}(0,1), \dots, \hat{L}(0,s), \hat{L}(1,0), \dots, \\ & \hat{L}(r-1,s), \dots, \hat{L}(r,s-1)\big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Aby określić macierz R i wektor c w równaniu ograniczeń $Rz = c$ oraz $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$ skorzystamy z dynamicznego opisu układu. Do ograniczeń równościowych będą należeć równania różnicowe (1) rozpisane w każdym punkcie dyskretnym prostokąta $\bar{D}_{r,s}$. Warunki brzegowe i końcowe podciągniemy pod ograniczenia nierównościowe.

Wektor c oraz macierz R przyjmiemy następująco:

$$c^T = [0,\dots,0] \in \mathbb{R}^{rs}, \tag{16}$$

$$R = [R_1 \mid R_2] \tag{17}$$

gdzie

$$R_1 = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_1 & F_2 \end{bmatrix}_{rxs}, \tag{18}$$

przy czym F_1 i F_2 są określone następująco:

$$F_1 = -\begin{bmatrix} A_0 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 & A_2 \end{bmatrix}_{sx(s+1)},$$

$$F_2 = -\begin{bmatrix} -A_1 & I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -A_1 & I_n \end{bmatrix}_{sx(s+1)}, \tag{19}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & G_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G_1 & G_2 \end{bmatrix}_{rxs}, \tag{20}$$

przy czym G_1 i G_2 są określone następująco:

$$G_1 = -\begin{bmatrix} B_0 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_0 & B_2 \end{bmatrix}_{sx(s+1)}, G_2 = -\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_1 \end{bmatrix}_{sxs} \tag{21}$$

Co do ograniczeń nierównościowych, współrzędne wektorów ograniczających α i β mają postać następującą:

$$\alpha_t = \begin{cases} x_{0j} & \text{dla} \quad t = 1,2,\ldots,(s+1)n, \\ x_{i0} & \text{dla} \quad t = (s+1)n+1,\ldots,(s+2)n, \\ & \qquad\;\; t = 2(s+1)n+1,\ldots,(2s+3)n, \\ & \qquad\;\; \vdots \\ & \qquad\;\; t = r(s+1)n+1,\ldots,(rs+r+1)n, \\ k_1 & \text{dla} \quad t = (s+2)n+1,\ldots,2(s+1)n, \\ & \qquad\;\; t = (2s+3)n+1,\ldots,3(s+1)n, \\ & \qquad\;\; \vdots \\ & \qquad\;\; t = (rs+r+1)n+1,\ldots,(rs+r+s)n, \\ c_k & \text{dla} \quad t = (rs+r+s)n+1,\ldots,(r+1)(s+1)n, \\ w_1 & \text{dla} \quad t = (r+1)(s+1)n+1,\ldots,(r+1)(s+1)n+(r+sr+s)m, \end{cases} \tag{22}$$

$$\beta_t = \begin{cases} x_{0j} & \text{dla} \quad t = 1,2,\ldots,(s+1)n, \\ x_{i0} & \text{dla} \quad t = (s+1)n+1,\ldots,(s+2)n, \\ & \qquad\;\; t = 2(s+1)n+1,\ldots,(2s+3)n, \\ & \qquad\;\; \vdots \\ & \qquad\;\; t = r(s+1)n+1,\ldots,(rs+r+1)n, \\ k_2 & \text{dla} \quad t = (s+2)n+1,\ldots,2(s+1)n, \\ & \qquad\;\; t = (2s+3)n+1,\ldots,3(s+1)n, \\ & \qquad\;\; \vdots \\ & \qquad\;\; t = (rs+r+1)n+1,\ldots,(rs+r+s)n, \\ c_k & \text{dla} \quad t = (rs+r+s)n+1,\ldots,(r+1)(s+1)n, \\ w_2 & \text{dla} \quad t = (r+1)(s+1)n+1,\ldots,(r+1)(s+1)n+(r+sr+s)m. \end{cases} \tag{23}$$

Zatem dokonaliśmy transformacji postawionego w rozdziale 1 zagadnienia do równoważnego mu zadania programowania kwadratowego z ograniczeniami nierównościowymi. Zacytowane w rozdziale 2 twierdzenie, stanowiące warunek konieczny i wystarczający optymalności, pozwala wyznaczyć sterowanie optymalne dla przetransformowanego problemu.

3. Przykład liczbowy

Rozważmy model ogólny układu $2-D$ opisany równaniem (1), w którym:

$$A_0 = A_1 = A_2 = B_0 = B_1 = B_2 = 1,$$

$$n = m = 1, \qquad (r, s) = (1, 2)$$

Macierze $Q(i,j)$ i $P(i,j)$ występujące we wskaźniku jakości $I_{1,2}$ danym wzorem (4) mają zadaną postać:

$$Q(i,j) = P(i,j) = 1 \qquad \text{dla } (i,j) \in \bar{D}_{1,2}.$$

Warunki brzegowe są dane równościami:

$$\begin{aligned} x(0,0) &= x_{00} = x(1,0) = x_{10} = 2, \\ x(0,1) &= x_{01} = x(0,2) = x_{02} = 0. \end{aligned}$$

Stan końcowy:

$$x(1,2) = c_k = 2$$

oraz ograniczenia

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 2, \quad w_1 = -1, \quad w_2 = 1.$$

Zgodnie ze wzorem (9) przyjmujemy wektor z w postaci następującej:

$$\begin{aligned} z^T = &\Big[x(0,0), x(0,1), x(0,2), x(1,0), x(1,1), x(1,2), \\ &u(0,0), u(0,1), u(0,2), u(1,0), u(1,1)\Big]. \end{aligned}$$

Wyznaczamy wektor c i macierz R według wzorów (16) i (17):

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Macierz H jest macierzą jednostkową stopnia 11-tego

$$H = I_{11},$$

$$\begin{aligned} \alpha^T &= \Big[x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{10}, k_1, c_k, w_1, w_1, w_1, w_1, w_1\Big] = \\ &= \Big[2, 0, 0, 2, -2, 2, -1, -1, -1, -1, -1\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^T &= \Big[x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{10}, k_2, c_k, w_2, w_2, w_2, w_2, w_2\Big] = \\ &= \Big[2, 0, 0, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\Big]. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia sterowania optymalnego wprowadźmy pomocniczo wektor

$$z^T = [z_1, z_2, \ldots, z_{11}]$$

Wektor z ma być rozwiązaniem dopuszczalnym, tzn. $Rz = c$ i $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$, co w naszej sytuacji prowadzi do rozwiązania układu równań i nierówności:

$$\begin{array}{rl}
-4 + z_5 - z_7 - z_8 - z_{10} = 0 & \quad -2 \leqslant z_5 \leqslant 2, \\
2 - z_5 - z_8 - z_9 - z_{11} = 0 & \quad -1 \leqslant z_7 \leqslant 1, \\
z_1 = z_4 = 2 & \quad -1 \leqslant z_8 \leqslant 1, \\
z_2 = z_3 = 0 & \quad -1 \leqslant z_9 \leqslant 1, \\
z_6 = 2 & \quad -1 \leqslant z_{10} \leqslant 1, \\
 & \quad -1 \leqslant z_{11} \leqslant 1,
\end{array}$$

z jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym, jeśli istnieje wektor $\psi^T = [\psi_1, \psi_2]$, taki że spełniony jest następujący układ warunków:

$$\begin{array}{rll}
\psi_1 - \psi_2 - z_5 = 0 & \text{gdy} & -2 < z_5 < 2, \\
\psi_1 - \psi_2 - z_5 \leqslant 0 & \text{gdy} & -2 = z_5, \\
\psi_1 - \psi_2 - z_5 \geqslant 0 & \text{gdy} & z_5 = 2, \\
-\psi_1 - z_7 = 0 & \text{gdy} & -1 < z_7 < 1, \\
-\psi_1 - z_7 \leqslant 0 & \text{gdy} & -1 = z_7, \\
-\psi_1 - z_7 \geqslant 0 & \text{gdy} & z_7 = 1, \\
-\psi_1 - \psi_2 - z_8 = 0 & \text{gdy} & -1 < z_8 < 1, \\
-\psi_1 - \psi_2 - z_8 \leqslant 0 & \text{gdy} & -1 = z_8, \\
-\psi_1 - \psi_2 - z_8 \geqslant 0 & \text{gdy} & z_8 = 1, \\
-\psi_2 - z_9 = 0 & \text{gdy} & -1 < z_9 < 1, \\
-\psi_2 - z_9 \leqslant 0 & \text{gdy} & -1 = z_9, \\
-\psi_2 - z_9 \geqslant 0 & \text{gdy} & z_9 = 1, \\
-\psi_1 - z_{10} = 0 & \text{gdy} & -1 < z_{10} < 1, \\
-\psi_1 - z_{10} \leqslant 0 & \text{gdy} & -1 = z_{10}, \\
-\psi_1 - z_{10} \geqslant 0 & \text{gdy} & z_{10} = 1, \\
-\psi_2 - z_{11} = 0 & \text{gdy} & -1 < z_{11} < 1, \\
-\psi_2 - z_{11} \leqslant 0 & \text{gdy} & -1 = z_{11}, \\
-\psi_2 - z_{11} \geqslant 0 & \text{gdy} & z_{11} = 1.
\end{array}$$

Dla tak zadanych warunków istnieje rozwiązanie optymalne w postaci

$$\begin{array}{lll} x(0,0)=2, & x(0,1)=0, & x(0,2)=0, \\ x(1,0)=2, & x(1,1)=1, & x(1,2)=2, \\ u(0,0)=-1, & u(0,1)=-1, & u(0,2)=1, \\ u(1,0)=-1, & u(1,1)=1 & \end{array}$$

dla wektora $\psi^T = [2,1]$.

Minimalna wartość wskaźnika jakości $I_{1,2} =< z, Hz >= 7$.

Uwaga 1. *Przedstawiona metoda może być stosowana również w przypadku modelu (1) i wskaźnika jakości (4) o współczynnikach zmiennych zależnych od i oraz j.*

Literatura

[1] B. Biły, *Sterowanie optymalne wielowymiarowymi układami dyskretnymi,* Praca doktorska, Uniwersytet Śląski 1990.

[2] M. D. Canon, C. D. Cullum, E. Polak, *Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne,* WNT, Warszawa 1975.

[3] T. Kaczorek, *Two-dimensional linear systems,* Springer Verlag, New York 1975.

[4] T. Kaczorek, *The linear-quadratic optimal regulator for singular* $2-D$ *systems with variable coefficients,* IEEE Trans. Automat. Contr. **34**, **5** (1989).

[5] J. Klamka, *Sterowalność układów dynamicznych,* PWN, Warszawa-Wrocław 1990.

Recenzent: Prof. dr hab. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do redakcji 18.01.1994 r.

Abstract

The main purpose of this note is to present a method for solving the linear-quadratic optimal regulator problem for discrete, linear general two-dimensional system with constant coefficients. The quadratic optimal regulator problem can be formulated: find a sequence of control vectors in fixed rectangle, which transfer the system to given final state vector and minimizes the quadratic performance index, with constraints of control and state vectors. This problem, by transformation for system and performance index is reduced to equivalent mathematical programming problem. Necessary and sufficient conditions are established for the existence of a solution to this problem. The simple numerical example illustrates the presented method. With slight modifications the considerations can be extended for 2-D systems with variable coefficient and n-D linear systems.