

Urszula STAŃCZYK

Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

MORFOLOGIA MATEMATYCZNA – POJĘCIA PODSTAWOWE

Streszczenie. Morfologia matematyczna stanowi część analizy obrazów, koncentrując się na kształcie i strukturze obiektów na obrazie. Niniejsza praca zawiera omówienie jej podstawowych operacji, takich jak dylatacja i erozja i ich własności, jak również wskazanie roli Dodatnich Funkcji Boolowskich w morfologii matematycznej.

MATHEMATICAL MORPHOLOGY – BASIC CONCEPTS

Summary. Mathematical morphology stands as a part of image analysis, focusing on the shape and structure of objects within an image. This paper contains a presentation of its basic operations such as dilation and erosion and their properties, as well as indicates a role of Positive Boolean Functions in mathematical morphology.

1. Wprowadzenie

Proces przetwarzania obrazów można podzielić na etap przetwarzania wstępnego, w ramach którego dokonuje się filtrowania szumów i upraszczania kształtu; etap segmentacji, progowania, po którym uzyskujemy obiekty wyróżnione z tła¹ i właściwą analizę obrazu. Celem tej analizy jest opisanie obrazu za pomocą pewnych parametrów lub wyrażenie go (przedstawienie) za pomocą syntetycznych modeli.

Do przetwarzania obrazu przed etapem analizy wykorzystuje się różne metody, które jednak mogą być zaklasyfikowane do dwóch podstawowych grup. Pierwsza opiera się na traktowaniu obrazu jako sygnału i stosuje jego przetwarzanie za pomocą operatorów

¹ Przyjmowane jest tutaj upraszczające założenie, że rozpatrywana jest klasa obrazów, w których możliwe jest wyróżnienie tła i znajdujących się na nim obiektów.

liniowych (takich jak transformata Fouriera, spłot), druga postrzega obiekty jako zbiory punktów i wykorzystuje operatory nieliniowe. Morfologia matematyczna przyjmuje właśnie to drugie podejście.

Podstawowymi operacjami morfologii matematycznej są dylatacja (*ang. dilation*) i erozja (*ang. erosion*). W dużym uproszczeniu można przyjąć, że dylatacja powoduje zwiększanie się obiektów w przestrzeni, podczas gdy erozja polega na ich zmniejszaniu. Te dwie podstawowe operacje mogą być wykorzystywane również do definiowania bardziej złożonych, takich jak przykładowo otwieranie (*ang. opening*) i zamykanie obrazów (*ang. closing*).

Ojcami morfologii matematycznej są George Matheron [10] i Jean Serra [11], a jej narodzin należy szukać we wczesnych latach sześćdziesiątych tego wieku, kiedy to Jean Serra prowadził prace poświęcone ocenie rezerw rudy w złożach żelaza i skonstruował urządzenie cyfrowe zwane „analizatorem tekstury” (*ang. texture analyser*). Prace te nadzorowane były przez George’a Matherona, a ich wyniki dały podstawę do dalszych prac teoretycznych, pozwalając na rozwinięcie całej dziedziny operacji morfologicznych, stosowanych w przetwarzaniu i rozpoznawaniu obrazów zarówno binarnych, jak i w poziomach szarości.

Z algebraicznego punktu widzenia morfologia matematyczna oparta została na teorii algebr Boole’a, więc swoje zastosowanie znalazły w niej również funkcje boolowskie, będące alternatywną metodą definiowania operatorów morfologicznych.

Niniejsza praca obejmuje omówienie podstawowych przekształceń binarnej morfologii matematycznej i ich własności oraz niektóre ich zastosowania w obróbce obrazów, wreszcie odniesienie do nich dodatnich funkcji boolowskich.

2. Podstawy morfologii matematycznej

Morfologia matematyczna jest metodą analizy struktury obiektów bazującą na pojęciach teorii zbiorów. Podstawowe jej założenie stwierdza, że rzeczywiste obrazy mogą być postrzegane jako zbiory punktów w przestrzeni o dowolnym wymiarze, przykładowo N -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej E^N . Grafika komputerowa używa cyfrowego odpowiednika przestrzeni Euklidesowej - zbiorów liczb całkowitych podających współrzędne punktu oraz jego „wartość” – dla obrazów binarnych jest to „0” lub „1”, dla obrazów z gradacją poziomów szarości jest to poziom szarości.

Dla obrazów binarnych zazwyczaj przyjmuje się założenie, że punkty należące do obiektu mają wartość „1”, podczas gdy piksele tła mają wartość „0”. Tło obrazu stanowi jednocześnie dopełnienie zbioru punktów tworzących obiekt. Każdy obraz ma tzw. punkt centralny (*ang. origin*) o współrzędnych (0,0). W zależności od przyjętej konwencji punkt ten może

znajdować się w górnym lub dolnym rogu obrazu, zazwyczaj po lewej stronie. W poniższych przykładach będzie on oznaczany za pomocą strzałek \blacktriangledown w lewym górnym rogu obrazu. Współrzędne każdego punktu traktowane są jako wiersz, kolumna i liczone od góry w dół oraz od lewej ku prawej stronie obrazu.

Podstawową zasadą morfologii matematycznej jest analizowanie obrazu za pomocą innego (zazwyczaj znacznie mniejszego) obrazu, zwanego elementem strukturalnym¹ (*ang. structuring element*), będącego swego rodzaju wzorcem, maską, której szukamy w oryginalnym obrazie, co pozwala na uzyskanie użytecznych informacji o kształcie różnych części obrazu i ich wzajemnych relacjach. Element strukturalny stanowi swego rodzaju geometryczny parametr przekształceń morfologii matematycznej. Ma swój własny, lokalny punkt centralny, względem którego określane są współrzędne punktów wchodzących w jego skład. Punkt ten może nie należeć do tego elementu, jednakże zawsze odpowiada on aktualnie rozpatrywanemu pikselowi obrazu przy przekształceniach.

Podstawowe operacje morfologiczne to dylatacja i erozja, zdefiniowane w następujących podpunktach pracy.

2.1. Dylatacja

Dylatacja jest przekształceniem morfologicznym, które składa dwa zbiory (z których jeden jest elementem strukturalnym) stosując dodawanie wektorowe elementów zbioru.

Jeżeli A i S są zbiorami w N -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej (E^N) z elementami a i s odpowiednio $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ i $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$, będącymi współrzędnymi punktów, wtedy dylatacja A poprzez S , gdzie S jest elementem strukturalnym, jest zbiorem wszystkich możliwych sum wektorowych par elementów, jednego pochodzącego z A i jednego pochodzącego z S .

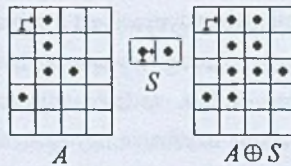
Definicja 2.1.1

Niech $A, S \subseteq E^N$. Dylatacja A poprzez S jest oznaczana przez $A \oplus S$ i definiowana jako $A \oplus S = \{c \in E^N \mid c = a + s \text{ dla } a \in A \text{ i } s \in S\}$.

¹ Angielska nazwa „*structuring element*” w tłumaczeniu na język polski nie daje wprost pojęcia „element strukturalny”, a raczej „element strukturyzujący” albo „strukturujący”. Takie tłumaczenie odzwierciedlałoby również wpływ tego elementu na obraz oryginalny. Jednakże w polskiej literaturze egzystuje już to pierwsze pojęcie, więc dla celów zgodności w pracy tej zastosowano właśnie taką nazwę.

Przykład 2.1.1

Operacja dylatacji zbioru $A = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$ poprzez element strukturalny $S = \{(0,0), (0,1)\}$ pokazana jest na rysunku rys. 1.

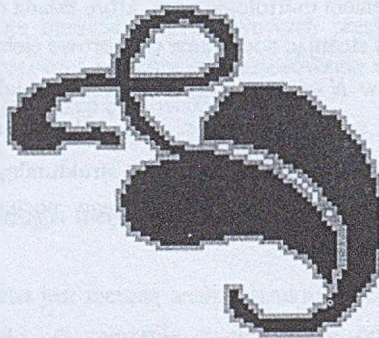


Rys. 1. Przykład dylatacji

Fig. 1. An example of dilation

Operacja ta jako działanie na zbiorach została zaproponowana przez Minkowskiego i dlatego nazywana jest „dodawaniem Minkowskiego” (lub „sumą Minkowskiego”).

Dylatacja z elementem strukturalnym o rozmiarze 3×3 jest izotropową (zachowującą się tak samo we wszystkich kierunkach) operacją na sąsiedztwie, zwaną często „wypełnianiem” (*ang. fill*) lub „rośnięciem” (*ang. grow*), której przykład pokazuje rys. 2. (piksele o kolorze szarym oznaczają punkty dodane w wyniku dylatacji).



Rys. 2. Dylatacja z izotropowym elementem strukturalnym

Fig. 2. Dilation with the isotropic structuring element

Z względu na charakter operacji dodawania, dokonywanej w przekształceniu dylatacji, role zbiorów A i S są symetryczne, co oznacza, że dylatacja posiada własność przemienności.

Twierdzenie 2.1.1

$$A \oplus S = S \oplus A \quad (1)$$

Dowód

$$A \oplus S = \{c \in E^N \mid c = a + s \text{ dla } a \in A \text{ i } s \in S\} = \{c \in E^N \mid c = s + a \text{ dla } a \in A \text{ i } s \in S\} = S \oplus A.$$

Dodawanie posiada oczywiście również własność łączności, która przechodząc na dylatację pozwala na realizowanie przekształcenia A poprzez D , gdzie D jest dylatacją B poprzez C , w następujący sposób: $A \oplus D = A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$.

Liczba operacji do przeprowadzenia przy dylatacji A poprzez D zależy od liczby punktów tworzących ten element. Ponieważ D jest wynikiem dylatacji B poprzez C , liczba ta może odpowiadać nawet iloczynowi liczb punktów tworzących B i C . Z kolei dylatacja najpierw poprzez B , a następnie poprzez C wymaga co najwyżej liczby operacji równej sumie punktów wchodzących w skład B i C . Taka forma może więc pozwolić na znaczącą oszczędność w liczbie operacji i wpłynąć na zmniejszenie złożoności obliczeniowej.

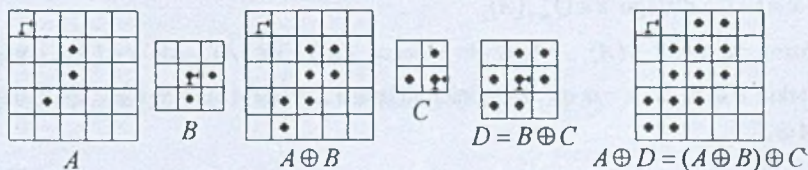
Twierdzenie 2.1.2

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \tag{2}$$

Dowód

$x \in A \oplus (B \oplus C)$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $a \in A, b \in B, c \in C$ takie, że $x = a + (b + c)$. $x \in (A \oplus B) \oplus C$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $a \in A, b \in B, c \in C$ takie, że $x = (a + b) + c$. Ale $a + (b + c) = (a + b) + c$, ponieważ operacja dodawania jest łączna. Dlatego też $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$.

Do tego twierdzenia często odwołujemy się jako do „zasady łańcucha” dylatacji. Ponieważ dylatacja jest przemienne, kolejność stosowania dylatacji składowych jest nieistotna. Przykład stosowania łańcucha dylatacji pokazuje rys. 3.



Rys. 3. Łańcuch dylatacji
Fig. 3. Chain of dilations

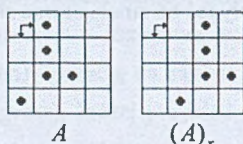
Przekształcenie obrazu poprzez łańcuch dylatacji nie zawsze jest możliwe, gdyż nie wszystkie elementy strukturalne mogą być rozłożone na kolejne dylatacje. Alternatywne podejście pociąga za sobą postrzeganie dylatacji jako przekształcenia przesunięcia.

Definicja 2.1.2

Niech $A \subseteq E^N$ i $x \in E^N$. Przesunięcie A o x jest oznaczane przez $(A)_x$ i definiowane jako $(A)_x = \{c \in E^N \mid c = a + x \text{ dla } a \in A\}$.

Przykład 2.1.2

Operacja przesunięcia danego zbioru $A = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$ o $x = (0,1)$ dająca $(A)_{(0,1)} = \{(0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ pokazana jest na rysunku rys.4.



Rys. 4. Przykład przesunięcia
Fig. 4. An example of translation

Dylatacja A poprzez S może być teraz określona jako suma wszystkich przesunięć A o elementy S .

Twierdzenie 2.1.3

$$A \oplus S = \bigcup_{s \in S} (A)_s \quad (3)$$

Dowód

Załóżmy, że $x \in A \oplus S$. Wtedy dla jakiegoś $a \in A$ i $s \in S$, $x = a + s$. Stąd możemy napisać $x \in (A)_s$ i dlatego $x \in \bigcup_{s \in S} (A)_s$.

Załóżmy, że $x \in \bigcup_{s \in S} (A)_s$. Wtedy dla jakiegoś $s \in S$, $x \in (A)_s$. Ale $x \in (A)_s$ oznacza, że istnieje takie $a \in A$, że $x = a + s$. Z definicji dylatacji zaś $a \in A$, $s \in S$ i $x = a + s$ implikują, że $x \in A \oplus S$.

Ważną własnością dylatacji jest również tzw. „niezmienniczość względem przesunięcia” (*ang. translation invariance*), którą określa poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.4

$$(A)_x \oplus S = (A \oplus S)_x \quad (4)$$

Dowód

$y \in (A)_x \oplus S$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla jakiegoś $z \in (A)_x$ i $s \in S$, $y = z + s$. Ale $z \in (A)_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = a + x$ dla $a \in A$. Stąd $y = (a + x) + s = a + (s + x)$. Z definicji dylatacji i przesunięcia $y \in (A \oplus S)_x$.

Przypominając możliwość „łańcuchowania” dylatacji, dochodzimy do poniższej zależności.

Zależność 2.1.1

$$A \oplus S_1 \oplus \dots \oplus (S_n)_x \oplus \dots \oplus S_N = (A \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_n \oplus \dots \oplus S_N)_x$$

Przesunięcie obrazu może być skompensowane w definicji elementu strukturalnego. W szczególności element strukturalny S może równoważyć przesunięcie obrazu A poprzez branie S przesuniętego w przeciwnym kierunku.

Twierdzenie 2.1.5

$$(A)_x \oplus (S)_{-x} = A \oplus S \quad (5)$$

Dowód

$$(A)_x \oplus (S)_{-x} = (A \oplus (S)_{-x})_x = (A \oplus S)_{x-x} = A \oplus S$$

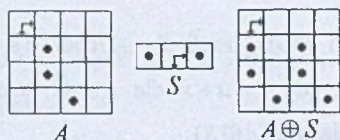
Podobnie równoważące przesunięcia wewnątrz sekwencji dylatacji z dekomponowanymi elementami strukturalnymi mogą wyrównać przesunięcie obrazu i spowodować wynik bez przesunięcia.

Zależność 2.1.2

$$(A)_x \oplus S_1 \oplus \dots \oplus (S_n)_{-x} \oplus \dots \oplus S_N = A \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_n \oplus \dots \oplus S_N$$

Jeżeli punkt centralny należy do elementu strukturalnego, dylatacja staje się przekształceniem ekstensywnym (*ang. extensive*), co oznacza, że wynik przeprowadzonej operacji zawiera oryginalny obraz.

Jeżeli punkt centralny nie należy do elementu strukturalnego, to może się zdarzyć, że część wspólna wyniku dylatacji z obrazem oryginalnym jest zbiorem pustym, czego przykład pokazują rys. 5.



Rys. 5. Dylatacja z elementem strukturalnym, do którego nie należy jego punkt centralny
Fig. 5. Dilation with the structuring element, which does not contain its origin

Twierdzenie 2.1.6

Jeżeli $(0,0) \in S$, to $A \in A \oplus S$. (6)

Dowód

Załóżmy, że $x \in A \oplus S$. Wtedy dla pewnego $a \in A$ i $s \in S$, $x = a + s$. Skoro $(0,0) \in S$, to w szczególności $s = 0$ i $x = a + s = a + 0 = a$, co oznacza, że $x \in A$.

Zależność 2.1.3 do twierdzenia 2.1.6 stwierdza, że jeżeli punkt centralny należy do każdego elementu strukturalnego w dekompozycji dylatacji, to każdy składowy element strukturalny musi być zawarty w oryginalnym elemencie strukturalnym.

Zależność 2.1.3

Jeżeli $(0,0) \in S_1, \dots, S_N$, to $S_m \in S_1 \oplus \dots \oplus S_N$, gdzie $m = 1, \dots, N$.

Przekształcenie dylatacji jest monotoniczne, co oznacza, że zachowuje ono zależności wzajemne typu zawierania się.

Twierdzenie 2.1.7

Jeżeli $A \subseteq B$, to $A \oplus S \subseteq B \oplus S$ oraz $S \oplus A \subseteq S \oplus B$. (7)

Dowód

Załóżmy, że $A \subseteq B$. Niech $x \in A \oplus S$. Wtedy dla pewnego $a \in A$ i $s \in S$, $x = a + s$. Ponieważ $a \in A$ i $A \subseteq B$, to $a \in B$. Ale $a \in B$ i $s \in S$ implikuje, że $x \in B \oplus S$. Z kolei $S \oplus A \subseteq S \oplus B$ wynika wprost oczywiście z własności przemienności dylatacji.

W przypadku operacji części wspólnej obrazu i przekształcenia dylatacji ich kolejność nie może zostać zamieniona. Jednakże wynik uzyskania części wspólnej obrazów z następującą po niej dylatacją zawarty jest w części wspólnej dylatacji tych obrazów.

Twierdzenie 2.1.8

$$\begin{aligned} (A \cap B) \oplus C &\subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C) \\ A \oplus (B \cap C) &\subseteq (A \oplus B) \cap (A \oplus C) \end{aligned} \quad (8)$$

Dowód

Załómy, że $x \in (A \cap B) \oplus C$. Wtedy dla pewnego $y \in A \cap B$ i $c \in C$, $x = y + c$. Teraz $y \in A \cap B$ implikuje, że $y \in A$ i $y \in B$. Ale $y \in A$, $c \in C$ i $x = y + c$ oznacza, że $x \in A \oplus C$; $y \in B$, $c \in C$ i $x = y + c$ oznacza zaś, że $x \in B \oplus C$. Stąd $x \in (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$.

$A \oplus (B \cap C) \subseteq (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$ pochodzi natomiast wprost z poprzedniego wyniku, ponieważ dylatacja jest przemienna.

Z drugiej strony, kolejność sumy obrazów i dylatacji może być zamieniona. Dylatacja sumy obrazów jest równa sumie ich dylatacji.

Twierdzenie 2.1.9

$$(A \cup B) \oplus S = (A \oplus S) \cup (B \oplus S) \quad (9)$$

Dowód

$$(A \cup B) \oplus S = \bigcup_{x \in A \cup B} (S)_x = [\bigcup_{x \in A} (S)_x] \cup [\bigcup_{x \in B} (S)_x] = (A \oplus S) \cup (B \oplus S)$$

Przemienność dylatacji daje również natychmiast następującą zależność.

Zależność 2.1.4

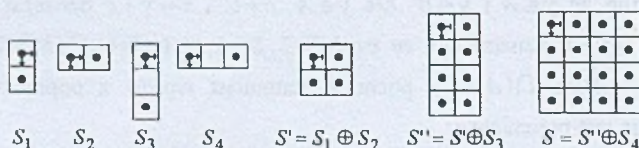
$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Zależność ta pozwala na dalszą dekompozycję elementu strukturalnego na sumę elementów strukturalnych.

Tak jak dekompozycja elementu strukturalnego na dylatację elementarnych elementów strukturalnych prowadzi do zasady „łańcuchowania” dylatacji, tak dekompozycja elementu strukturalnego na sumę elementarnych elementów strukturalnych pozwala na inną ocenę dylatacji.

Różnica pomiędzy dekompozycją elementu strukturalnego poprzez dylatację i poprzez sumę odzwierciedla się w efektywności liczenia dylatacji. Weźmy pod rozwagę element strukturalny S przedstawiony na rysunku 6, składający się z 16 punktów tworzących kwadrat. Element ten może zostać rozłożony na sumę 16 elementów strukturalnych, z których każdy będzie się składał z pojedynczego punktu. Dylatacja poprzez element strukturalny takiego typu jest po prostu przesunięciem obrazu oryginalnego, stąd twierdzenie 2.1.9 staje się odpowiednikiem wyrażenia z twierdzenia 2.1.3, wymagając 15 przesunięć i 15 sum.

Dla kontrastu, dekompozycja elementu strukturalnego S na cztery podstawowe elementy strukturalne pokazane również na rys. 6. pozwala na dylatację na zasadzie łańcucha z twierdzenia 2.1.2. W tym przypadku wymagane są tylko 4 przesunięcia i 4 sumy.



Rys. 6. Element strukturalny i jego dekompozycja
Fig. 6. Structuring element and its decomposition

Pod względem obliczeniowym różnica oznacza przesunięcie i sumę poprzednio wyliczonego wyniku w przypadku stosowania zasady łańcucha twierdzenia 2.1.2, podczas gdy dekompozycja poprzez sumę jak w twierdzeniu 2.1.9 zlicza poszczególne przesunięcia oryginalnego obrazu niezależnie.

2.2. Erozja

Erozja jest morfologicznym przekształceniem dualnym do dylatacji. Jest to operacja, która składa dwa zbiory (z których jeden jest elementem strukturalnym), stosując odejmowanie wektorowe elementów zbioru.

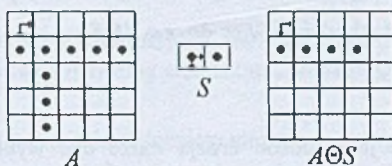
Jeżeli A i S są zbiorami w N -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej (E^N) z elementami a i s odpowiednio $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ i $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$, będącymi współrzędnymi punktów, to erozja A poprzez S , gdzie S jest elementem strukturalnym, jest zbiorem wszystkich takich elementów x , dla których $x + s \in A$ dla każdego $s \in S$. Erozja bywa też nazywana „kurczeniem” (ang. *shrink*) lub redukowaniem (ang. *reduce*).

Definicja 2.2.1

Niech $A, S \subseteq E^N$. Erozja A poprzez S jest oznaczana przez $A \ominus S$ i definiowana jako $A \ominus S = \{x \in E^N \mid x + s \in A \text{ dla każdego } s \in S\}$.

Przykład 2.2.1

Operacja erozji zbioru $A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (4,1)\}$ poprzez element strukturalny $S = \{(0,0), (0,1)\}$, $A \ominus S = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$ pokazana jest na rysunku 7.



Rys. 7. Przykład operacji erozji
Fig. 7. An example of erosion

Wyrażona jako różnica zbiorów definicja erozji wygląda następująco:

$$A \ominus S = \{x \in E^N \mid \text{dla każdego } s \in S \text{ istnieje takie } a \in A, \text{ że } x = a - s\}.$$

Przekształcenie erozji może być również wyrażone w innej formie. Erozja obrazu A poprzez element strukturalny S jest zbiorem wszystkich elementów $x \in E^N$, dla których S przesunięte o x jest zawarte w A . Dowód tego stwierdzenia pochodzi wprost z definicji erozji i definicji przesunięcia.

Lemat 2.2.1

$$A \ominus S = \{x \in E^N \mid (S)_x \subseteq A\}$$

Przy takiej definicji element strukturalny S może być traktowany jak sonda, która przesuwa się poprzez obraz A . Tam, gdzie S przesunięte o x może być zawarte w A poprzez umieszczenie punktu centralnego S w x , tam x należy do erozji $A \ominus S$.

W literaturze (przykładowo [11]) symbol \ominus stosowany jest czasami do oznaczania tzw. odejmowania Minkowskiego, będącego operacją na zbiorach dualną do wspomnianego już dodawania Minkowskiego, która daje część wspólną wszystkich przesunięć A o elementy $s \in S$. O ile przekształcenie dyatacji i dodawanie Minkowskiego są identyczne, to operacja erozji i odejmowanie Minkowskiego różnią się w znaczący sposób. Erozja obrazu A poprzez element strukturalny S jest częścią wspólną wszystkich przesunięć A o elementy $-s$, gdzie $s \in S$.

Twierdzenie 2.2.1

$$A \ominus S = \bigcap_{s \in S} (A)_{-s} \quad (10)$$

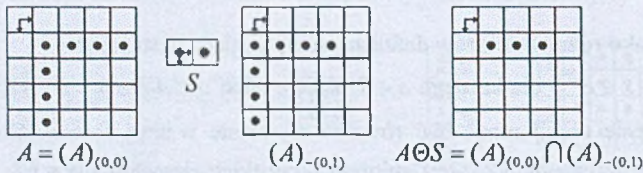
Dowód

Niech $x \in A \odot S$. Wtedy dla każdego $s \in S$, $x + s \in A$. Ale $x + s \in A$ oznacza, że $x \in (A)_{-s}$. Stąd dla każdego $s \in S$, $x \in (A)_{-s}$, co implikuje, że $x \in \bigcap_{s \in S} (A)_{-s}$.

Niech $x \in \bigcap_{s \in S} (A)_{-s}$. Wtedy dla każdego $s \in S$, $x \in (A)_{-s}$. Stąd dla każdego $s \in S$, $x + s \in A$. Z definicji erozji dochodzimy więc do $x \in A \odot S$.

Przykład 2.2.2

Rysunek 8 ilustruje, w jaki sposób erozja może być wyliczona jako część wspólna przesunięć obrazu A .



Rys. 8. Erozja wyliczana jako część wspólna przesunięć obrazu
Fig. 8. Erosion computed as an intersection of translates of an image

Przekształcenie erozji jest popularnie odbierane jako zmniejszanie oryginalnego obrazu. W terminologii zbiorów o zbiorze, na którym dokonano erozji, często myśli się jako o zawartym w oryginalnym obrazie. Przekształcenia takiego typu nazywa się anty-ekstensywnymi (*ang. anti-extensive*). Jednakże operacja erozji jest antyekstensywna, o ile punkt centralny należy do elementu strukturalnego.

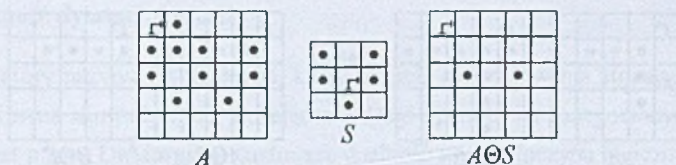
Twierdzenie 2.2.2

Jeżeli $(0,0) \in S$, to $A \odot S \subseteq A$. (11)

Dowód

Żałujemy, że $x \in A \odot S$. Wtedy $x + s \in A$ dla każdego $s \in S$. Ponieważ $(0,0) \in S$, $x + 0 \in A$. Stąd $x \in A$.

Jeżeli punkt centralny nie należy do elementu strukturalnego, to może się zdarzyć, że część wspólna wyniku erozji z obrazem oryginalnym jest zbiorem pustym, co pokazuje rys. 9.



Rys. 9. Erozyja z elementem strukturalnym nie zawierającym punktu centralnego
 Fig. 9. Erosion with the structuring element not containing its origin

Tak jak dylatacja, erozyja jest przekształceniem niezmienniczym względem przesunięcia.

Twierdzenie 2.2.3

$$(A)_x \ominus S = (A \ominus S)_x \quad (12)$$

$$A \ominus (S)_x = (A \ominus S)_{-x}$$

Dowód

$y \in (A)_x \ominus S$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdego $s \in S$, $y + s \in (A)_x$. Ale $y + s \in (A)_x$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $y + s - x \in A$. Teraz $y + s - x = (y - x) + s$. Stąd dla każdego $s \in S$, $(y - x) + s \in A$. Z definicji erozyji $y - x \in A \ominus S$ i dlatego $y \in (A \ominus S)_x$.

$y \in A \ominus (S)_x$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $y + s \in A$ dla każdego $s \in (S)_x$. Ale $y + s \in A$ dla każdego $s \in (S)_x$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $y - x \in A \ominus S$. Wreszcie $y - x \in A \ominus S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \in (A \ominus S)_{-x}$.

Jeżeli obraz A zawarty jest w obrazie B , to erozyja A zawarta jest w erozyji B poprzez ten sam element strukturalny.

Twierdzenie 2.2.4

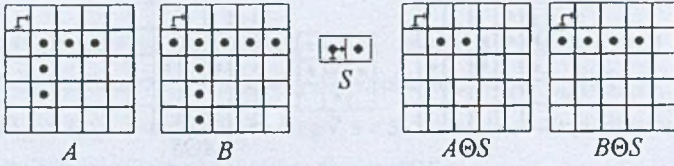
$$\text{Jeżeli } A \subseteq B, \text{ to } A \ominus S \subseteq B \ominus S. \quad (13)$$

Dowód

Niech $x \in A \ominus S$. Wtedy $x + s \in A$ dla każdego $s \in S$. Ale $A \subseteq B$, więc $x + s \in B$ dla każdego $s \in S$. Z definicji erozyji $x \in B \ominus S$.

Przykład 2.2.3

Rysunek 10 ilustruje własność monotoniczności erozyji.



Rys. 10. Własność monotoniczności erozji
Fig. 10. Increasing property of erosion

Jeżeli A i B są elementami strukturalnymi i B jest zawarty w A , to erozja obrazu D poprzez A będzie silniejsza niż erozja poprzez B , tzn. obraz D poddawany erozji poprzez A będzie zawarty w wyniku erozji D poprzez B .

Twierdzenie 2.2.5

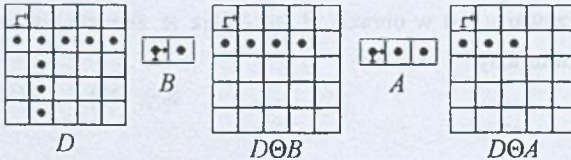
Jeżeli $A \supseteq B$, to $D \ominus A \subseteq D \ominus B$ (14)

Dowód

Niech $x \in D \ominus A$. Wtedy $x + a \in D$ dla każdego $a \in A$. Ale $A \supseteq B$, więc $x + a \in D$ dla każdego $a \in B$. Z definicji erozji $x \in D \ominus B$.

Przykład 2.2.4

Rysunek 11. pokazuje, że większe elementy strukturalne dokonują silniejszej erozji niż mniejsze.



Rys. 11. Erozja z elementami strukturalnymi o różnym rozmiarze
Fig. 11. Erosion with the different size structuring elements

Twierdzenie 2.2.5 prowadzi do naturalnego uporządkowania erozji poprzez elementy strukturalne, mające taki sam kształt, ale różne rozmiary.

Jak już wspomniano wcześniej, operacje dyatacji i erozji są do siebie podobne w sposób, który może być sformalizowany jako związek dualności, opisany w następnym punkcie tej pracy.

2.3. Dualność dylatacji i erozji

Dwa operatory nazywa się dualnymi, kiedy negacja sformułowania stosującego pierwszy operator jest równa sformułowaniu stosującemu drugi operator na zanegowanych zmiennych. Przykładem jest prawo DeMorgana, ilustrujące dualność sumy i iloczynu logicznego:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Użytą tutaj negacją zbioru A jest jego dopełnienie

$$(A)^c = \{x \in E^N \mid x \notin A\}.$$

W morfologii negacja zbioru traktowana jest również w sensie geometrycznym jako odwrócenie orientacji zbioru względem jego osi współrzędnych. Takie odwrócenie nazywane jest odbiciem (*ang. reflection*).

Definicja 2.3.1

Niech $S \subseteq E^N$. Odbicie S jest oznaczane przez \bar{S} i definiowane jako

$$\bar{S} = \{x \mid \text{dla } s \in S, x = -s\}.$$

Odbicie zbioru odbywa się względem jego punktu centralnego. Matheron [10] odwołuje się do \bar{S} jako do „zbioru symetrycznego do S względem punktu centralnego”, Serra [11] odnosi się do \bar{S} jako do „transponowanego S ”.

Jak podano w następnym twierdzeniu, dualność dylatacji i erozji stosuje negację zarówno logiczną, jak i geometryczną, z powodu różnych ról obrazu i elementu strukturalnego w wyrażeniu używającym tych operatorów morfologicznych.

Twierdzenie 2.3.1

$$(A \ominus S)^c = A^c \oplus \bar{S} \quad (15)$$

Dowód

$x \in (A \ominus S)^c$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \notin A \ominus S$. $x \notin A \ominus S$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje takie $s \in S$, że $x + s \notin A$. Istnieje takie $s \in S$, że $x + s \in A^c$ wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje takie $s \in S$, że $x \in (A^c)_{-s}$. Istnieje takie $s \in S$, że $x \in (A^c)_{-s}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \bigcup_{s \in S} (A^c)_{-s}$. Teraz $x \in \bigcup_{s \in S} (A^c)_{-s}$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \in \bigcup_{s \in \bar{S}} (A^c)_s$ i $x \in \bigcup_{s \in \bar{S}} (A^c)_s$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \in A^c \oplus \bar{S}$.

Różnice pomiędzy przekształceniami erozji i dylatacji w najbardziej widoczny sposób wyrażone są we właściwościach algebraicznych.

Erozja części wspólnej obrazów jest równa części wspólnej ich erozji, co kontrastuje z twierdzeniem 2.1.8 dla dylatacji, gdzie związek jest typu zawierania się.

Twierdzenie 2.3.2

$$(A \cap B) \ominus S = (A \ominus S) \cap (B \ominus S) \quad (16)$$

Dowód

$x \in (A \cap B) \ominus S$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdego $s \in S$, $x + s \in A \cap B$. Z kolei $x + s \in A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x + s \in A$ i $x + s \in B$. $x + s \in A$ dla każdego $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A \ominus S$. $x + s \in B$ dla każdego $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B \ominus S$. $x + s \in A$ i $x + s \in B$ dla każdego $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \in (A \ominus S) \cap (B \ominus S)$.

Z drugiej strony, podczas gdy dylatacja sumy obrazów jest równa sumie ich dylatacji w twierdzeniu 2.1.9, to dla erozji związek jest typu zawierania się.

Twierdzenie 2.3.3

$$(A \cup B) \ominus S \supseteq (A \ominus S) \cup (B \ominus S) \quad (17)$$

Dowód

Niech $x \in (A \ominus S) \cup (B \ominus S)$. Wtedy $x \in A \ominus S$ lub $x \in B \ominus S$. Jeżeli $x \in A \ominus S$, to ponieważ $A \cup B \supseteq A$, $x \in (A \cup B) \ominus S$. Jeżeli $x \in B \ominus S$, to ponieważ $A \cup B \supseteq B$, $x \in (A \cup B) \ominus S$.

Przekształcenie erozji nie jest przemienne, tzn. $A \ominus S \neq S \ominus A$, co prowadzi do następnego twierdzenia.

Twierdzenie 2.3.4

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \quad (18)$$

Dowód

$x \in A \ominus (B \cup C)$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x + y \in A$ dla każdego $y \in B \cup C$. $x + y \in A$ dla każdego $y \in B \cup C$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x + y \in A$ dla każdego $y \in B$ i $x + y \in A$ dla każdego $y \in C$. $x + y \in A$ dla każdego $y \in B$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \in A \ominus B$. $x + y \in A$ dla każdego $y \in C$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x \in A \ominus C$. Jeżeli $x \in A \ominus B$ i $x \in A \ominus C$, to $x \in (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$.

Twierdzenie 2.3.4 wskazuje, jak przeprowadzać erozję z elementami strukturalnymi, które mogą zostać rozłożone na sumę elementarnych elementów strukturalnych.

Chociaż elementy strukturalne mogą zostać rozłożone na sumę prostszych elementów dla uproszczenia erozji, to dla ich części wspólnej podobnej operacji przeprowadzić się nie da, jeśli ma być zachowana równość. Zamiast tego otrzymuje się związek typu zawierania się.

Twierdzenie 2.3.5

$$A \ominus (B \cap C) \supseteq (A \ominus B) \cup (A \ominus C) \quad (19)$$

Dowód

Niech $x \in (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$. Wtedy $x \in A \ominus B$ lub $x \in A \ominus C$. Jeżeli $x \in A \ominus B$, to $x + b \in A$ dla każdego $b \in B$. Jeżeli $x \in A \ominus C$, to $x + b \in A$ dla każdego $b \in C$. Stąd $x + b \in A$ dla każdego $b \in B \cap C$, co z definicji erozji daje $x \in A \ominus (B \cap C)$.

Jeżeli element strukturalny może być dekomponowany jako dylatacja prostszych elementów, to dla erozji zachowana jest zasada łańcucha, pozwalająca na zmniejszenie złożoności obliczeniowej.

Twierdzenie 2.3.6

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C) \quad (20)$$

Dowód

Niech $x \in (A \ominus B) \ominus C$. Wtedy dla każdego $c \in C$, $x + c \in A \ominus B$. Ale $x + c \in A \ominus B$ implikuje, że $x + c + b \in A$ dla każdego $b \in B$. Z kolei $x + c + b \in A$ dla każdego $b \in B$ i $c \in C$ oznacza, że $x + d \in A$ dla każdego $d \in B \oplus C$.

Niech $x \in A \ominus (B \oplus C)$. Wtedy $x + d \in A$ dla każdego $d \in B \oplus C$. Stąd $x + b + c \in A$ dla każdego $b \in B$ i $c \in C$. Teraz $(x + c) + b \in A$ dla każdego $b \in B$ oznacza, że $x + c \in A \ominus B$. Z kolei $x + c \in A \ominus B$ dla każdego $c \in C$ implikuje $x \in (A \ominus B) \ominus C$.

Poniższa zależność rozszerza ten wynik na elementy strukturalne dekomponowane jako dylatacja k elementów strukturalnych.

Zależność 2.3.1

$$A \ominus (S_1 \oplus \dots \oplus S_k) = (\dots (A \ominus S_1) \ominus \dots \ominus S_k)$$

Ponieważ dylatacja jest przemienna, oczywiste jest, że kolejność, w jakiej stosowane są następujące po sobie erozje, jest nieistotna.

Jeżeli w twierdzeniu 2.3.6 zamienimy miejscami dylatację i erozję, to uzyskany związek będzie równością, lecz typu zawierania się. Oznacza to, że jeżeli przeprowadzana jest dylatacja i erozja, to przeprowadzenie najpierw erozji prowadzi do silniejszych zmian w obrazie niż przy dylatacji jako pierwszej operacji.

Twierdzenie 2.3.7

$$A \oplus (B \ominus C) \subseteq (A \oplus B) \ominus C \quad (21)$$

Dowód

Niech $x \in A \oplus (B \ominus C)$. Wtedy dla $a \in A$ i $y \in B \ominus C$, $x = a + y$. Ale $y \in B \ominus C$ oznacza, że $y + c \in B$ dla każdego $c \in C$. Z kolei $y + c \in B$ i $a \in A$ implikuje, że $y + c + a \in A \oplus B$. Wreszcie $y + c + a \in A \oplus B$ dla każdego $c \in C$ implikuje, że $x = y + a \in (A \oplus B) \ominus C$.

Chociaż operacje dylatacji i erozji są dualne, nie oznacza to, że w dowolny sposób można dokonywać ich usuwania z równań morfologicznych. Jeżeli, przykładowo, $A = B \ominus C$, to dylatacja obu stron poprzez wyrażenie C daje wynik w postaci $A \oplus C = B \ominus C \oplus C \neq B$. Jednakże zachowany jest związek typu zawierania się.

Twierdzenie 2.3.8

$$A \subseteq B \ominus C \text{ wtedy i tylko wtedy, jeżeli } B \supseteq A \oplus C. \quad (22)$$

Dowód

Załóżmy $A \subseteq B \ominus C$. Ale $a \in A$ i $A \subseteq B \ominus C$ implikuje, że $a \in B \ominus C$. Stąd dla każdego $c' \in B$, $a + c' \in B$. W szczególności $c \in C$. Wtedy $a + c \in B$. Ale $x = a + c$, więc $x \in B$.

Załóżmy $B \supseteq A \oplus C$. Niech $x \in A$ i $c \in C$. Wtedy $x + c \in A \oplus C$. Ale $B \supseteq A \oplus C$, więc $x + c \in B$. Wreszcie $x + c \in B$ dla każdego $c \in C$ implikuje $x \in B \ominus C$.

To zawieranie się jest zachowane również przy łańcuchu erozji.

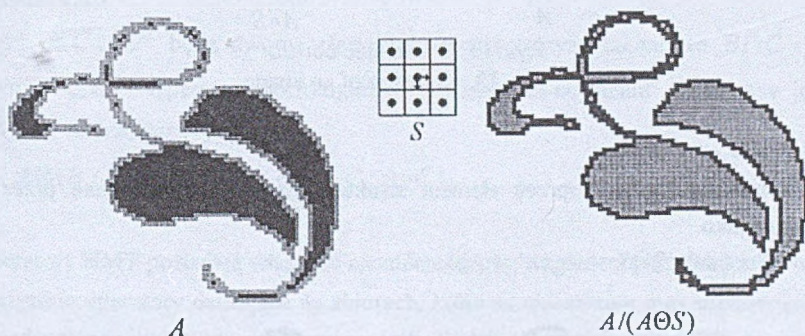
Zależność 2.3.2

$$A \subseteq (\dots (B \ominus S_1) \ominus \dots) \ominus S_N \Leftrightarrow \text{jeżeli } B \supseteq (\dots (A \oplus S_1) \oplus \dots) \oplus S_N$$

2.4. Inne przekształcenia morfologiczne i ich własności

Pojedyncze operacje dylatacji czy erozji rzadko stosowane są w praktyce, chociaż mają one swoje zastosowanie w przetwarzaniu obrazów.

Dylatacja z izotropowym elementem strukturalnym, operującym na bezpośrednim sąsiedztwie (pod uwagę brane jest 8-sąsiedztwo, patrz rysunek 12) bieżącego punktu daje efekt zwiększenia się obiektu o szerokość 1 piksela. W wyniku zastosowania erozji z takim elementem strukturalnym następuje zmniejszenie się obiektu o szerokość jednego piksela¹. Takie przekształcenie można zastosować w celu uzyskania konturu obiektu poprzez odjęcie od obrazu oryginalnego wyniku jego erozji. Rysunek 12 przedstawia przykład takiej operacji. Na obrazie oryginalnym kolorem szarym zaznaczono piksele ulegające erozji. Obraz wynikowy to różnica obrazu i jego erozji, gdzie piksele o kolorze szarym to wynik erozji.



Rys. 12. Zastosowanie erozji do uzyskania konturów obiektów
Fig. 12. Using erosion for getting contours of objects

Operacja erozji jest również pomocna przy określaniu takiej własności obiektów na obrazie (a przez to i całego obrazu), jak stopień połączenia (patrz [12]).

Zazwyczaj przekształcenia erozji i dylatacji traktowane są jako podstawowe, za pomocą których (oraz specjalnie zdefiniowanych elementów strukturalnych) tworzy się bardziej złożone operatory morfologiczne.

2.4.1. Morfologiczne otwieranie i zamykanie

Do bardziej złożonych operacji morfologicznych należą dualne względem siebie otwieranie i zamykanie.

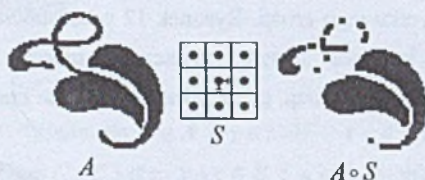
¹ Ponieważ zmniejszanie się występuje we wszystkich kierunkach, jego wynikiem może być w niektórych przypadkach całkowite zniknięcie niektórych części obiektu lub jego podział na kilka nie połączonych z sobą obiektów.

Otwieranie obrazu jest erozją, po której następuje dylatacja poprzez taki sam element strukturalny. Zamykanie obrazu jest dylatacją, po której następuje erozja z takim samym elementem strukturalnym.

Definicja 2.4.1

Otwieranie obrazu A poprzez element strukturalny S jest oznaczane przez $A \circ S$ i definiowane jako

$$A \circ S = (A \ominus S) \oplus S.$$



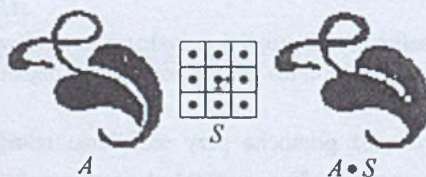
Rys. 13. Otwieranie obrazu

Fig. 13. Opening of an image

Definicja 2.4.2

Zamykanie obrazu A poprzez element strukturalny S jest oznaczane przez $A \bullet S$ i definiowane jako

$$A \bullet S = (A \oplus S) \ominus S.$$



Rys. 14. Zamykanie obrazu

Fig. 14. Closing of an image

Do ważnych własności otwierania i zamykania (które nie będą dowodzone w tej pracy - zainteresowani mogą znaleźć je przykładowo w [1]) należą ich monotoniczność oraz niezmienniczość względem przesunięcia, wynikające wprost z tych własności dylatacji i erozji.

W przeciwieństwie do dylatacji i erozji otwieranie i zamykanie są niezmiennicze także względem przesunięcia elementu strukturalnego.

Operacja otwierania jest antyekstensywna, a operacja zamykania ekstensywna niezależnie od tego, czy punkt centralny należy do elementu strukturalnego czy też nie.

Przekształcenia te są idempotentne, co oznacza, że ich ponowne zastosowanie do poprzednio uzyskanego wyniku operacji nie powoduje żadnych dalszych zmian. Ta

właściwość otwierania i zamykania jest istotna z punktu widzenia filtrowania obrazów, co będzie omówione w jednym z kolejnych punktów tej pracy.

2.4.2. Operatory typu „trafienie-lub-chybiecie”

Inne spojrzenie na operacje morfologiczne daje operator typu „trafienie-lub-chybiecie”, w skrócie HMT od angielskiego *Hit-or-Miss Transformation*.

Jeżeli stwierdzamy, że element strukturalny S próbkuje obraz A w każdym punkcie x , to przez termin „próbkowanie” rozumiemy sprawdzanie, czy zbiór S_x trafia w obraz A (tzn. $S_x \cap A \neq \emptyset$), chybia w obraz A (tzn. $S_x \cap A = \emptyset$) lub leży całkowicie wewnątrz obrazu A (tzn. $S_x \subseteq A$). Oczywiście S_x oznacza tutaj przesunięcie S o wektor x : $S_x = \{s+x | s \in S\}$. Operator „trafienie-lub-chybiecie” jest odwzorowaniem opierającym się na tej zasadzie.

Definicja 2.4.2.1

Niech $B, C \subseteq E^N$ będą dwoma elementami strukturalnymi takimi, że $B \cap C = \emptyset$, a A obrazem, $A \subseteq E^N$. Operator morfologiczny „trafienie-lub-chybiecie” oznaczany jest przez $A \otimes (B, C)$ i definiowany¹ jako

$$A \otimes (B, C) = \{x \in E^N \mid B_x \subseteq A \text{ i } C_x \subseteq A^c\}.$$

Operatory HMT posiadają własność niezmienniczości względem przesunięcia.

Wszystkie operatory działające na zbiorach, które są niezmiennie przy przesunięciu, mogą być przedstawione jako suma operatorów „trafienie-lub-chybiecie” (patrz [2]), co oznacza, że również omówione w poprzednich punktach przekształcenia dylatacji, erozji, otwierania i zamykania są takimi operatorami.

3. Funkcje boolowskie w morfologii matematycznej

Jak już wcześniej stwierdzono, morfologia matematyczna bazuje na pojęciach teorii zbiorów i przekształceniach algebraicznych wykorzystujących algebry Boole’a. Z tego powodu swoje zastosowanie znalazły tutaj również funkcje boolowskie.

Jeżeli przykładowo chcemy przeprowadzić operację dylatacji z elementem strukturalnym S w kształcie kwadratu o rozmiarze 3×3 , to dla każdego aktualnie rozpatrywanego piksela x musimy przeprowadzić sprawdzanie wartości w punkcie x oraz jego ośmiu sąsiadów. Jeżeli

¹ Warto tutaj zauważyć, że Jean Serra stosuje z kolei operacje dylatacji i erozji do zdefiniowania przekształcenia typu „trafienie-lub-chybiecie” (patrz [2]).

punkty te potraktujemy jako zmienne, odpowiednio jak pokazano na rys. 15, to dylatacja polegać będzie na określeniu wartości funkcji $f_b = x + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$, gdzie „+” oznacza sumę logiczną (OR) dla bieżącego x i jeżeli funkcja ta jest równa jeden, to punkt x należy do zbioru będącego wynikiem dylatacji.

x_3	x_2	x_1
x_4	x	x_0
x_5	x_6	x_7

Rys. 15. Punkt i jego otoczenie jako zmienne

Fig. 15. A point and its neighbourhood as variables

Taka operacja może być uogólniona dla dowolnej funkcji boolowskiej. Załóżmy, że S jest elementem strukturalnym, zawierającym n punktów s_1, s_2, \dots, s_n i f_b jest funkcją boolowską o n zmiennych. Przy takich założeniach zdefiniujemy operator morfologiczny ϕ_b działający na obrazie A .

Definicja 3.1

Niech $S \subseteq E^N$ będzie elementem strukturalnym, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$; A obrazem, $A \subseteq E^N$ i f_b funkcją boolowską o n zmiennych. Operator morfologiczny ϕ_b jest definiowany jako

$$\phi_b(A) = \{x \in E^N \mid \phi_b(A(x+s_1), A(x+s_2), \dots, A(x+s_n)) = 1\}. \quad (23)$$

Zauważmy, że ϕ_b zależy również od definicji elementu strukturalnego S .

O operatorze, który posiada własność niezmienniczości względem przesunięcia, mówi się, że jest operatorem o skończonym oknie (ang. *finite window operator*), jeżeli istnieje skończony zbiór $S \subseteq E^N$, taki że

$$x \in \phi(A) \Leftrightarrow x \in \phi(A \cap S'_x)$$

dla każdego $x \in E^N$, $A \subseteq E^N$ i $S \subseteq S'$.

Każdy operator o skończonym oknie da się przedstawić za pomocą definicji (23) (patrz [13]).

Weźmy przykładowy operator HMT $A \rightarrow A \otimes (B, C)$, gdzie $B \cap C = \emptyset$. Operator ten może być przedstawiony za pomocą funkcji boolowskiej, jak następuje.

Niech $B = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ i $C = \{d_{m+1}, d_{m+2}, \dots, d_n\}$. Zdefiniujmy $D = B \cup C$ oraz

$$f_b(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m \cdot \overline{a_{m+1}} \cdot \overline{a_{m+2}} \cdot \dots \cdot \overline{a_n},$$

gdzie $x \cdot y$ oznacza „x AND y” (operacja iloczynu logicznego), \overline{x} oznacza „NOT x” (operacja negacji logicznej). Stosując podaną wcześniej definicję operatora morfologicznego (23) widzimy, że $x \in \phi_b(A)$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $d_1 + x, d_2 + x, \dots, d_m + x \in A$ i $d_{m+1} + x, d_{m+2} + x, \dots, d_n + x \notin A$, tzn. $B_x \subseteq A$ i $C_x \subseteq A^c$. Stąd $\phi_b(A) = A \otimes (B, C)$.

Jak pokazano wcześniej, dyatacja może być przedstawiona za pomocą funkcji boolowskiej f_b w postaci $f_b(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Dla przedstawienia erozji zamiast operacji sumy należy użyć iloczynu logicznego, co daje funkcję $g_b(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. Jeżeli wartość tej funkcji dla danego punktu $x \in A$ jest równa jeden, to punkt ten należy do wyniku erozji.

Jeżeli funkcja boolowska f_b nie posiada w swojej postaci nieskracalnej negacji żadnego z argumentów (tzn. wszystkie zmienne są w postaci prostej), to funkcja taka nazywana jest dodatnią funkcją boolowską DFB (*ang. Positive Boolean Function - PBF*) i jest ona rosnąca¹. Własność ta przechodzi z kolei na definiowany za pomocą tej funkcji operator morfologiczny ϕ_b .

Rozpatrzmy jeszcze przykład przetwarzania ze statystyką porządkową (*ang. order statistic*). Niech $r_k, k \leq n$ będzie dodatnią funkcją boolowską n zmiennych, która jest równa 1, jeżeli przynajmniej k zmiennych jest równych 1, a w przeciwnym wypadku przyjmuje wartość zero. Oczywiście jest, że $r_1(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i $r_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. Jeżeli S jest elementem strukturalnym o n punktach i jeżeli $k \leq n$, to możemy zdefiniować operator przetwarzania ze statystyką porządkową $\rho_{s,k}$ jako operator dany przez definicję (23) przy $f_b = r_k$. Oczywiście jest, że $\rho_{s,1}(A) = A \oplus \overline{S}$ i $\rho_{s,n}(A) = A \otimes S$. Co więcej,

$$\rho_{s,n} \leq \rho_{s,n-1} \leq \dots \leq \rho_{s,1}$$

Jeżeli n jest nieparzyste i $k = (n+1)/2$, to $\rho_{s,k}$ jest operatorem medianowym.

4. Filtry morfologiczne

Przykładem przekształcenia morfologicznego jest filtr morfologiczny - M-filtr. Zgodnie z definicją Serry (podaną w [2]) jest to takie odwzorowanie, które jest zarówno rosnące, jak i idempotentne, a w przypadku operowania na N -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej również niezmiennicze względem przesunięcia.

¹ Omówienie i uzasadnienie własności takich funkcji nie jest tematem tej pracy, w związku z czym zainteresowani mogą odnaleźć je w odpowiedniej literaturze ([7], [16]).

Stosując powyższe wymagania do omówionych wcześniej operacji morfologicznych, dochodzimy do stwierdzenia, że szczególnym przypadkiem M-filtrów są przekształcenia otwierania i zamykania.

W przypadku każdej z tych dwóch operacji przeprowadzanych na obrazie wynikiem jest eliminacja specyficznych szczegółów obrazu, mniejszych niż element strukturalny, bez zmiany ogólnych geometrycznych właściwości tego obrazu.

Przekształcenie otwierania z izotropowym elementem strukturalnym powoduje wygładzenie konturów obiektów, przerywa wąskie „przesmyki”, likwiduje małe „wyspy” i ostre „przyłądki” obiektów (rys. 13.). Zamykanie również wygładza kontury, blokuje wąskie „kanały” i małe „jeziora” (rys. 14.).

Filtrowanie morfologiczne obrazu poprzez operacje otwierania i zamykania odpowiada idealnym, nie realizowalnym filtrom środkowoprzepustowym (*ang. band-pass filters*) z konwencjonalnego filtrowania liniowego. W przypadku takiego filtra dalsze jego stosowanie po pierwszym przejściu nie powoduje już żadnych dalszych zmian w wynikowym obrazie.

Nie wszystkie definicje filtrów morfologicznych są jednak takie same. Zgodnie z definicjami Maragosa i Schafera idempotentność operatorów nie jest wymagana, za to oprócz niezmienniczości względem przesunięcia M-filtr powinien być niezmienniczy względem przeskalowania (*ang. scale-invariant*), zależeć tylko od lokalnych informacji o sygnale oraz posiadać własność tzw. „półciągłości od góry” (*ang. upper semi-continuous*)¹. Przy takich założeniach nie tylko operacje otwierania i zamykania są filtrami morfologicznymi, ale również podstawowa dylatacja i erozja.

Jak pokazano w punkcie 3. tej pracy, także przekształcenia innego typu mogą być przedstawione za pomocą podstawowych operacji morfologicznych.

Skoro operatory morfologiczne mogą być definiowane poprzez odpowiednie funkcje boolowskie, w szczególności także dodatnie funkcje boolowskie, o ile mają posiadać własność narastania (takie wymagania dla M-filtrów stawia Serra - patrz [2]), to możliwe jest realizowanie filtrów stosowych jako przekształceń morfologicznych. Filtry stosowe wprost odpowiadają funkcjom DFB, operującym na ciągach bitów wejściowych.

W punkcie 3. pokazano również sposób zdefiniowania filtra medianowego poprzez operacje morfologiczne jako szczególnego przypadku przekształcenia ze statystyką porządkową.

Ponieważ omówienie wszystkich możliwych filtrów realizowanych jako operatory morfologiczne nie jest tematem tej pracy, zainteresowani odsyłani są do odpowiedniej literatury (przykładowo [14] i [15]).

¹ Patrz [14] i [15].

5. Podsumowanie

Do najważniejszych cech morfologicznego podejścia do analizy i przetwarzania obrazów należy właściwość operacji morfologicznych, które pozwalają na systematyczną zmianę obrazu zachowując jednak jego najważniejsze charakterystyki geometryczne. Możliwe jest również wyrażenie złożonych algorytmów operujących na obrazie cyfrowym za pomocą bardzo małej klasy podstawowych przekształceń morfologicznych. Wreszcie istnieją twierdzenia, dzięki którym można uzyskać przedstawienie filtrów morfologicznych w postaci tych podstawowych operacji morfologicznych.

Ze względu na swoją prostotę i możliwość równoległej realizacji operacji morfologicznych znalazły one szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach. Chociaż początkowo operowano wyłącznie na obrazach binarnych, obecnie istnieje już cała dziedzina morfologii matematycznej i jej przekształceń zdefiniowanych dla obrazów z wieloma poziomami szarości.

Mimo intensywnego rozwoju, jaki morfologia matematyczna przechodziła na przestrzeni ostatnich lat, wiele z jej zastosowań nie jest jeszcze znanych, a wiele własności nie docenionych. Jednakże właśnie ze względu na tę możliwość badań i aktualność aplikacji (co wyraża się dużą liczbą publikacji z tego zakresu) jest tak atrakcyjną dziedziną.

Wszelki kontakt ze strony zainteresowanych i zajmujących się tematem morfologii matematycznej, jej przekształceń i zastosowań, jest mile widziany. Adres dla poczty elektronicznej: ulas@zeus.polsl.gliwice.pl.

LITERATURA

1. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X.: Image analysis using mathematical morphology. . IEEE Trans. on PAMI, July 1987.
2. Serra J.: Introduction to Mathematical Morphology. Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, pp. 283-305, 1986.
3. Heijmans H. J. A. M.: Mathematical morphology: A modern approach in image processing based on algebra and geometry. SIAM Review, vol. 37, No. 1, pp. 1-36, March 1995.
4. Pratt W. K.: Digital Image Processing. John Wiley and Sons, Inc., 1991.
5. Giardina Ch. R., Dougherty E. R.: Morphological Methods in Image and Signal Processing. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987.

6. Chermant J. L., Coster M.: Role of mathematical morphology in filtering, segmentation and analysis. *Acta Stereologica* 13, No.1, pp. 125-136, 1994.
7. Stańczyk U.: Dodatnie Funkcje Boolowskie. *ZN Pol. Śl. s. Informatyka z.38*, Gliwice 2000.
8. Traczyk T.: *Wstęp do teorii algebr Boole'a*. PWN, Warszawa 1970.
9. Wojciechowski K., Kuś Z.: *Przetwarzanie stosowe*. *ZN Pol. Śl. s. Automatyka z.113*, Gliwice 1994.
10. Matheron G.: *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., NY, 1975.
11. Serra J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
12. Chanda B., Haralick R. M.: Studies on properties of digital objects using mathematical morphology. *Indian J. on Pure and App. Math.* 25, No. 1-2, pp. 181-203, 1994.
13. Heijmans H. J. A. M.: *Morphological Image operators*. Academic Press, Boston, 1994.
14. Maragos P., Schafer R. W.: Morphological Filters - Part I: Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Process.*, vol. 35, No. 8, August 1987.
15. Maragos P., Schafer R. W.: Morphological Filters - Part II: Their relations to Median, order-statistic and stack filters. *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Process.*, vol. 35, No. 8, August 1987.
16. Gilbert E. N.: Lattice-theoretic properties of frontal switching functions. *J. Math. Phys.*, vol. 33. pp. 57-67, April 1954.
17. Nieniewski M.: *Morfologia matematyczna w przetwarzaniu obrazów*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1998.

Recenzent: Dr inż. Bogdan Smółka

Wpłynęło do Redakcji 2 stycznia 2000 r.

Abstract

Mathematical morphology provides an approach to the processing of images, which is based on shape. Appropriately used, mathematical morphological operations tend to simplify image data while preserving their essential shape characteristics and eliminating irrelevancies.

The language of mathematical morphology is that of set theory. Sets in mathematical morphology represent the shapes of objects.

The two basic morphological transformations are dilation and erosion. Both these operations use a special single shape parameter, called a structuring element. Dilation is a morphological transformation that combines two sets (the first is an image, the second is a structuring element) using vector addition of sets elements (an example is shown in Fig. 1.). Erosion is the morphological transformation dual to dilation, which combines two sets (again the first is an image, the second is a structuring element) using the vector subtraction of set elements (an example is shown in Fig. 7.).

Dilation is commutative, associative, translation invariant, increasing and extensive transform if an origin belongs to the structuring element, while erosion is anti-extensive if an origin belongs to the structuring element, translation invariant and increasing operation.

Dilations and erosions are primary transforms that are used to define other morphological operators, for example such as openings and closings. Opening of an image is erosion followed by dilation with the same structuring element, while closing is dilation followed by erosion with the same structuring element.

Morphological operators may be also defined by Boolean functions. If such a function is a positive Boolean function, then its increasing property causes that the defined operator gives an increasing transformation as well.

Anybody interested in the topic of Mathematical Morphology, its transforms and applications is welcome to contact the author of this paper through e-mail. The address is: ulas@zeus.polsl.gliwice.pl.