ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Danuta JAMA, Adam CZECH

O PEWNYM RÓWNANIU RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWYM ZWIĄZANYM Z PROBLEMEM TRANSPORTU NEUTRONU W PŁASKIEJ PŁYTCE

Streszczenie. Celem pracy jest zbadanie istnienia, jednoznaczności i asymptotyki rozwiązań równania różniczkowo-całkowego o postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) &= -f_1(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) + f_2(x,y,t)u(x,y,t) + \\ &+ F(t,u(x,y,t)) + \int_{-1}^{1} K(x,y,t)u(x,y,t)\,dy + f_3(x,y,t)\end{aligned}$$

z odpowiednimi warunkami początkowymi.

ON A DIFFERENTIAL-INTEGRAL EQUATION CONNECTED WITH THE TRANSPORT PROBLEM OF NEUTRON IN A FLAT PLATE

Summary. We investigate the existence, uniqueness and asymptotic properties of the solution of the differential-integral equation of the form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) &= -f_1(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) + f_2(x,y,t)u(x,y,t) + \\ &+ F(t,u(x,y,t)) + \int_{-1}^{1} K(x,y,t)u(x,y,t)\,dy + f_3(x,y,t)\end{aligned}$$

with appriopriate boundary and initial conditions.

О НЕКОТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СВЯЗАННОМ С ПРОБЛЕМОЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НЕЙТРОНА В ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Резюме. Целью статьи является исследование существования, однозначности и асимптотики решений дифференциально-интегрального уравнения в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) &= -f_1(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) + f_2(x,y,t)u(x,y,t) + \\ &+ F(t,u(x,y,t)) + \int_{-1}^{1} K(x,y,t)u(x,y,t)\,dy + f_3(x,y,t)\end{aligned}$$

с соответствующими краевыми и начальными условиями.

1. Wstęp

Tradycyjnie przez $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ i C będziemy oznaczać odpowiednio zbiory wszystkich liczb naturalnych, rzeczywistych, nieujemnych i zespolonych. Dla danej liczby dodatniej α oznaczamy przez I_α przedział $[-\alpha,\alpha]$.

Niech a będzie ustaloną liczbą dodatnią i oznaczmy przez X przestrzeń $L^2(I_a\times I_1)$, a przez X_0 jej podzbiór złożony ze wszystkich funkcji ϕ spełniających warunki:

(a) $\phi(-a,y)=0$ dla p.w. $y\in(0,1]$;

(b) $\phi(a,y)=0$ dla p.w. $y\in[-1,0)$.

Oczywiście, zarówno całkowalność z kwadratem, jak i zwrot "prawie wszystkich" (w skrócie: "p.w.") są rozumiane tutaj (jak i w dalszym ciągu pracy) w sensie miary Lebesgue'a na odpowiednim zbiorze.

Będziemy zakładać ogólnie, że funkcje:

$$f_1\colon\ I_1\to\mathbf{R},\qquad f_2,\ f_3,\ K\colon\ I_a\times I_1\to\mathbf{R},$$

$$F\colon\ \mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad v_0\colon\ I_a\times I_1\to\mathbf{R}$$

są ustalonymi funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.

Rozważmy równanie o postaci:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) = -f_1(y)\,\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) + f_2(x,y,t)\,u(x,y,t) + \\ &+F(t,u(x,y,t)) + \int_{-1}^{1} K(x,y,t)\,u(x,y,t)\,dy + f_3(x,y,t)\end{aligned} \tag{1}$$

na zbiorze $I_a \times I_1 \times \mathbf{R}_+$, przy czym szukana funkcja $u(x,y,t) = u_t(x,y)$ spełnia następujące warunki brzegowy i początkowy:

$$u(\,\cdot\,,\,\cdot\,t) = u_t \in X_0 \quad \text{dla wszystkich} \quad t \in \mathbf{R}_+; \tag{2}$$

$$u_0 = v_0. \tag{3}$$

Pochodne w równaniu (1) rozumiane są w sensie pochodnych uogólnionych.

Dla $t \in \mathbf{R}_+$ zdefiniujmy na X następujące operatory liniowe:

$$(A\phi)(x,y) := -f_1(y)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y), \tag{4}$$

$$(B_t\phi)(x,y) := \int_{-1}^{1} K(x,y,t)\,\phi(x,y)\,dy, \tag{5}$$

$$(C_t\phi)(x,y) := f_2(x,y,t)\,\phi(x,y). \tag{6}$$

Oczywiście, dziedziną operatorów B_t i C_t jest cała przestrzeń X, tzn. $D(B_t) = D(C_t) = X$ $(t \geq 0)$, a dziedzinę operatora A definiujemy:

$$D(A) := \{\phi \in X_0 : A\phi \in X\} = \{\phi \in X : A\phi \in X,\ \phi \text{ spełnia } (a) - (b)\}.$$

Przeciwdziedziny wszystkich operatorów są podzbiorami przestrzeni X, tzn. $R(A)$, $R(B_t)$, $R(C_t) \subset X$ dla $t \geq 0$.

Używając zdefiniowanych w ten sposób operatorów liniowych i traktując u jako odwzorowanie $\mathbf{R}_+ t \mapsto u_t(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in X$, równanie (1) z warunkami (2) i (3) możemy zapisać w postaci następującego równania różniczkowego w przestrzeni Hilberta X:

$$\frac{d}{dt}u_t = Au_t + B_t u_t + C_t u_t + F(t,u_t) + f_3(t) \tag{7}$$

z warunkiem początkowym

$$\lim_{t\to 0} u_t = v_0, \tag{8}$$

gdzie zbieżność jest oczywiście rozumiana w sensie normy $\|\cdot\|$ w przestrzeni X indukowanej przez iloczyn skalarny $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ w tej przestrzeni.

W dalszym ciągu przez $\beta(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń operatorów liniowych ograniczonych na X, a przez $\varphi(X)$ - przestrzeń operatorów liniowych domkniętych na X. Symbolem $R(z,A)$ oznaczać będziemy rezolwentę operatora A.

Naszym celem jest pokazanie, że operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy opetratorów liniowych ograniczonych na X oraz zastosowanie twierdzenia Hille'a-Yoshidy do badanego równania.

O funkcji f_1 będziemy zakładać, że

$$f_1(y) > 0 \quad \text{dla} \quad y \in (0,1]; \qquad f_1(y) < 0 \quad \text{dla} \quad y \in [-1,0) \tag{9}$$

oraz że jest ciągła w rozpatrywanych przedziałach.

2. Lematy

Udowodnimy teraz kilka lematów.

Lemat 1. *Jeśli istnieją stałe dodatnie M i L, takie że*

$$|K(x,y,t)| \leq M; \qquad |f_2(x,y,t)| \leq L, \qquad (x,y) \in I_a \times I_1, t \in \mathbf{R}_+, \tag{10}$$

to operatory B_t i C_t są ograniczone i istnieje wspólna stała $M_1 > 0$, taka że

$$\|B_t\| \leq M_1 \quad \textit{oraz} \quad \|C_t\| \leq M_1 \quad \textit{dla } t \in \mathbf{R}_+. \tag{11}$$

Dowód. Na podstawie (10) i nierówności Schwarza mamy

$$\begin{aligned}
\|B_t u_t\|^2 &= \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1} K(x,y,t)u(x,y,t)\,dy\right|^2 dxdy \leq \\
&\leq \int_{-1}^{1} dy \int_{-a}^{a} dx \left(\int_{-1}^{1} K^2(x,y,t)\,dy\right)\left(\int_{-1}^{1} u^2(x,y,t)\,dy\right) \leq \\
&\leq 4M^2\|u\|^2
\end{aligned}$$

oraz

$$\|C_t u_t\|^2 = \int_{-1}^{1} dy \int_{-a}^{a} f_2^2(x,y,t)u^2(x,y,t)\,dx \leq L^2\|u\|^2.$$

Przyjmując $M_1 := \max(2M, L)$, otrzymujemy (11). □

Lemat 2. *Jeśli funkcja f_1 spełnia nierówności* (9) *oraz f_1^{-1} jest funkcją ograniczoną na zbiorze $[-1,0) \cup (0,1]$, to:*

(*a*) *zbiór $D(A)$ jest gęsty w X;*

(*b*) *operator A jest domknięty;*

(c) $\|R(z,A)\| \leq (Re\,z)^{-1}$ *dla $Re\,z > 0$.*

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie $\Omega := (-a,a) \times (-1,1)$. Ponieważ $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A)$ oraz $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = X$, więc $\overline{D(A)} = X$, co dowodzi (*a*).

Rozważmy teraz równanie:

$$(zI - A)f = h, \qquad f, h \in X; \;\; z = \alpha + i\beta \in \mathbf{C},$$

które można zapisać w postaci:

$$zf + f_1\frac{\partial f}{\partial x} = h$$

lub, oznaczając

$$g := \frac{h}{f_1} \in X; \qquad \psi := \psi_z := \frac{z}{f_1}$$

w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \psi f = g. \tag{12}$$

Równanie (12) posiada następujące rozwiązanie:

$$f(x,y) = c(y)E[-\psi(y)x] + \frac{1}{f_1}\int_{-a}^{x} E[-\psi(y)(x-x')]\, g(x',y)\, dx', \tag{13}$$

gdzie $E[z] := \exp(z)$, a $c(y)$ jest dowolną funkcją zmiennej y.

Nakładając warunek, by $f \in D(A)$, otrzymujemy:

$$0 = f(-a,y) = c(y)E[\psi(y)\, a] \qquad \text{dla p.w. } y \in (0,1],$$

a stąd

$$c(y) = 0 \qquad \text{dla p.w. } y \in (0,1].$$

Z kolei, dla p.w. $y \in [-1,0)$,

$$0 = f(a,y) = c(y)E[-\psi(y)\, a] + \frac{1}{f_1}\int_{-a}^{a} E[-\psi(y)(a-x')]\, g(x',y)\, dx',$$

czyli

$$c(y) = -\frac{1}{f_1}\int_{-a}^{a} E[-\psi(y)x']\, g(x',y)\, dx' \qquad \text{dla p.w. } y \in [-1,0). \tag{14}$$

Podstawiając (14) do (13), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\frac{1}{f_1}\int_{-a}^{a} E[-\psi(y)x']\, g(x',y)\, dx' \cdot E[-\psi(y)x] + \\ &\quad + \frac{1}{f_1}\int_{-a}^{x} E[-\psi(y)(x-x')]\, g(x',y)\, dx' \end{aligned}$$

dla p.w. $y \in [-1,0)$.

Zatem rozwiązanie równania (12) należące do $D(A)$ ma postać:

$$f(x,y) = \frac{1}{f_1}\int_{-a}^{x} E[-\psi(y)(x-x')]\, g(x',y)\, dx' \qquad \text{dla p.w. } y \in (0,1] \tag{15}$$

oraz

$$f(x,y) = -\frac{1}{f_1}\int_{x}^{a} E[-\psi(y)(x-x')]\, g(x',y)\, dx' \qquad \text{dla p.w. } y \in [-1,0). \tag{16}$$

Niech $y \in (0,1]$ oraz $z = \alpha + i\beta$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$. Mamy

$$\psi(y) = \frac{\alpha}{f_1(y)} + i\frac{\beta}{f_1(y)},$$

więc oznaczając

$$\bar{\psi}(y) := \bar{\psi}_\alpha(y) := \frac{\alpha}{f_1(y)},$$

dostajemy z (15), na mocy nierówności Schwarza,

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{1}{f_1}\int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, g(x',y)\, dx' \leq \\ &\leq \frac{1}{f_1}\left(\int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, dx'\right)^{1/2} \cdot \\ &\cdot \left(\int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, |g(x',y)|^2\, dx'\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Ale mamy:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, dx' &= E[-\bar{\psi}(y)x]\int_{-a}^{x} E[\bar{\psi}(y)x']\, dx' = \\ &= \frac{f_1(y)}{\alpha}\left[1 - E[-\bar{\psi}(y)(x+a)]\right] \leq \frac{f_1(y)}{\alpha}, \end{aligned} \tag{18}$$

toteż uwzględniając (18) w nierówności (17), otrzymujemy:

$$|f(x,y)|^2 \leq \frac{1}{f_1(y)^2}\,\frac{f_1(y)}{\alpha}\int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, |g(x',y)|^2\, dx'. \tag{19}$$

Całkując nierówność (19) względem x, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} |f(x,y)|^2\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha f_1(y)}\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{x} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, |g(x',y)|^2\, dx' = \\ &\leq \frac{1}{\alpha f_1(y)}\int_{-a}^{a} |g(x',y)|^2 \left(\int_{x'}^{a} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, dx\right) dx'. \end{aligned} \tag{20}$$

W podobny sposób jak w nierówności (18) można pokazać, że

$$\int_{x'}^{a} E[-\bar{\psi}(y)(x-x')]\, dx \leq \frac{f_1(y)}{\alpha} \tag{21}$$

i, wykorzystując (21) w (20), uzyskać nierówność:

$$\int_{-a}^{a} |f(x,y)|^2\, dx \leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{-a}^{a} |g(x,y)|^2\, dx. \tag{22}$$

Całkując teraz nierówność (22) względem y po przedziale $(0,1]$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \int_{-a}^{a} |f(x,y)|^2\, dx \leq \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 \int_{-a}^{a} |g(x,y)|^2\, dx. \tag{23}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla przedziału $[-1,0)$, uzyskamy:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-a}^{a} |f(x,y)|^2\, dx \leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{-1}^{0} \int_{-a}^{a} |g(x,y)|^2\, dx. \tag{24}$$

Dodając stronami nierówności (23) i (24), dostajemy nierówność:

$$\|f\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2}\|g\|^2, \qquad \alpha > 0. \tag{25}$$

Z powyższych rozważań wynika, że dla $\alpha > 0$ równanie

$$(zI - A)f = h$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $f \in D(A)$, spełniające warunek

$$\|f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|h\|,$$

czyli

$$f = R(z,A)h; \qquad \|R(z,A)h\| \leq \frac{1}{\alpha}\|h\|, \qquad \alpha = Re\, z > 0, \tag{26}$$

co dowodzi (c).

Z (26) wynika, że operator $R(z,A)$ jest ograniczony, tzn. $R(z,A) \in \beta(X)$. Także $-R(z,A)$ jest ograniczony, więc

$$-R(z,A) \in \beta(X) \subset \varphi(X)$$

i stąd

$$-(zI - A) \in \varphi(X)$$

na mocy twierdzenia o domkniętości operatora, którego odwrotny operator jest domknięty. Zatem operator A jako suma dwóch operatorów domkniętych jest operatorem domkniętym, co oznacza (b). □

Lemat 3. *Operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie półciągłej półgrupy $(T_t,\ t \geq 0)$ operatorów liniowych ograniczonych na X oraz $T_t(X^+) \subset X^+$ dla $t \geq 0$, gdzie X^+ jest zbiorem nieujemnych elementów przestrzeni X.*

Dowód. Na mocy Lematu 2 operator A spełnia założenia twierdzenia Hille'a-Yoshidy i jest generatorem półgrupy operatorów posiadających własności wymienione w tezie.

Z rozważań zawartych w dowodzie Lematu 2 wynika, że

$$R(\lambda, A)(X^+) \subset X^+ \qquad \text{dla } \lambda > 0.$$

W szczególności

$$R(\frac{n}{t}, A)(X^+) \subset X^+ \qquad \text{dla } t \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}.$$

Zatem z równości

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, A)\right)^n h = T_t h$$

wynika druga część tezy. □

Lemat 4. *Przy założeniach przyjętych w Lemacie 3 dla operatorów T_t $(t \geq 0)$ oraz A zachodzą nierówności:*

$$\|T_t\| \leq 1, \qquad (Au, u) \leq 0 \qquad \textit{dla } u \in X.$$

Dowód. Równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt}u = Au \tag{27}$$

z warunkiem początkowym

$$u(0) = u_0,$$

gdzie $u(t) = u_t$ jest funkcją określoną na $\mathbf{R}^+$ o wartościach w przestrzeni Hilberta X, a $u_0 \in D(A)$, posiada zgodnie z twierdzeniem Hille'a-Yoshidy jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$u_t = T_t u_0. \tag{28}$$

Mnożąc równanie (27) skalarnie przez u w X, otrzymujemy:

$$\left(\frac{d}{dt}u, u\right) = (Au, u). \tag{29}$$

Mamy

$$\left(\frac{d}{dt}u_t, u_t\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 \tag{30}$$

oraz na mocy założeń przyjętych na wstępie:

$$\begin{aligned}(Au_t, u_t) &= -\int_{-1}^{1}\int_{-a}^{a} f_1(y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t)\cdot u(x,y,t)\,dx dy = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_1(y)\left(\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial x}u^2(x,y,t)\,dx\right)dy = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_1(y)\left[u^2(a,y,t) - u^2(-a,y,t)\right]dy = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f_1(y)u^2(-a,y,t)\,dy - \int_{0}^{1} f_1(y)u^2(a,y,t)\,dy\right] \leq 0.\end{aligned} \tag{31}$$

Kojarząc (29), (30) i (31), dostajemy:

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 \leq 0, \qquad \text{tzn.} \qquad \|u_t\|^2 \leq \|u_0\|^2. \tag{32}$$

Z kolei (32) razem z (28) implikują

$$\|T_t u_0\| \leq \|u_0\|, \qquad \text{tzn.} \qquad \|T_t\| \leq 1,$$

a (31) implikuje drugą część tezy. $\square$

3. Główne wyniki

Opierając się na wynikach części 2 udowodnimy obecnie dwa główne twierdzenia pracy.

Twierdzenie 1. *Jeżeli istnieją funkcja K na $\mathbf{R}^+$, taka że*

$$(F(t,u),u) \leq K(t)\|u\|^2, \qquad u \in X,\ t \geq 0$$

i stała $\gamma > 0$, taka że

$$f_2(x,y,t) < -\gamma \qquad dla\ \ (x,y) \in \Omega,\ t \geq 0$$

oraz

$$\|B_t\| - \gamma + K(t) < 0 \qquad dla\ dostatecznie\ dużych\ \ t,$$

to rozwiązanie u_t równania (1) z $f_3 = 0$ spełnia warunek:

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t\| = 0,$$

tzn. jest stabilne w sensie Kozina.

Dowód. Mnożąc równanie (7) skalarnie przez u w X otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 &= (Au_t,u_t) + (B_tu_t,u_t) + (C_tu_t,u_t) + (F(t,u_t),u_t) \leq \\ &\leq \|B_t\| \cdot \|u_t\|^2 - \gamma\|u_t\|^2 + K(t)\|u_t\|^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Dzieląc obustronnie nierówność (33) przez $\|u_t\|^2$, a następnie całkując w granicach od 0 do t, dostaniemy:

$$ln\,\|u_t\|^2 \leq ln\,\|u_0\|^2 + 2\int_0^t k(t)\,dt,$$

czyli

$$\|u_t\|^2 \leq \|u_0\|^2 \exp\left(2\int_0^t k(t)\,dt\right), \tag{34}$$

gdzie

$$k(t) := \|B_t\| - \gamma + K(t). \tag{35}$$

Z założenia istnieje (dostatecznie duże) t_0, takie że $k(t) < 0$ dla $t > t_0$, więc z (34) wynika, że u_{t_0} jest ograniczone i

$$\|u_t\| \leq \|u_{t_0}\| \exp\left(\int_{t_0}^t k(t)\,dt\right) \to 0,$$

gdy $t \to \infty$. $\square$

Globalnym *słabym rozwiązaniem* równania (1) nazywamy każde ciągłe rozwiązanie równania całkowo-operatorowego o postaci:

$$u_t = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s}[B_s u_s + C_s u_s + F(s,u) + f_3(s)],$$

jeśli istnieje i jest silnie ciągłą funkcją na wybranej przestrzeni X.

Stosując metodę kolejnych przybliżeń można dowieść twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Jeśli dla* $t \geq 0$ *funkcja* $F(t,\cdot)$ *jest silnie ciągła na* X*, spełnia warunek Lipschitza w normie przestrzeni* X *ze stałą* $L > 0$ *oraz* $F(t,0) = 0$*, a funkcja* $f_3(\cdot,\cdot,t)$ *jest silnie ciągła na* X*, to równanie* (1) *ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie dla* $t \geq 0$ *i* $u(\cdot,\cdot,0) \in D(A)$. □

4. Uwagi

Wzmacniając założenia w stosunku do funkcji F i f_3 można uzyskać wyniki dotyczące istnienia ścisłych rozwiązań badanego równania. Jeżeli dodatkowo założyć, że funkcja k zdefiniowana w (35) jest ograniczona, to otrzymamy następujący wynik:

Słabe rozwiązanie trywialne równania (1) *jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa.*

Literatura

[1] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах,* Наука, Москва 1967.

[2] W.F. Ames, *Non-linear partial differential equations,* Academic Press 1967.

[3] A. Belleni-Morante, *Applied semigroups and evolution equations,* Claredon, Oxford 1982.

[4] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer, New York 1980.

Recenzent: Prof. dr hab. Janusz Szopa

Wpłynęło do redakcji 10.10.1992 r.

Abstract

We investigate the differential-integral equation of the form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) &= -f_1(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t) + f_2(x,y,t)u(x,y,t) + \\ &+ F(t,u(x,y,t)) + \int_{-1}^{1} K(x,y,t)u(x,y,t)\,dy + f_3(x,y,t)\end{aligned}$$

considered for $x \in [-a,a]$, $y \in [-1,1]$, $t \geq 0$ with the following boundary conditions:

(a) $u(-a,y,t) = 0$ for almost all $y \in (0,1]$, $t \geq 0$;

(b) $u(a,y) = 0$ for almost all $y \in [-1,0)$, $t \geq 0$;

and the initial condition:

(c) $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ for $x \in [-a,a], y \in [-1,1]$.

The equation, for certain values of f_1 and f_2, is connected with the transport problem of neutrons in a two-dimensional plate.

We study the existence, uniqueness and asymptotic properties of the solution of the above equation in the class of functions u such that $u_t = u(\cdot\,, \cdot\, t) \in L^2([-a,a] \times [-1,1])$.

We prove the existence of a weak solution of the equation in the space L^2 defined above in case $f_3 = 0$ and give conditions for stability in the sense of Kozin. The key assumption for the non-linear function F is the Lipschitz condition. In the proofs, we use the theory of Hille-Yoshida of semigroups of operators in Hilbert spaces.