ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Danuta JAMA

ELEMENTY TEORII LAPUNOWA-HSU

Streszczenie. Metoda stosowana w tej pracy polega na konstrukcji funkcji Lapunowa dla rozpatrywanego układu zapewniającego stabilność rozwiązania w sensie Mowczana. Interesują mnie warunki, przy których odpowiednio skonstruowana norma rozwiązania dąży do zera, przy $t \to \infty$. Niech Ω będzie pewnym obszarem w $\mathbb{R}^n$ o dostatecznie gładkim brzegu $\partial\Omega$. Rozpatruję w $\Omega \times (0, \infty)$ układ równań różniczkowych cząstkowych postaci:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t,x)u(t,x) \qquad \text{dla} \qquad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$G(t)u(t,x) = \zeta(t,x) \qquad \text{dla} \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$L(t,x)$ — macierzowy operator różniczkowy liniowy o współczynnikach będących funkcjami zależnymi od (t,x),

$G(t)$ — operator różniczkowy o współczynnikach zależnych od t,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $u(t,x)$ — funkcje wektorowe.

Zakładam, że operator $G(t)$ posiada ograniczony operator odwrotny i

$$\eta(t,x) = G^{-1}(t)\zeta(t,x).$$

Do badania stabilności rozwiązania trywialnego układu (1)-(3) wykorzystuję funkcjonał o postaci:

$$V(u(t,x), t, \eta(t,x)) = (u(t,x)B(t)u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t,x).$$

Przy odpowiednich założeniach na operator $B(t)$ dowodzę asymptotycznej stabilności w sensie Kozina rozwiązania trywialnego układu (1)-(3).

THE ELEMENTS OF LAPUNOV-HSU THEORY

Summary. The method used in this work is based on Lapunov function construction for the investigated system providing stability of the solution in Mowczan sense. I have been interested in condition under which suitably constructed solution norm approaches zero with $t \to \infty$. Let Ω be the first are a in $\mathbb{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega$ smooth enough. I investigate the partial differential equations system of type:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t,x)u(t,x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$G(t)u(t,x) = \zeta(t,x) \quad \text{for} \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where $L(t,x)$ is a linear matrix differential operator whose coefficients are functions dependent on (t,x), $G(t)$ has a bound inverse operator, $\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $u(t,x)$ – vector functions and

$$\eta(t,x) = G^{-1}(t)\zeta(t,x).$$

For investigation of the (1)-(3) system trivial solution stability the a following functional is used:

$$V\left(u(t,x), t, \eta(t,x)\right) = \left(u(t,x)B(t)u(t,x)\right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t,x).$$

I prove the asymptotical stability in Kozin sense of system (1)-(3) trivial solution by proper condition on the operator $B(t)$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛЯПУНОВА-ХСУ

Резюме. Метод применяемый в этой работе основываетця на конструкции функции Ляпунова для рассматриваемой системы обеспечивющей устроичивость решения в смысле Мовчана. Меня интересуют условия при которых соотвецтвенно сконструированная норма решения стремитця к хулю при $t \to \infty$. Пусть Ω будет некоторым районом в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладким краем $\partial\Omega$. Рассмотрю систему дифференциальных частных уравнений выражений:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t,x)u(t,x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$G(t)u(t,x) = \zeta(t,x) \quad \text{для} \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $L(t,x)$ матричный дифференциальный линейный оператор с коэффициентами являющимиця функциями от (t,x), $G(t)$ дифференциальный оператор с зависимыми коэффициентами от t, $\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $u(t,x)$ – векторные функции.
Предполагаю, что оператор $G(t)$ имеет ограниченный оператор и

$$\eta(t,x) = G^{-1}(t)\zeta(t,x).$$

Для исследования устроичивости решения тривиальной системы (1)-(3) использую функционал выражения

$$V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right) = \left(u(t,x)B(t)u(t,x)\right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t,x).$$

При соответцтвющих предпосылках на оператор $B(t)$ показываю асимптическую устроичивость в смысле Козина решения тривиальной системы (1)-(3).

Metoda Lapunowa-Hsu była wprowadzona dla równań hiperbolicznych rzędu drugiego z zerowym warunkiem brzegowym. Celem pracy jest rozszerzenie tych warunków na przypadek niezerowych warunków brzegowych.

Metoda Lapunowa-Hsu polega na konstrukcji odpowiedniej funkcji Lapunowa dla rozpatrywanego układu zapewniającego stabilność rozwiązania w sensie Mowczana.

Niech Ω będzie pewnym obszarem w $\mathbb{R}^n$ o dostatecznie gładkim brzegu $\partial\Omega$. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych cząstkowych o postaci:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t,x)u(t,x) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$G(t)u(t,x) = \zeta(t,x) \qquad \text{dla} \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

gdzie:

$L(t,x)$ — macierzowy operator różniczkowy liniowy o współczynnikach będących funkcjami zależnymi od (t,x),

$G(t)$ — operator różniczkowy o współczynnikach zależnych od t, posiadający ograniczony operator odwrotny $G^{-1}(t)$,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $u(t,x)$ — funkcje wektorowe.

Dla układu (1)-(3) zakładam, że spełniony jest warunek zgodności warunku początkowego z warunkiem brzegowym w chwili $t = 0$.

Stosując operator odwrotny do $G(t)$ warunek (2) zapisujemy w postaci:

$$u(t,x) = \eta(t,x) = G^{-1}(t)\zeta(t,x) = \eta(t,x) \qquad x \in \partial\Omega \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Zakładam, że istnieje i jest jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia opisanego danym układem równań różniczkowych cząstkowych, spełniające zadane warunki brzegowe jak i początkowe.

Przedmiotem moich badań są jakościowe własności układów dynamicznych opisanych danym układem równań różniczkowych cząstkowych. Badania prowadzę w przestrzeniach wektorowych $L^2(\Omega)$ i $L^2(\partial\Omega)$. Iloczyn dwóch funkcji wektorowych rozumiany jest w sensie iloczynu wektorowego. Oceny rozwiązań dokonuję na podstawie pojęcia normy [1]. Indukowane normy są oznaczane przez $\|\cdot\|_i$ $(i = 0, 1, 2)$ czy też przez $\|\cdot\|$.

Zakładam, że $\eta(t,x) \in L^2(\partial\Omega)$ dla każdego $t \geqslant 0$ oraz $\| \eta(t,x) \|_{\partial\Omega} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$. Korzystam z norm o budowie:

$$\| u(0,x) \|_0 = (u(0,x), Mu(0,x)) \tag{5}$$

gdzie: M - liniowy, symetryczny, dodatnio określony operator macierzowy

$$\| \eta(t,x) \|_1 = \sup_{t \geqslant 0} \sqrt{\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t,x)\, d(\partial\Omega)} \tag{6}$$

$$\| \eta(t,x) \|_2 = \sup_{t \geqslant 0} (u(t,x), B(t)u(t,x)) \tag{7}$$

gdzie:

$B(t)$ — operator macierzowy o współczynnikach zależnych od t,

$(\cdot,\cdot)$ — iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$.

Badam stabilność rozwiązania trywialnego w sensie definicji Mowczana-Hsu oraz Kozina.

Rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne w sensie Mowczana-Hsu, jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \| u(0,x) \|_0 + \| \eta(t,x) \|_1 < \delta \Longrightarrow \| u(t,x) \| < \varepsilon.$$

Rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne w sensie Kozina, jeśli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| u(t,x) \| = 0, \qquad \| u \|^2 = (u,u).$$

Do badania stabilności rozwiązania trywialnego układu (1)-(3) wykorzystuję funkcjonał

$$V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right) = \left(u(t,x)B(t)u(t,x)\right) + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x). \tag{8}$$

Rozpatruję pochodną $\dfrac{\partial V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)}{\partial t}$ wzdłuż trajektorii rozwiązania

$$\frac{\partial V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, B(t)u(t,x)\right) + \left(u(t,x), \frac{dB(t)}{dt}u(t,x)\right) +$$

$$+ \left(u(t,x), B(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\eta_i^2(t,x). \tag{9}$$

Z (1) i (9) otrzymuję:

$$\frac{\partial V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)}{\partial t} = \left(L(t,x)u(t,x), B(t)u(t,x)\right) + \left(u(t,x), \frac{dB(t)}{dt}u(t,x)\right) +$$

$$+ \left(u(t,x), B(t)L(t,x)u(t,x)\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\eta_i^2(t,x). \tag{10}$$

Równość (10) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)}{\partial t} = \left(u(t,x), L^*(t,x)B(t) + B(t)L(t,x) + \frac{dB(t)}{dt}u(t,x)\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\eta_i^2(t,x), \tag{11}$$

gdzie:

$L^*(t,x)$ – operator formalnie sprzężony do operatora $L(t,x)$.

Zakładam:

$\boldsymbol{A_1}$: zadanie na wartości własne o postaci:

$$N(t)u(t,x) = \left(L^*(t,x)B(t) + B(t)L(t,x) + \frac{dB(t)}{dt}u(t,x)\right)u(t,x) =$$

$$\lambda(t)B(t)u(t,x)$$

posiada rozwiązanie w $L^2(\Omega)$ i istnieje

$$\lambda_{max}(t) < 0 \qquad \text{dla dostatecznie dużych } t, \tag{12}$$

$\boldsymbol{A_2}$: istnieje stała $C > 0$, taka że dla każdego $x \in \Omega$ i $t \geqslant 0$

$$V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right) \geqslant C \parallel u(t,x) \parallel . \tag{13}$$

Twierdzenie 1. *Jeśli*

a) *spełnione są założenia* A_1 *i* A_2,

b) *istnieje stała* D *taka, że dla każdego* t

$$(u(t,x), B(t)u(t,x)) \geqslant D,$$

c)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\eta_i(t,x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

to rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne w sensie Kozina.

Dowód. Wykorzystując wprowadzony funkcjonał $V(u(t,x), t, \eta(t,x))$, z (9) i z założenia A_1 otrzymuję:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial}{\partial t}V(u(t,x),t,\eta(t,x))}{V(u(t,x),t,\eta(t,x))} &= \frac{(u(t,x),N(t)u(t,x)) + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)}{(u(t,x),B(t)u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)} = \\ &= \frac{(u(t,x),\lambda(t)B(t)u(t,x)) + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)}{(u(t,x),B(t)u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\lambda_{max}(t)\left(u(t,x),B(t)u(t,x)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)}{(u(t,x),B(t)u(t,x))}.\end{aligned} \tag{14}$$

Uwzględniając założenie b) twierdzenia 1 z (14) dostajemy nierówność o postaci:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}V(u(t,x),t,\eta(t,x))}{\partial t} \leqslant \lambda_{max} + \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\eta_i^2(t,x). \tag{15}$$

Po scałkowaniu nierówności (15) stronami otrzymuję:

$$\begin{aligned} V(u(t,x),t,\eta(t,x)) &\leqslant \\ \leqslant V(u(0,x),0,\eta(0,x))\exp&\left[\int_0^t \lambda_{max}(s)ds + \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)\right] = \\ = V(u(0,x),0,\eta(0,x))\exp t&\left[\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_{max}(s)ds + \frac{1}{Dt}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x)\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Dla dostatecznie dużych t wyrażenie

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_{max}(s)ds + \frac{1}{Dt}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x) < 0. \tag{17}$$

Z (16) i (17) mamy:

$$\lim_{t\to\infty} V(u(t,x),t,\eta(t,x)) = 0. \tag{18}$$

Z (18) na mocy założenia A_2 otrzymujemy tezę twierdzenia.∎

Twierdzenie 2. *Jeżeli*

a) *spełnione są założenia* A_1,

b) *założenie b) twierdzenia 1,*

c) $\eta(0, x) = 0$ *dla* $x \in \Omega$,

to rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne w sensie Mowczana-Hsu.

Dowód twierdzenia przebiega podobnie jak dowód Twierdzenia 1.

Prezentowana metoda badania stabilności daje dobre wyniki w przypadku, gdy

$$(u(t,x), L(t,x)u(t,x)) \leqslant 0,$$

$$\eta(t,x) \overset{t\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{jednostajnie względem } x$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_i(t,x) \leqslant 0 \qquad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Wykorzystując funkcjonał o postaci:

$$V\left(u(t,x), t, \eta(t,x)\right) = (u(t,x), u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t,x)$$

na podstawie twierdzenia Lapunowa-Mowczana-Hsu otrzymuję poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Jeżeli*

a) *założenie b) twierdzenia 1,*

b) *istnieje stała* $\beta > 0$ *taka, że dla każdego* $x \in \Omega$ *i* $t \geqslant 0$

$$(u(0,x), B(t)u(0,x)) \leqslant \beta\left(u(0,x), Mu(0,x)\right),$$

c) *dla każdego* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \lambda_{max}(s)ds \leqslant 0,$$

to rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne w sensie Mowczana-Hsu w normach $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$,

Dowód twierdzenia przebiega tak samo jak dowód Twierdzenia 1.

Literatura

[1] A.Tylikowski, *Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s.Mat.- Fiz., Gliwice 1972 .

[2] R. H. Plaut, E. F. Infante, *On the stability of some continous systems subjected to random excitation*, Trans. ASME **37**, **3** (1970).

[3] G. S. Hsu, T. H. Leo, *A stability study of continous systems under parameter excitation via Lapunov direct method*, Symposium „Instability of continous systems", Springer, New York 1971.

[4] F. Kozin, *On the almost sure stability of linear systems with rondom coefficients*, Journal of Mathematic and Phyries. **42**, **1** (1963), 59-67.

Recenzent: Prof. dr hab. Janusz Szopa

Wpłynęło do redakcji 13.09.1994 r.

Abstract

The method used in this work is based on Lapunov function construction for the investigated system providing stability of the solution in Mowczan sense. I have been interested in condition under which suitably constructed solution norm approaches zero with $t \to \infty$.

Let Ω be the first are a in $\mathbb{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega$ smooth enough. I investigate the partial differential equations system of type:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L(t,x)u(t,x) \qquad \text{for} \qquad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$G(t)u(t,x) = \zeta(t,x) \qquad \text{for} \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad \text{for} \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

where $L(t,x)$ is a linear matrix differential operator whose coefficients are functions dependent on (t,x), $G(t)$ has a bound inverse operator and

$$\eta(t,x) = G^{-1}(t)\zeta(t,x).$$

For investigation of the (1)-(3) system trivial solution stability the a following functional is used:

$$V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)=\left(u(t,x)B(t)u(t,x)\right)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2(t,x).$$

I prove the asymptotical stability in Kozin sense of system (1)-(3) trivial solution by proper condition on the operator $B(t)$.

Theorem. If constant L_0 exists so that

$$V\left(u(t,x),t,\eta(t,x)\right)\geqslant C\parallel u(t,x)\parallel.$$

The problem

$$N(t)u(t,x)=\left(L^*(t,x)B(t)+B(t)L(t,x)+\frac{dB(t)}{dt}u(t,x)\right)u(t,x)=$$

$$=\lambda(t)B(t)u(t,x)$$

has a solution in $L^2(\Omega)$ and $\lambda_{max}(t)\leqslant 0$ exists

$$\bigvee_{D}\bigwedge_{t\geqslant 0}\left(u(t,x),B(t)u(t,x)\right)>D,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\eta_i(t,x)=0\qquad i=1,2,\ldots,n,\qquad x\in\Omega,$$

$$\eta_i(0,x)=0$$

then

$$\lim_{t\to\infty}\parallel u\parallel=0.$$