ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Danuta JAMA

O ZASTOSOWANIU CAŁEK ENERGII DO BADANIA STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ PEWNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Streszczenie. Tematem pracy jest badanie stabilności w sensie Lapunowa-Mowczana rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych o postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(t,x)u,$$

gdzie $L(t,x)$ jest operatorem zawierającym pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem t i pochodne rzędu parzystego względem jednowymiarowej zmiennej przestrzennej x. Rozważam zadanie początkowo-brzegowe. Celem pracy jest uzyskanie oszacowań a'priori norm rozwiązania w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa przy wykorzystaniu oszacowań energetycznych. Stabilność rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych badam w sensie definicji sformułowanej przez Mowczana, będącej uogólnieniem klasycznego pojęcia stabilności wprowadzonego przez Lapunowa. Rozwiązanie trywialne równania jest stabilne według Mowczana, jeżeli:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \| u \|_0 < \delta \Longleftrightarrow \| u \|_1 < \varepsilon$$

gdzie: $\| u \|_0$ — norma warunków początkowych, $\| u \|_1$ — norma rozwiązania.
Różnica między definicją Lapunowa i Mowczana polega na wprowadzeniu różnych norm (przez Mowczana) dla warunków początkowych i rozwiązania.
Jako normę $\| u \|_0$ będę brała pierwiastek z energii układu w chwili $t = 0$, a jako normę rozwiązania — normę przestrzeni $L^2(0,1)$.

ON APPLICATION OF ENERGY INTEGRATES TO INVESTIGATION OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTIONS

Summary. Application of energy intergrates to investigation of stability of some partial differential equations has been a topic of my considerations. The stability of partial differential equations in Mowczan's definition sense which is a generalization of classic stability comprehension introduced by Lapunow. The equation solution is stable according to Mowczan if

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0} \| u \|_0 < \delta \Longleftrightarrow \| u \|_1 < \varepsilon,$$

where $\| u \|_0$ — the initial condition norm, $\| u \|_1$ — the solution norm. The difference between Lapunow and Mowczan definitions lies in using (by Mowczan) different norms for the initial conditions and for the solution. I will take a square root from the system's energy in the moment $t = 0$ as norms, and the norm of space as the solution norm. Weakly nonlinear partial differential equations appear in many mathematical moments describing physical phenomena.

О ПРИМЕЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТРОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Резюме. Темой работы являетця исследование устойчувости в смысле Ляпунова-Мовчана решений дифференциальных частных уравнений выражений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(t,x)u$$

где: $L(t,x)$ являетця оператором сопержащим частные производные первого порядка относительно и производные четного порядка относительно одномерной пространственной переменной x. Обдумываю начально-кра--евое задание. Целью работы являетця получение оценки априори норм решения в соответственных пространствах Соболева, используя энергетическую
оценку. Устройчивость решений дифференциальных частных уравнений исследую в смысле дефиниции сформулированной Мовчаном, являющейся обобщением классического понятия устойчувости введенного Ляпуновом. Тривиальное решение уравнения устроичиво по Мовчаны если:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0} \| u \|_0 < \delta \Longleftrightarrow \| u \|_1 < \varepsilon,$$

где: $\| u \|_0$ — норма начальных условий, $\| u \|_1$ — норма решения. Разница между дефиницией Ляпунова и Мовчана основана на введении разных

норм (Мовчаном) для начальных условий и решения. В качестве нормы $\| u \|_0$ возьму корень с энергии системы во время $t = 0$, в качестве нормы решения приму нормы пространства $L^2(0,1)$.

W licznych modelach matematycznych opisujących zjawiska fizyczne występują słabo nieliniowe równania różniczkowo-cząstkowe.

Jednym z nich jest zadanie początkowo brzegowe o postaci:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) - \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} + f(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \qquad \text{dla } x \in [0,1] \;\; t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{dla } t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x) \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) \qquad \text{dla } x \in [0,1] \tag{3}$$

gdzie: F, f, φ_1, φ_2 – funkcje zadane określone dla $x \in [0,1]$ i $t \geqslant 0$, u – funkcja szukana.

Szukam oszacowań a'priori rozwiązania zadania (1)-(3) klasy

$$W^{4,2}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^{3,2}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1) \cap W^{(2,2)}(0,T), \qquad t < \infty,$$

gdzie:

$W^{n,2}(0,1)$ – przestrzeń funkcji posiadających uogólnione pochodne do rzędu n włącznie względem zmiennej $x \in (0,1)$, całkowalnych z kwadratem na tym przedziale,

$\overset{\circ}{W}{}^{n,2}(0,1)$ – podprzestrzeń przestrzeni $W^{n,2}(0,1)$ składająca się z funkcji mających zwarty nośnik w przedziale $(0,1)$,

$W^{2,2}(0,T)$ – przestrzeń funkcji posiadających uogólnione pochodne do rzędu 2 włącznie względem $t \in [0,T]$ $T < \infty$, całkowalne z kwadratem na tym przedziale.

Twierdzenie 1. *Jeśli*

a) $\bigwedge_{v \in D_F} \; vF(v) \leqslant 0, \qquad F(0) = 0,$

b) *funkcja* $f(t)$ *różniczkowalna, malejąca o wartościach z przedziału* $(0,1)$ *dla* $t \geqslant 0$ *oraz* $\varphi_1(x)$ *posiada pochodne do rzędu 2 włącznie,* $\varphi_2(x) \in L^2(0,1)$,

to rozwiązanie trywialne równania (1) z warunkami (2), (3) jest stabilne w sensie definicji Mowczana.

Dowód. Dla dowodu wprowadzam całkę energetyczną o postaci:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)^2\right] dx. \tag{4}$$

Rozpatruję pochodną $\frac{dV(t)}{dt}$ wzdłuż trajektorii równania (1)

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 \left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}\right] dx. \tag{5}$$

Z (1) mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\cdot F\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) - \\ &- \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + f(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}.\end{aligned} \tag{6}$$

Całkując przez części i wykorzystując warunki brzegowe oraz to, że $u \in W_o^{3,2}(0,1) \cap W_o^{1,2}(0,1)$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}dx = -\int_0^1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t}dx \tag{7}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}dx = \\ &= -\int_0^1 f(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx = \\ &= \int_0^1 \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[f(t)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{df(t)}{dt}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right\} dx.\end{aligned} \tag{8}$$

Z (6), (7), (8) i (5) dostajemy:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 &\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\cdot F\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[f(t)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{df(t)}{dt}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right] dx.\end{aligned}$$

Wykorzystując założenia twierdzenia mamy oszacowanie o postaci:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 [1 - f(t)]\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{9}$$

Całkując nierówność (9) po t otrzymujemy:

$$V(t) - V(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 [1 - f(t)] \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 [1 - f(0)] \left(\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 [1 - f(t)] \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{10}$$

Z założenia b) mamy, że

$$\bigvee_{M_1 = const} 0 < 1 - F(t) \leqslant M_1 < 1, \tag{11}$$

a więc z (11), (10), i (4) otrzymujemy:

$$V(t) - V(0) \leqslant \frac{1}{2} M_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant M_1 V(t)$$

czyli

$$V(t) \leqslant \frac{1}{1 - M_1} V(0). \tag{12}$$

Wykorzystując znaną nierówność dla klasy funkcji $W_0^{1,2}(0,1)$ o postaci:

$$\int_0^1 u^2(t,x)dx \leqslant \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{13}$$

oraz (4) i (12) otrzymujemy:

$$\int_0^1 u^2(t,x)dx \leqslant 2V(t) \leqslant \frac{2}{1 - M_1} V(0) \leqslant MV(0)$$

gdzie:

$$M = \frac{2}{1 - M_1},$$

czyli ostatecznie otrzymujemy oszacowanie o postaci:

$$\int_0^1 u^2(t,x)dx \leqslant MV(0), \tag{14}$$

z którego wynika teza twierdzenia.■

Podobną metodę stosuję do badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych o postaci:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)$$

$$-c(t,x)u(t,x)-d(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \tag{15}$$

dla $x\in[0,1]$, $t\geqslant 0$,

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=\frac{\partial^3 u(t,0)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 u(t,1)}{\partial x^3}=\frac{\partial^5 u(t,0)}{\partial x^5}=\frac{\partial^5 u(t,1)}{\partial x^5}=0 \tag{16}$$

dla $t\geqslant 0$,

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_2(x) \tag{17}$$

dla $x\in[0,1]$ gdzie $a(x)$, $b(x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – funkcje dane określone dla $x\in[0,1]$ i $t\geqslant 0$, $u(t,x)$ – funkcja nie znana.

Szukam oszacowań a'priori rozwiązania zadania (15)-(17) klasy

$$W^{6,2}(0,1)\cap W_o^{1,2}(0,1)\cap W_o^{3,2}(0,1)\cap W_o^{5,2}(0,1)\cap W^{2,2}(0,T),\qquad t<\infty.$$

Twierdzenie 2. *Jeśli współczynniki równania spełniają warunki:*

a) $\bigwedge\limits_{x\in[0,1]} a(x)\geqslant 0,\quad b(x)\geqslant 0$ *oraz*

$$a(0)=a(1)=\frac{\partial a(0)}{\partial x}=\frac{\partial a(1)}{\partial x}=0,$$

b) $\bigwedge\limits_{\substack{x\in[0,1]\\ t\geqslant 0}} d(t,x)\geqslant 0,\quad \frac{\partial c(t,x)}{\partial t}\leqslant 0$ *oraz*

$$\bigvee_{M_1=const} c(t,x)\geqslant M_1>0,$$

c)

$$\bigvee_{M_2=const}\max\left\{\sup_{x\in[0,1]}a(x),\ \sup_{x\in[0,1]}b(x),\ \sup_{\substack{x\in[0,1]\\ t\geqslant 0}}c(t,x)\right\}\leqslant M_2$$

oraz funkcja $\varphi_2(x)\in L^2(0,1)$, a funkcja $\varphi_1(x)$ posiada pochodne do rzędu trzeciego włącznie całkowalne z kwadratem dla $x\in(0,1)$, to rozwiązanie trywialne równania (15) z warunkami (16), (17) jest stabilne w sensie Mowczana.

Dowód. Dla dowodu wprowadzam całkę energetyczną o postaci:

$$V(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2+a(x)\left(\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\right)^2+b(x)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\,c(t,x)u^2(t,x)\right]dx. \tag{18}$$

Różniczkując (18) mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt}=\int_0^1\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}+a(x)\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial x^3}\frac{\partial^4u(t,x)}{\partial x^3\partial t}+b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x\partial t}+\right.$$

$$\left.+c(t,x)u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial c(t,x)}{\partial t}u^2(t,x)\right]dx. \tag{19}$$

Z (19) i (15) dostajemy:

$$\frac{dV(t)}{dt}=\int_0^1\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial x^3}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\right.$$

$$-c(t,x)a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-d(t,x)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2++a(x)\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial x^3}\frac{\partial^4u(t,x)}{\partial x^3\partial t}+$$

$$\left.+b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x\partial t}+c(t,x)u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial c(t,x)}{\partial t}u^2(t,x)\right]dx. \tag{20}$$

Dokonując prostych operacji i uwzględniając (16) jak i założenie a) twierdzenia otrzymujemy:

$$\frac{dV(t)}{dt}=\int_0^1\left[-d(t,x)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial c(t,x)}{\partial t}u^2(t,x)\right]dx. \tag{21}$$

Na mocy założenia b) twierdzenia z (21) otrzymujemy nierówność o postaci:

$$V(t)\leqslant V(0). \tag{22}$$

Wykorzystując drugą część założenia b) twierdzenia, (18) oraz nierówność (22) i założenie c) twierdzenia otrzymujemy oszacowanie o postaci:

$$\int_0^1 u^2dx\leqslant C\int_0^1\left[(\varphi_1(x))^2+\left(\frac{\partial^3\varphi_1(x)}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right)^2+\varphi_1^2(x)\right]dx$$

gdzie

$$C=\frac{2M_2}{M_1}.$$

Prawa strona nierówności tworzy normę warunków początkowych, lewa normę rozwiązania. ∎

Literatura

[1] E. Hille, *Functional Analysis and Semigroups,* American Mathematical Sosiety, New York 1943.

[2] A. Czech, D. Jama, B. Janiec, *O stabilności pewnych układów dynamicznych,* Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Mat.-Fiz. **24** (1973), 63-67.

[3] A. Czech, D. Jama, *Ograniczoność rozwiązań pewnego równania parabolicznego na płaszczyźnie,* Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Mat.-Fiz. **43** (1985), 173-178.

[4] P. K. C. Wang, *Stability Analysis of a Simplifield Flexible Vehicle via Lyapunovs Direct Method,* AIAA Journ. **3**, **9** (1965), 1764-1766.

[5] G. S. Hsu, T. H. Leo, *A stability study of continous systems under parameter excitation via Lapunov direct method,* Symposium „Instability of continous systems", Springer, New York 1971.

Recenzent: Prof. dr hab. Janusz Szopa

Wpłynęło do redakcji 13.09.1994 r.

Abstract

Investigation of stability in Lapunow-Mowczan sense of the partial differential equations solutions has been a topic of my work. The equations are of type:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(t,x)u$$

where $L(t,x)$ is an operator containing partial derivatives in relation to t and partial derivatives of even range in relation to one-dimensional space variable x.

Initial boundary problem is considered. The purpose of the work is to obtain a priori estimation of solution norms in suitable Sobolev spaces by using energetic estimations. The stability of partial differential equations in Mowczan's definition sense which is a generalization of classic stability comprehension introduced by Lapunow. The equation solution is stable according to Mowczan if

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \| u \|_0 < \delta \iff \| u \|_1 < \varepsilon$$

where $\| u \|_0$ — the initial condition norm, $\| u \|_1$ — the solution norm.

The difference between Lapunow and Mowczan definitions lies in using (by Mowczan) different norms for the initial conditions and for the solution.

I will take a square root from the system's energy in the moment $t = 0$ as norms, and the norm of space as the solution norm.

One of them is initially-boundary problem of type:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for } x \in [0,1] \;\; t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,1) = 0 \qquad \text{for } t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x) \qquad \text{for } x \in [0,1] \tag{3}$$

where F, f, φ_1, φ_2 - are given functions definite for $t \geqslant 0$ and $x \in [0,1]$, u - searched function.

We search for a priori problem (1-3) solution of class $W^{4,2}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^{3,2}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1) \cap W^{2,2}(0,T)$ and we also investigate stability of equations of type

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) - c(t,x)u(t,x) - d(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \tag{4}$$

for $x \in [0,1]$, $t \geqslant 0$,
with the boundary and initial conditions

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \frac{\partial^3 u(t,0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(t,1)}{\partial x^3} = \frac{\partial^5 u(t,0)}{\partial x^5} = \frac{\partial^5 u(t,1)}{\partial x^5} = 0 \tag{5}$$

for $t \geqslant 0$,

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) \tag{6}$$

for $x \in [0,1]$,
where $a(x)$, $b(x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ given functions definite for $x \in [0,1]$, $t \geqslant 0$, $u(t,x)$ - unknown functions.