ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Danuta JAMA

PEWNE POŚREDNIE METODY ANALIZY STABILNOŚCI UKŁADÓW CIĄGŁYCH

Streszczenie. Przedmiotem moich badań są pewne jakościowe własności układów dynamicznych opisanych liniowymi układami równań różniczkowych cząstkowych o postaci:

1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + B(t,x))\, u(t,x),$$

2) $$u(0,x) = \varphi_0(x),$$

3) $$u(t,x) = h(x)\zeta(t) \qquad \text{dla } (t,x) \in \Gamma,$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(t,\zeta) \qquad f(t,0) = 0,$$

gdzie:

L_0 — jest $n \times n$-wymiarowym macierzowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych $x = (x_1, ..., x_n)$,

$B(t,x)$ — jest $n \times n$-wymiarową macierzą funkcyjną,

$h(x)$ — funkcja skalarowa,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $f(t,\zeta)$, $u(t,x)$ — funkcje wektorowe

oraz spełniony jest warunek zgodności warunku początkowego z warunkiem brzegowym w chwili $t = 0$.

$\Gamma = \langle 0, T) \times \partial D$ — boczna powierzchnia walca,

∂D — brzeg D, gdzie D – ograniczony, otwarty, spójny podzbiór n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$, $T \leqslant \infty$.

Przy następujących założeniach:

a) operator L_0 przy zerowym warunku brzegowym generuje silnie ciągłą półgrupę operatorów przejścia $\{\oint(t,\tau)\}$ oraz norma macierzy $\{\oint(t,\tau)\}$ spełnia oszacowanie wykładnicze o postaci:

$$\| \oint(t,x) \| \leqslant C \exp[-\gamma(t-\tau)] \qquad \text{dla } t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

C, γ – stałe dodatnie,

b) funkcja $f(t,\zeta)$ spełnia uogólniony warunek Lipschitza:

$$|f(t,\zeta_1) - f(t,\zeta_2)| \leqslant \alpha(t)|\zeta_1 - \zeta_2| \qquad \text{oraz } f(t,0) \equiv 0,$$

c)

$$\| \zeta(t) \| = |\zeta(t)| \qquad \text{gdzie } |\zeta(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2},$$

d)

$$\bigvee_{M_1, M_2 = \text{const}} \max \left[\| L_0 h(x) \|, \sup_{t \geqslant 0} \| B(t,x) h(x) \|, \| h(x) \| \right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

otrzymuję stabilność rozwiązania trywialnego badanego układu 1)–3) w sensie Lapunowa-Mowczana. Praca zawiera również wyniki dotyczące asymptotycznej stabilności rozwiązań badanego układu.

SOME INDIRECT METHODS OF ANALYSIS OF STABILITY OF CONTINUOUS SYSTEMS

Summary. Some qualitive properties of dynamical systems described by linear partial differential equations has been a topic of my research. The equations are:

1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + B(t,x))\, u(t,x),$$

2) $$u(0,x) = \varphi_0(x),$$

3) $$u(t,x) = h(x)\zeta(t) \qquad \text{for } (t,x) \in \Gamma,$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(t,\zeta) \qquad f(t,0) = 0$$

where:

L_0 — is an $n \times n$ dimensional matrix operator in relation to space variables $x = (x_1, ..., x_n)$,

$B(t,x)$ — is an $n \times n$ dimensional function matrix,

$h(x)$ — scalar function,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $f(t,\zeta)$, $u(t,x)$ — vector functions

and the condition of coincidence of the initial condition and the boundary condition is fulfilled in the moment $t = 0$.

$\Gamma = \langle 0, T\rangle \times \partial D$ — lateral surface of the cylinder,

∂D — the boundary D, where D - bounded, open, compact subset of space $\mathbb{R}^n$, $T \leqslant \infty$.

Under the following conditions:

a) The strong continuous semi-group of transition operators $\{\oint(t,\tau)\}$ is generated by the L_0 operator under the null boundary condition and the matrix norm $\{\oint(t,\tau)\}$ fulfils exponential estimation

$$\| \oint(t,x) \| \leqslant C \exp\left[-\gamma(t-\tau)\right] \qquad \text{for } t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

$C,\ \gamma > 0$,

b) the function $f(t,\zeta)$ fulfils generalized Lipschitz condition:

$$|f(t,\zeta_1) - f(t,\zeta_2)| \leqslant \alpha(t)|\zeta_1 - \zeta_2| \qquad \text{and } f(t,0) \equiv 0,$$

c)

$$\| \zeta(t) \| = |\zeta(t)| \qquad \text{where } |\zeta(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2},$$

d)

$$\bigvee_{M_1, M_2 = \mathrm{const}} \max\left[\| L_0 h(x) \|, \sup_{t \geqslant 0} \| B(t,x) h(x) \|, \| h(x) \|\right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

stability of the trivial solution of the investigated system 1)–3) in Lapunow-Mowczan sense is achieved. The results concerning asymptotic stability of solutions of the investigated system have also been included in the paper.

НЕКОТОРЫЕ ОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Резюме. Предметом моих исследований являюця некоторые качественные свойства динамических систем описанных линейными системами дифференциальных частных уравнений выражений:

1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + B(t,x))\,u(t,x),$$

2) $$u(0,x) = \varphi_0(x),$$

3) $$u(t,x) = h(x)\zeta(t) \qquad \text{для } (t,x) \in \Gamma,$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(t,\zeta) \qquad f(t,0) = 0$$

где:

L_0 — это $n \times n$ размерный матрический дифференциальный оператор относительно пространственных переменных $x = (x_1, ..., x_n)$,

$B(t,x)$ — это $n \times n$ размерная функционная матрица,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $f(t,\zeta)$, $u(t,x)$ — векторные функции

а также выполнено условие соотвецтвия начального условия с краевым условием во время $t = 0$.

$\Gamma = \langle 0, T\rangle \times \partial D$ — боковая поверхность цилиндра,

∂D — край D, где D – ограниценное, открытое, связное подмножество n-пазмерного пространства Эвклидогго $\mathbb{R}^n$, $T \leqslant \infty$.

При следующих предпосылках:

a) оператор при нолевом краевом условии генерует крепко непрерывную полугруппу операторов прохода $\{\oint(t,\tau)\}$ а также норма матрица $\{\oint(t,\tau)\}$ представляет показательную оцепку выражения

$$\| \oint(t,x) \| \leqslant C \exp[-\gamma(t-\tau)] \qquad \text{для } t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

C, $\gamma > 0$,

b) функция $f(t,\zeta)$ отвечает обобфенному условию Липшица:

$$|f(t,\zeta_1) - f(t,\zeta_2)| \leqslant \alpha(t)|\zeta_1 - \zeta_2| \qquad f(t,0) \equiv 0,$$

c)

$$\| \zeta(t) \| = |\zeta(t)| \qquad |\zeta(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2},$$

d)

$$\bigvee_{M_1,M_2=\mathrm{const}} \max\left[\| L_0h(x) \|, \sup_{t\geqslant 0} \| B(t,x)h(x) \|, \| h(x) \|\right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

получают устроичивоцть тривиального решения исследуемой системы 1)–3) в смысле Ляпунова-Мовчана. В паботе тоже поданы пезультаты касающиеця асимптотической устроичивости решений исследыемой системы.

Rozważania moje dotyczą jakościowych własności układów dynamicznych opisanych liniowym układem równań różniczkowych cząstkowych określonych w pewnym obszarze walcowym $\Omega = \langle 0, T\rangle \times D$ $n+1$ – wymiarowym o osi równoległej do osi czasowej, gdzie:

D – ograniczony, otwarty, spójny podzbiór n – wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$, $T < \infty$,

$\Gamma = \langle 0, T\rangle \times \partial D$ – boczna powierzchnia walca,

∂D – brzeg D,

G – podstawa walca leżąca w hiperpłaszczyźnie $t = 0$.

Funkcje skalarowe, wektorowe określone na Ω i $\partial\Omega$ są funkcjami przestrzeni Hilberta odpowiednio $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$.

Badania prowadzone są głównie w funkcyjnej przestrzeni wektorowej L^2 oraz w funkcyjnej przestrzeni skalarowej L^2.

Rozpatruję układ:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + B(t,x))\,u(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t,x) = h(x)\zeta(t) \qquad \text{dla } (t,x) \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(t,\zeta) \qquad f(t,0) = 0,$$

gdzie:

L_0 — jest $n \times n$ – wymiarowym macierzowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych $x = (x_1, ..., x_n)$,

$B(t,x)$ — jest $n \times n$ – wymiarową macierzą funkcyjną,

$h(x)$ — funkcja skalarowa,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $f(t,\zeta)$, $u(t,x)$ — funkcje wektorowe

Założenia podstawowe

A) zgodność warunku początkowego z warunkiem brzegowym w chwili $t = 0$,

B) operator L_0 przy zerowym warunku brzegowym generuje silnie ciągłą półgrupę operatorów przejścia $\{\oint(t,\tau)\}$, tzn. rozwiązanie układu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= (L_0 + B(t,x))\,u(t,x), \\ u(0,x) &= \varphi_0(x), \\ u(t,x) &= h(x)\zeta(t) \qquad \text{dla } (t,x) \in \Gamma, \end{aligned}$$

da się zapisać w postaci:

$$u(t,x) = \oint(t,0)\varphi_0(x)$$

oraz norma operatora $\{\oint(t,x)\}$ spełnia oszacowanie expotencjalne o postaci:

$$\| \oint(t,x) \| \leqslant C\exp[-\gamma(t-\tau)] \qquad \text{dla } t \geqslant \tau \geqslant 0, \tag{4}$$

C, γ – stałe dodatnie,

C) funkcja $f(t,\zeta)$ spełnia uogólniony warunek Lipschitza:

$$|f(t,\zeta_1) - f(t,\zeta_2)| \leqslant \alpha(t)|\zeta_1 - \zeta_2| \qquad \text{oraz } f(t,0) \equiv 0, \tag{5}$$

D)

$$\| \zeta(t) \| = |\zeta(t)| \qquad \text{gdzie } |\zeta(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2}. \tag{6}$$

Iloczyn dwóch funkcji wektorowych rozumiemy w sensie iloczynu skalarowego. Zakładam, że istnieje i jest jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia opisanego danym równaniem spełniającym zadane warunki brzegowe jak i początkowe.

Oceny rozwiązań dokonuję na podstawie pojęcia normy [4].
Indukowane normy są oznaczone przez $\|\cdot\|_i$ $(i = 1,2)$ czy też przez $\|\cdot\|$.
W badaniu stabilności rozwiązań układu posługuję się dwoma normami $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_2$ odpowiednio w przestrzeniach H_1, H_2 o następujących własnościach:

a) $\| u(t,x) \|_1$ oraz $\| u(t,x) \|$ są dla każdego $t \in \langle 0,T \rangle$ nieujemnymi liczbami rzeczywistymi,

b) $\| u(t,x) \|_2$ jest ciągła względem $\| u(t,x) \|_1$ w punkcie $t = 0$, tzn.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \| u(0,x) \|_1 < \delta \Longrightarrow \| u(0,x) \|_2 < \varepsilon.$$

Wprowadzenie dwóch norm do badania stabilności rozwiązań związane jest z różnymi charakterystykami procesów zachodzących w układach dynamicznych na początku i w czasie trwania ruchu. Korzystam z normy w przestrzeni L_2 o budowie:

$$\| u(t,x) \| = \sqrt{\int_D u^2(t,x)dx}.$$

Nie zmniejszając ogólności analizy przyjmuję, że układy równań posiadają rozwiązanie trywialne $u(t,x) = 0$.

Definicja 1. *Rozwiązanie $u(t,x) = 0$ równania jest stabilne względem warunku początkowego, jeżeli*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \| \varphi_0(x) \|_0 < \delta \Longrightarrow \bigwedge_{t\geqslant 0} \| u(t,x) \|_1 < \varepsilon.$$

Definicja 2. *Rozwiązanie $u(t,x) = 0$ równania jest asymptotycznie stabilne względem warunku początkowego, jeżeli jest stabilne względem warunku początkowego oraz*

$$\lim_{t\to\infty} \| u(t,x) \|_1 = 0.$$

Przy badaniu stabilności rozwiązania zerowego wykorzystuję półgrupowe własności rozwiązań liniowych [1, 4]. W dowodach twierdzeń korzystam z nierówności Gronwalla-Bellmana [2, 3].

Rozpatrzmy układ 1)–3).

Z warunku **A)** mamy:

$$\bigwedge_{x\in\partial D} h(x)\zeta(0) = \varphi_0(x).$$

Z warunku **C)** wynikają oszacowania:

$$\left|\frac{d\zeta(t)}{dt}\right| = |f(t,\zeta)| \leqslant \alpha(t)|\zeta(t)|, \tag{7}$$

$$|\zeta(t)| \leqslant |\zeta(0)| \exp \int_0^t \alpha(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Przyjmując

$$u(t,x) = w(t,x) + h(x)\zeta(t) \tag{9}$$

otrzymuję:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} &= (L_0 + B(t,x))\,w(t,x) - h(x)\frac{d\zeta(t)}{dt} + \\ &+ L_0 h(x)\zeta(t) + B(t,x)h(x)\zeta(t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\varphi_0(x) = w(0,x) + h(x)\zeta(0). \tag{11}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli spełnione są założenia podstawowe oraz*

a) *istnieją stałe M_1, M_2 takie, że*

$$\max\left[\| L_0 h(x) \|, \sup_{t\geqslant 0} \| B(t,x)h(x) \|, \| h(x) \|\right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

b) $\| B(t,x) \|$ *i* $\alpha(t)$ *są całkowalne dla* $t \in \langle 0, \infty)$,

to rozwiązanie trywialne układu (1)-(3) jest stabilne względem warunku początkowego w sensie Definicji 1.

Dowód. Korzystając z własności półgrupowych i przechodząc do normy z (10) otrzymuję nierówność całkową o postaci:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C\exp(-\gamma t) \| w(0,x) \| + C\int_0^t \| B(t,x) \| \| w(t,x) \| d\tau +$$

$$+ C\int_0^t \left[\exp(-\gamma(t-\tau)) \| L_0 h(x)\zeta(\tau) \| + \| B(t,x)h(x)\zeta(\tau) \| + \| h(x)\frac{d\zeta(t)}{dt}\right] d\tau.$$

Stosując uogólnioną nierówność Gronwalla-Bellmana otrzymuję:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C\exp(-\gamma t)\left\{ \| w(0,x) \| + C\int_0^t \exp\gamma\tau \left[\| L_0 h(x)\zeta(\tau) \| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \| B(t,x)h(x)\zeta(\tau) \| + \| h(x)\frac{\partial\zeta(\tau)}{\partial\tau} \| \right] d\tau \right\} \exp C\int_0^t \| B(t,x) \| d\tau.$$

Na mocy założenia **a)** mamy:

$$\| w(t,x) \| < C\exp(-\gamma t)\left\{ \| w(0,x) \| + \int_0^t \exp\gamma\tau \left[M_2(2 \| \zeta(\tau) \| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \| \frac{\partial\zeta(\tau)}{\partial\tau} \|)\right] d\tau \right\} \exp C\int_0^t \| B(t,x) \| d\tau. \tag{12}$$

Z założenia b) wynika, że istnieją takie stałe M_3, M_4, M_5, że dla każdego $t \in \langle 0, \infty)$

$$\exp\int_0^t \alpha(t)d\tau < M_4, \qquad |\alpha(t)| < M_3, \tag{13}$$

$$\int_0^t \| B(t,x) \| \, d\tau < M_5. \tag{14}$$

Z (13), (14) i (12) mamy:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C \Big\{ \| w(0,x) \| + \int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau)) \Big[M_2(2)\zeta(0)M_4 +$$

$$+ M_3(\zeta(0))M_4 \Big] d\tau \Big\} \exp C M_5. \tag{15}$$

Wykorzystując oszacowanie o postaci:

$$\int_0^t \exp\left(-\gamma(t-\tau)\right) d\tau < \frac{1}{\gamma}$$

oraz kładąc

$$M = \max \left\{ C \exp C M_5, \frac{C}{\gamma} \left(M_2 M_4 + M_2 M_3 M_4 \right) \exp C M_5 \right\},$$

z (15) otrzymuję:

$$\| w(t,x) \| \leqslant M \left[\| w(0,x) \| + |\zeta(0)| \right]. \tag{16}$$

Z (11) mamy:

$$\| w(0,x) \| = \| \varphi_0(x) - h(x)\zeta(0) \| \leqslant \| \varphi_0(x) \| + \| h(x) \| \, |\zeta(0)|. \tag{17}$$

Wykorzystując (9), (8), (13) oraz kładąc

$$k = M + (M + M_4) \, \| h(x) \|,$$

z uzyskanych nierówności (16) i (17) otrzymuję oszacowanie o postaci:

$$\| u(t,x) \| \leqslant k \left[\| \varphi_0(x) \| + |\zeta(0)| \right]. \tag{18}$$

Z założenia podstawowego **A)** mamy:

$$\| \varphi_0(x) \| = \| h(x)\zeta(0) \| . \tag{19}$$

Ponieważ

$$\| h(x)\zeta(0) \|^2 = \int_D h^2(x) \left(\zeta_1^2(0) + \ldots + \zeta_n^2(0) \right) dx =$$

$$= \left(\zeta_1^2(0) + \ldots + \zeta_n^2(0) \right) \int_D h^2(x) dx = |\zeta(0)|^2 \, \| h(x) \|^2, \tag{20}$$

więc z (20), (21) i założenia a) uzyskuję oszacowanie o postaci:

$$|\zeta(0)| \leqslant \frac{\| \varphi_0(x) \|}{M_1}. \tag{21}$$

Ostatecznie z (18) i (21) kładąc

$$k_0 = k\left(1 + \frac{1}{M_1}\right)$$

otrzymuję oszacowanie normy rozwiązania poprzez normę warunków początkowych o postaci:

$$\| u(t,x) \| \leqslant k_0 \| \varphi_0(x) \|$$

co kończy dowód twierdzenia.∎

Twierdzenie 2. *Jeśli spełnione są założenia podstawowe oraz*

a) *założenie* **a)** *twierdzenia 1,*

b) *istnieją stałe M_3, L, C takie, że dla każdego $t \geqslant 0$*

$$\alpha(t) < L < \infty, \tag{22}$$

$$\| B(t,x) \| \leqslant M_3, \tag{23}$$

$$\| \oint(t,\tau) \| \leqslant C, \tag{24}$$

to rozwiązanie trywialne układu (1)–(3) jest stabilne w przedziale skończonym $\langle 0,T\rangle$ dla dowolnego $T < \infty$ w sensie Definicji 1.

Dowód. Wykorzystując założenie podstawowe **C)** oraz założenie **b)** Twierdzenia 2 z (7), (8) i (22) otrzymuję:

$$|\zeta(t)| \leqslant |\zeta(0)| \exp Lt \leqslant |\zeta(0)| \exp LT \qquad \text{dla } t \leqslant T, \tag{25}$$

$$\left|\frac{d\zeta(t)}{dt}\right| = |f(t,\zeta)| \leqslant L|\zeta(0)| \exp LT. \tag{26}$$

Dokonując przekształceń analogicznych jak w dowodzie Twierdzenia 1 uzyskuję nierówność o postaci:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C\Bigg\{ \| w(0,x) \| + \int_0^t \exp\Big[M_2(2|\zeta(0)| \exp LT +$$

$$+ L|\zeta(0)| \exp LT\Big] d\tau \Bigg\} \exp M_3TC \tag{27}$$

Kładąc $M = \max\{2M_2 \exp LT, M_2 L \exp LT\}$ uzyskuję oszacowanie:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C\,[\| w(o,x) \| + 2M|\zeta(0)|M] \exp M_3 TC. \tag{28}$$

Prowadząc dalsze rozważania jak w dowodzie twierdzenia 1 otrzymuję tezę twierdzenia.∎

Twierdzenie 3. *Jeżeli*

a) *istnieją stałe γ, C_1, dla których:*

$$|\zeta(t)| \leqslant C_1 \exp(-\gamma t)|\zeta(0)|, \tag{29}$$

$$\left|\frac{d\zeta(t)}{dt}\right| \leqslant C_1 \exp(-\gamma t)|\zeta(0)|, \tag{30}$$

b) *spełnione są założenia podstawowe oraz*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \| B(\tau,x) \| \, d\tau < \frac{\gamma}{C}, \tag{31}$$

c) *spełnione jest założenie* a) *Twierdzenia 1,*

to rozwiązanie trywialne układu (1)–(3) jest asymptotycznie stabilne w sensie Definicji 2.

Dowód.
Postępując tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 1 otrzymujemy nierówność o postaci:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C \exp(-\gamma t)\,[\| w(0,x) \| + 3C_1|\zeta(0)|M_2 t] \exp C \int_0^t \| B(t,x) \| \, d\tau. \tag{32}$$

Z nierówności (32) mamy:

$$\| w(t,x) \| \leqslant C\,[\| w(0,x) \| + 3C_1 M_2|\zeta(0)|t] \exp Ct\left(\frac{-\gamma}{C} + \frac{1}{t}\int_0^t \| B(t,x) \| \, d\tau\right) \tag{33}$$

Wykorzystując założenie **b)** twierdzenia z (33) otrzymuję, że

$$\lim_{t\to\infty} \| w(t,x) \| = 0.$$

Z założeń podstawowych, założenia **a)** twierdzenia oraz (9) mamy:

$$\| u(t,x) \| \leqslant \| w(t,x) \| + \| h(x)\zeta(t) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| h(x) \| \, |\zeta(t)| + \| w(t,x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| h(x) \| C_1 \exp(-\gamma t)|\zeta(0)| + \| w(t,x) \|, \tag{34}$$

skąd otrzymujemy, że

$$\lim_{t\to\infty} \| u(t,x) \| = 0.$$

Na mocy założenia b) mamy

$$\exp Ct \left(\frac{-\gamma}{C} + \frac{1}{t} \int_0^t \| B(t,x) \| \, d\tau \right) < \bar{C} \tag{35}$$

gdzie C pewna stała dodatnia.

Z (34) i (35) otrzymujemy asymptotyczną stabilność w sensie Definicji 2.∎

Literatura

[1] N. Dunford, I. Schwartz, *Linear operators, Part II,* New York-London 1963.

[2] R. Bellman, *The Boundedness of Solutoins of Infinite Systems of Linear Differential Equations,* Duke Math. I. **14** (1947), 695-706.

[3] B. P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności,* Warszawa 1972.

[4] E. Hille, *Functional Analysis and Semigroups,* American Mathematical Sosiety, New York 1943.

[5] F. Kozin, *On the almost sure stability of linear systems with rondom coefficients,* Journal of Mathematic and Phyries. **42**, **1** (1963), 59-67.

Recenzent: Prof. dr hab. Janusz Szopa

Wpłynęło do redakcji 13.09.1994 r.

Abstract

Some qualitive properties of dynamical systems described by linear partial differential equations has been a topic of my research. The equations are:

1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_0 + B(t,x))\, u(t,x),$$

2) $$u(0,x) = \varphi_0(x),$$

3) $$u(t,x) = h(x)\zeta(t) \qquad \text{for } (t,x) \in \Gamma,$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(t,\zeta) \qquad f(t,0) = 0,$$

where:

L_0 — is an $n \times n$ dimensional matrix operator in relation to space variables $x = (x_1, ..., x_n)$,

$B(t,x)$ — is an $n \times n$ dimensional function matrix,

$h(x)$ — scalar function,

$\varphi_0(x)$, $\zeta(t)$, $f(t,\zeta)$, $u(t,x)$ — vector functions

and the condition of coincidence of the initial condition and the boundary condition is fulfilled in the moment $t = 0$.

$\Gamma = \langle 0, T\rangle \times \partial D$ — lateral surface of the cylinder,

∂D — the boundary D, where D – bounded, open, compact subset of space $\mathbb{R}^n$, $T \leqslant \infty$.

Under the following conditions:

a) The strong continuous semi-group of transition operators $\{\oint(t,\tau)\}$ is generated by the L_0 operator under the null boundary condition and the matrix norm $\{\oint(t,\tau)\}$ fulfils exponential estimation

$$\| \oint(t,x) \| \leqslant C \exp\left[-\gamma(t-\tau)\right] \qquad \text{for } t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

$C,\ \gamma > 0$,

b) the function $f(t,\zeta)$ fulfils generalized Lipschitz condition:

$$|f(t,\zeta_1) - f(t,\zeta_2)| \leqslant \alpha(t)|\zeta_1 - \zeta_2| \qquad \text{and } f(t,0) \equiv 0,$$

c)

$$\| \zeta(t) \| = |\zeta(t)| \qquad \text{where } |\zeta(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2},$$

d)

$$\bigvee_{M_1, M_2 = \text{const}} \max \left[\| L_0 h(x) \|, \sup_{t \geqslant 0} \| B(t,x) h(x) \|, \| h(x) \| \right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

stability of the trivial solution of the investigated system 1)–3) in Lapunow-Mowczan sense is achieved. The results concerning asymptotic stability of solutions of the investigated system have also been included in the paper.

The results of my work are the following theorems:

Theorem 1. *If the basic conditions are fulfilled and*

a) *the constants M_1, M_2 exist so that:*

$$\max \left[\| L_0 h(x) \|, \sup_{t \geqslant 0} \| B(t,x) h(x) \|, \| h(x) \| \right] < M_2,$$

$$\| h(x) \| > M_1 > 0,$$

b) $\| B(t,x) \|$ *i* $\alpha(t)$ *are integrable for* $t \in \langle 0, \infty)$

then the trivial solution of the (1-3) system is stable in Lapunow-Mowczan sense.

Theorem 2. *If the basic conditions are fulfilled and*

$$\begin{aligned} \alpha(t) < L &< \infty, \\ \| B(t,x) \| &\leqslant M_3, \\ \| \oint(t,\tau) \| &\leqslant C, \end{aligned}$$

the trivial solution of the (1-3) system is stable in the finite interval $\langle 0, T \rangle$.

Theorem 3. *If*

a) *the constants γ, C_1 exist so that:*

$$\begin{aligned} |\zeta(t)| &\leqslant C_1 \exp(-\gamma t) |\zeta(0)|, \\ \left| \frac{d\zeta(t)}{dt} \right| &\leqslant C_1 \exp(-\gamma t) |\zeta(0)|, \end{aligned}$$

b) *basic conditions are fulfilled and*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \| B(\tau, x) \| \, d\tau < \frac{\gamma}{C},$$

c) *the condition* a) *of theorem 1 is fulfilled,*

then the trivial solution of the (1-3) system is asymptotic stable.

The theory of strong continuous semi-groups generated by the L_0 operator and Gronwall-Bellman inequality were used in the proofs.