ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Olga MACEDOŃSKA, Witold TOMASZEWSKI

ON SYMMETRIC IDENTITIES IN GROUP VARIETIES

Summary. Let F be a free group generated by x, y. An identity of the form $w(x,y) = w(y,x)$ is called symmetric. A variety defined by symmetric identities is called symmetrically defined. We give several examples of symmetrically defined varieties.

SYMETRYCZNE TOŻSAMOŚCI W ROZMAITOŚCIACH GRUP

Streszczenie. Niech F oznacza grupę wolną rangi dwa generowaną przez x, y. Tożsamość o postaci $w(x,y) = w(y,x)$ nazywamy tożsamością symetryczną. Rozmaitość grup określoną przez tożsamości symetryczne nazywamy symetrycznie zadaną. W pracy podajemy przykłady symetrycznie zadanych rozmaitości.

СИМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВЯ В МНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП

Резюме. Пусть F свободная группа с двумя свободными образующми x, y. В этой роботе мы занимаемся тождествами вида $w(x,y) = w(y,x)$, которые мы называем симметрическими тождествами. Многообразия которые имеют базис из симметрических тождеств называются симметрическими. В роботе мы даём несколко примеров симетрических многообрази.

We note first that symmetric identities are in a close connection with fixed points of the automorphism σ interchanging generators in the corresponding 2-generator relatively free group, and with so called symmetric words. A word $w(x,y)$ is called symmetric [1] for a group G if for any $g, h \in G$, $w(g,h) = w(h,g)$. The variety of all abelian groups is defined by a symmetric identity, many important semigroup identities are symmetric identities. There are other reasons to study the symmetric identities.

We use in the text commutator notation $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Question 1. *Which varieties can be defined by symmetric identities?*

Example 1. *The Burnside variety of* $\exp n = 2k$ *is defined by the identity* $(xy^{-1})^k = (yx^{-1})^k$, *and for* $n = 2k+1$, *by* $(xy^{-1})^k x = (yx^{-1})^k y$.

Theorem 1. *The center-by-Burnside variety is defined by the symmetric identity* $(xy)^n = (yx)^n$.

Proof. The Burnside variety of exponent n is defined by the identity $[x^n, y] = 1$. We apply the automorphism which maps $x \to yx, y \to y$, and get the identity $[(yx)^n, y] = 1$ which can be written as $(yx)^{-n}y^{-1}(yx)^n y = 1$ or $(yx)^{-n}(xy)^n = 1$ which gives us the required symmetric identity $(xy)^n = (yx)^n$. □

Theorem 2. *If an identity* $v(x,y) = 1$ *can be written as* $w(x,y) = w(y,x)$, *then the identities* $[v,x] = 1$ *and* $[v,y] = 1$ *are equivalent.*

Proof. Since $v = w^{-1}w^{\sigma}$ implies $v^{\sigma} = v^{-1}$, we get (by applying σ) that the identity $[v,y] = 1$ is equivalent to $[v^{\sigma}, x] = 1$ which is $[v^{-1}, x] = 1$ and is equivalent (by conjugation) to $[v,x] = 1$ as required. □

Remark 1. *The identity* $[x,y^2] = 1$ *is equivalent to* $(xy)^2 = (yx)^2$ *and to* $[x,y^{-1}] = [y,x^{-1}]$.

Each identity of the form $[v, v^{\sigma}] = 1$ is equivalent to the symmetric identity $vv^{\sigma} = v^{\sigma}v$. The simplest example is $xy = yx$.

Question 2. *Which varieties are defined by an identity* $vv^{\sigma} = v^{\sigma}v$*?*

Example 2. *The variety of 2-Engel groups, usually defined by the commutator identity* $[[x,y],x] = 1$, *is defined by the symmetric identity* $xy^2x = yx^2y$ *of the type* $vv^{\sigma} = v^{\sigma}v$ *for* $v = xy$.

Proof. If we apply the automorphism which maps $x \to yx, y \to y$, and use the equality $[[yx,y],yx] = [xy,yx]$, then we get that the identity $[[x,y],x] = 1$ is equivalent to $[xy,yx] = 1$. which is $xy^2x = yx^2y$.□

In [3] there are given two semigroup identities defining the variety of 3-Engel groups, one of which is not symmetric. We show that 3-Engel variety can be defined by one symmetric identity.

Example 3. *The variety of 3-Engel groups* ($[[[y,x],x],x] = 1$) *is defined by the symmetric identity of the type* $vv^{\sigma} = v^{\sigma}v$ *for* $v = xyx^{-2}$.

Proof. We conjugate $[[[y,x],x],x]$ by x^{-1} and get $[[y,x,x]^{x^{-1}},x]]$ which (by equality $[a,x]^{x^{-1}} = [x^{-1},a])$ is $[[x^{-1},[y,x]],x]$. We apply now the automorphism, defined by $x \to yxy^{-2}, y \to y$ and note that:

$[y,x] \to yx^{-1}(yxy^{-2})$

$[x^{-1},[y,x]] \to xyx^{-2}yxy^{-2}$

$[[x^{-1},[y,x]],x] \to [xyx^{-2},yxy^{-2}]^{yxy^{-2}}$

So the initial identity is equivalent to the identity $[xyx^{-2},yxy^{-2}] = 1$, as required. □

Example 4. *The variety where each 2-generated group is metabelian is defined by the symmetric identity* $[x^{-1},y][y^{-1},x] = [y^{-1},x][x^{-1},y]$ *which is of the type* $vv^{\sigma} = v^{\sigma}v$ *for* $v = [x^{-1},y]$.

Proof. Accordingly to [2], the variety is defined by $[[x,y],[x^{-1}y]] = 1$. We apply the autumorphism, which maps $x \to yx^{-1}$ and $y \to y$, then the initial identity is equivalent to $[[yx^{-1},y],[xy^{-1},y]] = 1$, which is $[[x^{-1},y],[y^{-1},x]] = 1$, or $[x^{-1},y][y^{-1},x] = [y^{-1},x][x^{-1},y]$ as required. □

Theorem 3. *If G is a finite relatively free group, then it has a symmetric identity connected to each element $g \in G$.*

Proof. For any $g \in G$, if $g = g^{\sigma}$ it gives a symmetric identity. If $g \neq g^{\sigma}$, we consider $w = g^{-1}g^{\sigma}$. If $|w| = 2k$, then since $w^{-1} = w^{\sigma}$ we have the identity $w^k = (w^k)^{\sigma}$. If $|w| = 2k+1$, then similarly $g^{\sigma}w^k = (g^{\sigma}w^k)^{\sigma}$ as required. □

References

[1] E. Płonka, *Symmetric words in nilpotent groups of class* ≤ 3, Fundamenta Mathematicae **XCVII** (1977), 95-103.

[2] G. Higman, *Some remarks on varieties of groups,* Quart. J. Math. Oxford **(2)**, **10** (1959), 165-178.

[3] A.I. Shirshov, *On some positively defined varieties of groups (Russian),* Sib. Mat. J. **8**, **(2)** (1967), 1190-1192.

Recenzent: Dr hab. Władysław Kierat

Wpłynęło do redakcji 12.03.1993 r.

Streszczenie

Niech F będzie grupą wolną generowaną przez x i y i niech σ będzie automorfizmem grupy F zadanym przez permutację tworzących. Każdą tożsamość postaci $w(x,y) = w(y,x)$ nazywamy symetryczną tożsamością, a rozmaitość grup zadaną przez symetryczne tożsamości - rozmaitością symetrycznie zadaną. Zauważmy, że każda tożsamość o postaci $v^\sigma v = vv^\sigma$ jest również symetryczną tożsamością. Zatem można postawić dwa pytania:

Pytanie 1. Jakie rozmaitości są symetrycznie zadane?

Pytanie 2. Jakie rozmaitości są zadane przez symetryczne tożsamości postaci $v^\sigma v = vv^\sigma$?

W pracy podajemy przykłady rozmaitości, które posiadają symetryczne tożsamości:

1. Rozmaitość grup abelowych jest zadana przez tożsamość $xy = yx$;
2. Rozmaitość Burnside'a, która jest zadana przez tożsamość $x^n = 1$ jest również zadana przez tożsamość symetryczną: dla $n = 2k$ $(xy^{-1})^k = (yx^{-1})^k$, a dla $n = 2k+1$ - $(xy^{-1})^k x = (yx^{-1})^k y$;
3. Rozmaitość 2-engelowych grup jest zadana przez tożsamość $vv^\sigma = v^\sigma v$ dla $v = xy$;
4. Rozmaitość 3-engelowych grup jest zadana przez tożsamość $vv^\sigma = v^\sigma v$ dla $v = xyx^{-2}$;
5. Rozmaitość grup w których każda dwugenerowana podgrupa jest metabelowa, posiada symetryczną tożsamość $vv^\sigma = v^\sigma v$, gdzie $v = [x, y^{-1}]$;
6. Centralne rozszerzenie rozmaitości Burnside'a jest zdefiniowane przez tożsamość $(xy)^n = (yx)^n$.