ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Damian SŁOTA

MODEL NIESTANDARDOWY ANALIZY OPARTY NA DEFINICJACH CHWISTKA I LAUGWITZA

Streszczenie. W niniejszej pracy wprowadzono definicję liczb progresyjnych, głównego pojęcia niestandardowego modelu analizy zdefiniowanego przez Chwistka, który jest równoważny z modelem Laugwitza. Wykazane są własności algebraiczne modelu Chwistka i Laugwitza. Wprowadzone są pojęcia granicy i ciągłości funkcji rzeczywistych jednej zmiennej, które okazują się być równoważne z pojęciami klasycznymi. Podana jest także definicja liczb nieskończenie małych wraz z podstawowymi własnościami tych liczb.

THE NON-STANDARD MODEL OF CALCULUS BASED ON THE DEFINITIONS GIVEN BY CHWISTEK AND LAUGWITZ

Summary. In the paper, the definition of progressive numbers is given, the fundamental notion in the Chwistek construction of the non-standard model of Analysis, which is equivalent to the Laugwitz model. Algebraic properties of the Chwistek and Laugwitz model are shown. The notions of limit and continuity of real-valued functions of one variable are introduced. Moreover the definition of infinitesimals is given and their main properties are proved.

НЕСТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ ОСНОВАННАЯ НА ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ХВИСТКА И ЛЯУГВИЦА

Резюме. В этой статьи введено определение прогрессийных чисел, фундаментального понятия в конструкции Хвистка нестандартной модели анализа, которая эквибалентна могели Ляугвица. Доказаны алгебраические свойства модели Хвистка и Ляугвица. Введены понятия предела и непрерывности вещественных функций одной переменной, которые оказываются эквивалентными классическим понятиям. Представлено тоже определение бесконечно малых чисел и доказаны их свойства.

1. Wstęp

Zarówno Newton, jak i Leibniz określili podstawowe pojęcia analizy matematycznej używając pojęcia liczby nieskończenie małej. Nie podali oni przy tym żadnej definicji, opierając się jedynie na swojej intuicji i przekonaniu, że takie liczby istnieją.

Przez cały wiek XVIII analiza matematyczna rozwijała się na podstawie intuicji pochodzących z rachunku nieskończonych.

Wiek XIX przyniósł całkowite wyeliminowanie liczb nieskończenie małych, a stało się to za sprawą Cauchy'ego, który sprowadził podstawy analizy do pojęcia granicy, a także Weierstrassa, któremu zawdzięczamy formalizm „epsilonowo-deltowy".

W wieku XX zaczęły pojawiać się ponownie próby zdefiniowania pojęcia liczby nieskończenie małej. Jedną z nich podał Leon Chwistek w roku 1935 (zob. [2]). Równoważną definicję podał niezależnie, choć znacznie później, Detlef Laugwitz [3].

Za twórcę analizy niestandardowej uważa się Abrahama Robinsona, który w swych pracach z lat 1960–1966 zaprezentował podstawy teorii nieskończenie małych w oparciu o teorię modeli.

Metody analizy niestandardowej posłużyły nie tylko do uproszczenia dowodów klasycznych, ale przyczyniły się także do rozstrzygnięcia otwartych dotąd problemów. Najsłynniejszym z nich jest dowiedzione przez A. R. Bernsteina i A. Robinsona twierdzenie o istnieniu przestrzeni niezmienniczych dla operatorów wielomianowo zwartych.

Zastosowania metod analizy niestandardowej obejmują między innymi takie działy matematyki, jak: topologia, rachunek prawdopodobieństwa i teoria gier. Z dziedzin pozamatematycznych analiza niestandardowa znajduje zastosowania przede wszystkim w mechanice klasycznej, ale także w mechanice kwantowej i ekonomii.

W niniejszej pracy zaprezentowany zostanie model niestandardowy analizy oparty na definicjach Chwistka i Laugwitza. Model ten w ujęciu D. Laugwitza wymaga wprowadzenia pojęcia filtru Frechéta. L. Chwistek w swojej pracy nie używał tego pojęcia, opierając konstrukcję modelu na wprowadzonej w odpowiedni sposób relacji równoważności na ciągach liczb rzeczywistych. To elementarne ujęcie Chwistka będzie używane także w niniejszej pracy.

2. Podstawowe definicje

W zbiorze $\mathcal{K}$ wszystkich ciągów liczb rzeczywistych wprowadzimy relację dwuargumentową $\cong$.

Definicja 1. *Dwa ciągi liczb rzeczywistych (a_n) i (b_n) są równoważne, jeśli $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n = b_n$. Będziemy wtedy pisać $(a_n) \cong (b_n)$.*

Zachodzi następująca własność.

Własność 1. *Relacja $\cong$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathcal{K}$.*

Dowód. *i*) zwrotność:
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Ponieważ $a_n = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $(a_n) \cong (a_n)$.
ii) symetria:
Niech $(a_n) \cong (b_n)$. Wynika stąd, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n \geq n_0\ a_n = b_n$. Tak więc $b_n = a_n$ dla $n \geqslant n_0$. Oznacza to, że $(b_n) \cong (a_n)$.
iii) przechodniość:
Ponieważ $(a_n) \cong (b_n)$, więc $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ a_n = b_n$, a z drugiej strony $(b_n) \cong (c_n)$ oznacza, że $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_2\ \ b_n = c_n$. Biorąc $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dostaniemy $\forall n \geq n_0\ \ (a_n = b_n \wedge b_n = c_n)$, czyli $\forall n \geq n_0\ a_n = c_n$. Zatem $(a_n) \cong (c_n)$.$_\blacksquare$

Relacja ta rozbija nam rozważany zbiór na klasy abstrakcji. Klasę abstrakcji o reprezentancie (a_n) będziemy oznaczać $\widehat{a}_n$ i nazywać liczbą progresyjną wyznaczoną przez ciąg (a_n) lub, w skrócie, liczbą progresyjną. Liczbę progresyjną, wyznaczoną przez ciąg stały, przyjmujący wartość a, będziemy oznaczać przez $\widehat{a}$. W niektórych przypadkach dla prostoty zapisu będziemy używać oznaczeń $^*a_n$ i $^*a$. Liczby progresyjne wyznaczone przez różne ciągi stałe nie są równe, ponieważ wyrazy takich ciągów są różne.
Wprowadźmy oznaczenie $\mathbb{K} = \mathcal{K}/_{\cong}$.

Odwzorowanie, przyporządkowujące każdej liczbie rzeczywistej a liczbę progresyjną $\widehat{a}$, przedstawia zanurzenie zbioru liczb rzeczywistych w zbiorze liczb progresyjnych $\mathbb{K}$. Wprowadzimy teraz relację mniejszości w zbiorze $\mathbb{K}$.

Definicja 2. *Liczba progresyjna $\widehat{a}_n$ jest mniejsza od liczby progresyjnej $\widehat{b}_n$, jeśli $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n < b_n$. Będziemy wtedy pisać $\widehat{a}_n <_p \widehat{b}_n$.*

Przykład 1. Jeśli x jest dowolną liczbą rzeczywistą większą od zera, to $\widehat{a}_n >_p \widehat{x}$, gdy (a_n) jest takim ciągiem, że jego n-ty wyraz jest równy n, i $\widehat{b}_n <_p \widehat{x}$, gdy (b_n) jest takim ciągiem, że jego n-ty wyraz jest równy $1/n$.$_\blacksquare$

W zbiorze $\mathbb{K}$ wprowadzimy teraz działania.

Definicja 3. *Sumą dwóch liczb progresyjnych $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ będziemy nazywać liczbę progresyjną $\widehat{c}_n$, gdzie stale $c_n = a_n + b_n$.*

Uwaga 1. *Definicja sumy dwóch liczb progresyjnych jest poprawna.*

Dowód. Należy pokazać, że definicja ta jest niezależna od wyboru reprezentantów. Niech $(a_n) \cong (c_n)$ i $(b_n) \cong (d_n)$. Wówczas $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ \ a_n = c_n$ oraz $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2\ \ b_n = d_n$. Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dla tak dobranego n_0 mamy $\forall n \geq n_0\ (a_n = c_n \wedge b_n = d_n)$, zatem $\forall n \geq n_0\ \ a_n + b_n = c_n + d_n$, czyli $(a_n + b_n) \cong (c_n + d_n)$.∎

Definicja 4. *Różnicą dwóch liczb progresyjnych $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ będziemy nazywać liczbę progresyjną $\widehat{c}_n$, gdzie stale $c_n = a_n - b_n$.*

Definicja 5. *Iloczynem dwóch liczb progresyjnych $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ będziemy nazywać liczbę progresyjną $\widehat{c}_n$, gdzie stale $c_n = a_n \cdot b_n$.*

Dzielenie zdefiniujemy tylko w tych przypadkach, gdy dzielnik posiada reprezentanta o wyrazach różnych od zera.

Definicja 6. *Ilorazem liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ przez liczbę progresyjną $\widehat{b}_n$ o reprezentancie (b_n), którego wyrazy są różne od zera, nazywamy liczbę progresyjną $\widehat{c}_n$, gdzie stale $c_n = a_n / b_n$.*

Definicja powyższa stosuje się do wszystkich liczb progresyjnych $\widehat{b}_n$, gdy ciąg (b_n) ma skończoną liczbę wyrazów równych zero. Wystarczy w tym przypadku wartości ciągu (b_n) w miejscach zerowych zmienić na dowolną liczbę rzeczywistą różną od zera. Otrzymany w ten sposób ciąg jest w relacji $\cong$ z ciągiem (b_n), a więc jest reprezentantem liczby $\widehat{b}_n$ o wyrazach różnych od zera. Jeśli liczba progresyjna nie posiada reprezentanta o wyrazach różnych od zera, to każdy jej reprezentant musi przyjmować wartość zero w nieskończenie wielu punktach. Wszystkie takie liczby progresyjne będziemy nazywać pseudozerami. W myśl powyższego zero progresyjne, czyli $\widehat{0}$, jest pseudozerem. Innym przykładem pseudozera jest liczba progresyjna wyznaczona przez ciąg (a_n), gdzie $a_n = \sin(n \cdot \pi/2)$. Definicja ilorazu nie obejmuje przypadku, gdy dzielnik jest pseudozerem.

Poprawność definicji różnicy, iloczynu i ilorazu sprawdza się analogicznie do poprawności definicji sumy dwóch liczb progresyjnych.

Równość $\widehat{a}_n = \widehat{b}_n$ oznacza, że klasy abstrakcji wyznaczone przez ciągi (a_n) i (b_n) są identyczne.

Wprowadzimy teraz schemat pozwalający przedłużać dowolne funkcje rzeczywiste, określone na całej prostej, do funkcji określonych na zbiorze $\mathbb{K}$.

Definicja 7. *Jeśli f jest funkcją rzeczywistą określoną na całej prostej, to przyporządkowujemy jej funkcję $f_p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, spełniającą równość $f_p(\widehat{a}_n) = \widehat{f(a_n)}$.*

W równości z powyższej definicji z prawej strony mamy liczbę progresyjną wyznaczoną przez ciąg wartości funkcji f w punktach a_n, natomiast z lewej strony - liczbę progresyjną, będącą obrazem liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ poprzez odwzorowanie f_p.

Uwaga 2. *Definicja 7 jest poprawna.*

Dowód. Musimy pokazać, że definicja ta nie zależy od wyboru reprezentantów. Niech $(a_n) \cong (b_n)$. Wówczas $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n = b_n$, ale wtedy także $\forall n \geq n_0\ f(a_n) = f(b_n)$, czyli $\widehat{f(a_n)} = \widehat{f(b_n)}$, a to oznacza, że $f_p(\widehat{a}_n) = f_p(\widehat{b}_n)$.∎

Przykład 2. Niech $f(x) =\mid x \mid$ dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy wtedy $f_p(\widehat{a}_n) = \widehat{f(a_n)} = \widehat{\mid a_n \mid}$ dla $\widehat{a}_n \in \mathbb{K}$. W tym przypadku zamiast $f_p(\widehat{a}_n)$ będziemy pisać $\mid \widehat{a}_n \mid_p$. Indeks p będziemy opuszczać, gdy nie będzie to prowadzić do nieporozumień.∎

Definicja 8. *Liczbę $\widehat{b}_n$ nazywać będziemy nieskończenie wielką, a liczbę $\widehat{c}_n$ nieskończenie małą, jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej x większej od zera zachodzi:*

$$\mid \widehat{b}_n \mid_p >_p \widehat{x},$$

$$\mid \widehat{c}_n \mid_p <_p \widehat{x}.$$

Natomiast liczbę $\widehat{a}_n$ nazywać będziemy liczbą skończoną, jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$, takie że

$$\mid \widehat{a}_n \mid_p <_p \widehat{M}.$$

Przykład 3. Z Przykładu 1 wynika, że $\widehat{a}_n$, gdzie (a_n) jest takim ciągiem, że jego n-ty wyraz jest równy n, jest liczbą nieskończenie wielką. Natomiast $\widehat{b}_n$, gdzie (b_n) jest ciągiem o n-tym wyrazie równym $1/n$, jest liczbą nieskończenie małą.∎

3. Własności algebraiczne

Sprawdzimy teraz, czy zbiór $\mathbb{K}$ z działaniami i relacją mniejszości określonymi poprzednio spełnia aksjomaty ciała uporządkowanego.

Definicja 9. *System* $(L, +, \cdot, <, 0, 1)$ *nazywamy ciałem uporządkowanym, jeśli spełnione są warunki:*

$\forall a, b, c \in L$

1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$,
3) $a + 0 = a$,
4) *istnieje dokładnie jedno* $d \in L$, *takie że* $a + d = b$,
5) $a \cdot b = b \cdot a$,
6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
7) $a \cdot 1 = a$,
8) *jeśli* $a \neq 0$, *to istnieje dokładnie jedno* $d \in L$, *takie że* $a \cdot d = b$,
9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
10) $\neg(0 = 1)$,
11) $\neg(a < a)$,
12) *jeśli* $a < b$ *i* $b < c$, *to* $a < c$,
13) $a < b$ *albo* $b < a$ *albo* $a = b$,
14) *jeśli* $a < b$, *to* $a + c < b + c$,
15) *jeśli* $a < b$ *i* $c > 0$, *to* $a \cdot c < b \cdot c$.

Będziemy teraz sprawdzać, czy w naszym przypadku aksjomaty te są spełnione. Niech $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{c}_n$ będą dowolnymi liczbami progresyjnymi.

1) Mamy $\widehat{a}_n + \widehat{b}_n = {}^*(a_n + b_n)$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + b_n = b_n + a_n$, więc ${}^*(a_n + b_n) = {}^*(b_n + a_n)$, czyli $\widehat{a}_n + \widehat{b}_n = \widehat{b}_n + \widehat{a}_n$.

2) Mamy $\widehat{a}_n + (\widehat{b}_n + \widehat{c}_n) = \widehat{a}_n + {}^*(b_n + c_n) = {}^*(a_n + (b_n + c_n))$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n$, więc ${}^*(a_n + (b_n + c_n)) = {}^*((a_n + b_n) + c_n)$, czyli $\widehat{a}_n + (\widehat{b}_n + \widehat{c}_n) = (\widehat{a}_n + \widehat{b}_n) + \widehat{c}_n$.

3) Zerem w naszym przypadku jest liczba progresyjna $\widehat{0}$. Mamy $\widehat{a}_n + \widehat{0} = {}^*(a_n + 0)$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + 0 = a_n$, więc ${}^*(a_n + 0) = \widehat{a}_n$, czyli $\widehat{a}_n + \widehat{0} = \widehat{a}_n$.

4) Przyjmijmy $\widehat{d}_n = {}^*(b_n - a_n)$. Wówczas $\widehat{a}_n + \widehat{d}_n = {}^*(a_n + d_n) = {}^*(a_n + b_n - a_n)$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + b_n - a_n = b_n$, więc ${}^*(a_n + b_n - a_n) = \widehat{b}_n$, czyli $\widehat{a}_n + \widehat{d}_n = \widehat{b}_n$. Pozostaje do wykazania jedyność takiej liczby. Niech $\widehat{d}_n$ i $\widehat{e}_n$ będą takie,że $\widehat{a}_n + \widehat{d}_n = \widehat{b}_n$

i $\widehat{a}_n + \widehat{e}_n = \widehat{b}_n$. Ponieważ dla dowolnej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n - \widehat{a}_n = \widehat{0}$, więc odejmując stronami poprzednie dwie równości dostaniemy, $\widehat{d}_n - \widehat{e}_n = \widehat{0}$. Tak więc liczby progresyjne $\widehat{d}_n$ i $\widehat{e}_n$ są sobie równe.

5) Mamy $\widehat{a}_n \cdot \widehat{b}_n = {}^*(a_n \cdot b_n)$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \cdot b_n = b_n \cdot a_n$, więc ${}^*(a_n \cdot b_n) = {}^*(b_n \cdot a_n)$, czyli $\widehat{a}_n \cdot \widehat{b}_n = \widehat{b}_n \cdot \widehat{a}_n$.

6) Mamy $\widehat{a}_n \cdot (\widehat{b}_n \cdot \widehat{c}_n) = \widehat{a}_n \cdot {}^*(b_n \cdot c_n) = {}^*(a_n \cdot (b_n \cdot c_n))$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \cdot (b_n \cdot c_n) = (a_n \cdot b_n) \cdot c_n$, więc ${}^*(a_n \cdot (b_n \cdot c_n)) = {}^*((a_n \cdot b_n) \cdot c_n)$, czyli $\widehat{a}_n \cdot (\widehat{b}_n \cdot \widehat{c}_n) = (\widehat{a}_n \cdot \widehat{b}_n) \cdot \widehat{c}_n$.

7) Jedynką w naszym przypadku jest liczba progresyjna $\widehat{1}$. Mamy $\widehat{a}_n \cdot \widehat{1} = {}^*(a_n \cdot 1)$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \cdot 1 = a_n$, więc ${}^*(a_n \cdot 1) = \widehat{a}_n$, czyli $\widehat{a}_n \cdot \widehat{1} = \widehat{a}_n$.

9) Mamy $\widehat{a}_n \cdot (\widehat{b}_n + \widehat{c}_n) = {}^*(a_n \cdot (b_n + c_n))$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \cdot (b_n + c_n) = a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n$, więc ${}^*(a_n \cdot (b_n + c_n)) = {}^*(a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n)$, czyli $\widehat{a}_n \cdot (\widehat{b}_n + \widehat{c}_n) = \widehat{a}_n \cdot \widehat{b}_n + \widehat{a}_n \cdot \widehat{c}_n$.

10) Nie jest możliwa równość $\widehat{0} = \widehat{1}$, ponieważ $\widehat{0}$ jest wyznaczone przez ciąg stały równy zero, a $\widehat{1}$ jest wyznaczone przez ciąg stały równy jeden.

11) Gdyby istniała liczba progresyjna $\widehat{a}_n$, taka że $\widehat{a}_n <_p \widehat{a}_n$, to istniałoby $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n \geq n_0\ a_n < a_n$, ale ponieważ teraz jest to relacja mniejszości w ciele liczb rzeczywistych, więc dostalibyśmy sprzeczność.

12) Jeśli $\widehat{a}_n <_p \widehat{b}_n$ i $\widehat{b}_n <_p \widehat{c}_n$, to $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ a_n < b_n$ oraz $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2\ b_n < c_n$. Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wówczas $\forall n \geq n_0\ (a_n < b_n \wedge b_n < c_n)$, a więc $\forall n \geq n_0\ a_n < c_n$, czyli $\widehat{a}_n <_p \widehat{c}_n$.

14) Jeśli $\widehat{a}_n <_p \widehat{b}_n$, to $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n < b_n$. Wówczas także $\forall n \geq n_0\ a_n + c_n < b_n + c_n$, czyli $\widehat{a}_n + \widehat{c}_n <_p \widehat{b}_n + \widehat{c}_n$.

15) Jeśli $\widehat{0} <_p \widehat{c}_n$ i $\widehat{a}_n <_p \widehat{b}_n$, to $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ a_n < b_n$ oraz $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2\ 0 < c_n$. Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wówczas $\forall n \geq n_0\ (a_n < b_n \wedge 0 < c_n)$, a więc $\forall n \geq n_0\ a_n \cdot c_n < b_n \cdot c_n$, czyli $\widehat{a}_n \cdot \widehat{c}_n <_p \widehat{b}_n \cdot \widehat{c}_n$.

Pokażemy teraz, że aksjomaty 8 i 13 nie są spełnione.

8) Niech (a_n) będzie ciągiem zdefiniowanym następująco:

$$a_n = \begin{cases} 0 & gdy\ \ n\ jest\ parzyste, \\ 1 & gdy\ \ n\ jest\ nieparzyste. \end{cases}$$

Oczywiście wtedy $\widehat{a}_n \neq \widehat{0}$. Równanie $\widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n = \widehat{1}$ nie posiada rozwiązania. Gdyby $\widehat{d}_n$ spełniało to równanie, to dla każdego nieparzystego n musiałoby zachodzić $0 \cdot d_n = 1$ w ciele liczb rzeczywistych, co jest niemożliwe.

Warunek z aksjomatu jest spełniony, gdy co najwyżej skończona liczba wyrazów ciągu (a_n) jest równa zeru. Istnieje wtedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie,że $a_n \neq 0$ dla każdego $n \geq n_0$. Przyjmijmy:

$$d_n = \begin{cases} b_n/a_n & dla \quad n \geq n_0, \\ 1 & dla \quad n < n_0. \end{cases}$$

Mamy wtedy $\widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n = *(a_n \cdot d_n)$, a ponieważ $\forall n \geq n_0 \ \ a_n \cdot d_n = b_n$, więc $\widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n = \widehat{b}_n$. Pozostaje do wykazania jedyność takiej liczby. Niech $\widehat{d}_n$ i $\widehat{e}_n$ będą takimi liczbami, że $\widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n = \widehat{b}_n$ i $\widehat{a}_n \cdot \widehat{e}_n = \widehat{b}_n$. Ponieważ ciąg (a_n) ma skończoną liczbę zer, więc $\widehat{a}_n/\widehat{a}_n = \widehat{1}$. Porównując poprzednie dwie równości dostajemy:

$$\begin{gathered} \widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n = \widehat{a}_n \cdot \widehat{e}_n, \\ \frac{\widehat{1}}{\widehat{a}_n} \cdot \left(\widehat{a}_n \cdot \widehat{d}_n\right) = \frac{\widehat{1}}{\widehat{a}_n} \cdot \left(\widehat{a}_n \cdot \widehat{e}_n\right), \\ \left(\frac{\widehat{1}}{\widehat{a}_n} \cdot \widehat{a}_n\right) \cdot \widehat{d}_n = \left(\frac{\widehat{1}}{\widehat{a}_n} \cdot \widehat{a}_n\right) \cdot \widehat{e}_n, \\ \frac{\widehat{a}_n}{\widehat{a}_n} \cdot \widehat{d}_n = \frac{\widehat{a}_n}{\widehat{a}_n} \cdot \widehat{e}_n, \\ \widehat{1} \cdot \widehat{d}_n = \widehat{1} \cdot \widehat{e}_n, \\ \widehat{d}_n = \widehat{e}_n. \end{gathered}$$

Tak więc liczby progresyjne $\widehat{d}_n$ i $\widehat{e}_n$ są sobie równe.

13) Niech $b_n = (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Liczby $\widehat{b}_n$ nie można porównać z $\widehat{0}$. Gdyby było $\widehat{b}_n = \widehat{0}$, to mielibyśmy $b_n = 0$ dla dostatecznie dużych n, co jest niemożliwe, bo dla dowolnego n mamy $b_n \neq 0$. Nie zachodzi także nierówność $\widehat{b}_n <_p \widehat{0}$ (ani $\widehat{0} <_p \widehat{b}_n$), bo gdyby zachodziła, mielibyśmy $b_n < 0$ ($b_n > 0$) dla dostatecznie dużych n.

Sumując otrzymane rezultaty możemy napisać twierdzenie.

Twierdzenie 2. *System* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <_p, \widehat{0}, \widehat{1})$ *nie jest ciałem uporządkowanym, natomiast system* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \widehat{0}, \widehat{1})$ *jest pierścieniem przemiennym z jedynką, zawierającym dzielniki zera.* ∎

4. Definicja Chwistka granicy i funkcji ciągłej

Wprowadzimy teraz pojęcie granicy. Na początek zdefiniujemy nieskończoną bliskość dwóch liczb progresyjnych.

Definicja 10. *Dwie liczby progresyjne $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ są nieskończenie bliskie, jeśli różnica ich jest liczbą nieskończenie małą. Będziemy wtedy pisać $\widehat{a}_n \simeq \widehat{b}_n$.*

Przykład 4. Liczby progresyjne $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$, gdzie $a_n = n$ i $b_n = (n^2+1)/n$ są nieskończenie bliskie, ponieważ $b_n - a_n = 1/n$.∎

Definicja 11. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, a f_p jej przedłużeniem do zbioru $\mathbb{K}$. Jeśli dla dowolnej nieskończenie małej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ zachodzi:*

$$f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{g},$$

to mówimy, że funkcja f posiada w punkcie x granicę równą g. Jeśli dla dowolnej nieskończenie wielkiej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ zachodzi:

$$f_p(\widehat{a}_n) \simeq \widehat{g},$$

to mówimy, że funkcja f posiada w nieskończoności granicę równą g.

Przykład 5. *Zdefinujmy funkcję $f(x)$ wzorem:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \neq 0, \\ 1 & dla \quad x = 0. \end{cases}$$

Wykażemy, że funkcja ta nie posiada granicy w zerze w sensie Definicji 11. Pokażemy najpierw, że nie może nią być żadna liczba rzeczywista b różna od zera. Przypuśćmy, że $f_p(\widehat{0} + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{b}$ dla dowolnej nieskończenie małej $\widehat{a}_n$. Niech $a_n = 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\widehat{a}_n$ jest nieskończenie małą. Ponieważ $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, więc $f(a_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, czyli ${}^*f(a_n) = \widehat{0}$, a stąd $f_p(\widehat{a}_n) = {}^*f(a_n) = \widehat{0}$. Gdyby granica ta istniała, to mielibyśmy $\widehat{0} \simeq \widehat{b}$, co jest niemożliwe. Pozostaje wykazać, że zero też nie może być tą granicą. Weźmy liczbę $\widehat{0}$. Jest to liczba nieskończenie mała. Mamy $f_p(\widehat{0}) = {}^*f(0) = \widehat{1}$. Tak jak poprzednio z istnienia granicy dostajemy sprzeczność, bo niemożliwe jest, żeby $\widehat{1} = f_p(\widehat{0}) \simeq \widehat{0}$.∎

Przykład ten pokazuje, że Definicja 11 podana przez Chwistka jest węższa od definicji standardowej. Zmodyfikujmy tę definicję przyjmując założenie, że nieskończona bliskość zachodzi dla dowolnej nieskończenie malej liczby progresyjnej różnej od pseudozera.

Definicja 12. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, a f_p jej przedłużeniem na zbiór $\mathbb{K}$. Jeśli dla dowolnej nieskończenie małej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ różnej od pseudozera zachodzi:*

$$f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{g},$$

to mówimy, że funkcja f posiada w punkcie x granicę równą g. Jeśli dla dowolnej nieskończenie wielkiej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ zachodzi:

$$f_p(\widehat{a}_n) \simeq \widehat{g},$$

to mówimy, że funkcja f posiada w nieskończoności granicę równą g.

Przy tej definicji granicy funkcja z Przykładu 5 ma granicę w zerze równą zero. W dalszych rozważaniach, jeśli będziemy mówić o granicy funkcji, to będziemy rozumieć ją w sensie Definicji 12. Pokażemy, że pojęcie granicy funkcji w sensie tej definicji jest bardziej naturalne, ponieważ pokrywa się ze standardowym pojęciem granicy funkcji, podczas gdy definicja Chwistka granicy funkcji jest równoważna poniższej definicji ciągłości (zob. Własność 3).

Definicja 13. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, a f_p jej przedłużeniem na zbiór $\mathbb{K}$. Jeśli dla dowolnej nieskończenie małej liczby progresyjnej $\widehat{a}_n$ zachodzi:*

$$f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) \simeq f_p(\widehat{x}),$$

to mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x.

Tym razem założenie spełnienia warunku dla dowolnej nieskończenie małej nie prowadzi do zaskakujących wyników. Wykażemy, że pojęcie granicy w sensie Definicji 11 jest równoważne pojęciu ciągłości funkcji wprowadzonemu Definicją 13.

Własność 3. *Funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ w sensie Definicji 11 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w tym punkcie w sensie Definicji 13.*

Dowód. $\Rightarrow$ Załóżmy, że f ma granicę w punkcie x_0 w sensie Definicji 11, czyli dla dowolnej nieskończenie małej $\widehat{a}_n$ zachodzi $f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{g}$, gdzie $g \in \mathbb{R}$. Wobec tego $f_p(\widehat{x}_0) = f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{0}) \simeq \widehat{g} \simeq f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{a}_n)$ dla dowolnej nieskończenie małej $\widehat{a}_n$, czyli f jest ciągła w punkcie x_0.

$\Leftarrow$ Dla dowolnej nieskończenie małej $\widehat{a}_n$ mamy:

$$f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{a}_n) \simeq f_p(\widehat{x}_0).$$

Ponieważ $f_p(\widehat{x}_0) = {}^*f(x_0)$, więc przyjmując $g = f(x_0)$ dostaniemy:

$$f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{g}. \blacksquare$$

Zajmiemy się obecnie pojęciem ciągłości funkcji.

Twierdzenie 4. *Funkcja rzeczywista f jest ciągła w metryce naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w sensie Definicji 13.*

Dowód. $\Rightarrow$ Ustalmy $a \in \mathbb{R}$. Mamy implikację

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | b - a | < \delta \;\Rightarrow\; | f(b) - f(a) | < \varepsilon.$$

Jeśli $\widehat{a}_n \simeq \widehat{0}$, to $\widehat{a}_n + \widehat{a} \simeq \widehat{a}$, czyli $\forall \delta > 0 \quad | \widehat{a} + \widehat{a}_n - \widehat{a} |_p <_p \widehat{\delta}$. Zatem $| f_p(\widehat{a} + \widehat{a}_n) - f_p(\widehat{a}) |_p <_p \widehat{\varepsilon}$ dla każdego $\varepsilon > 0$, czyli $f_p(\widehat{a} + \widehat{a}_n) - f_p(\widehat{a}) \simeq \widehat{0}$. Ostatecznie

$$f_p(\widehat{a} + \widehat{a}_n) \simeq f_p(\widehat{a}).$$

$\Leftarrow$ Przypuśćmy, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie a. Oznacza to, że

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in \mathbb{R} \quad | x_n - a | < \frac{1}{n} \;\wedge\; | f(x_n) - f(a) | \geq \varepsilon.$$

Ponieważ $^*(x_n - a)$ jest nieskończenie małą, więc z założenia mamy: $f_p(\widehat{a} + {}^*(x_n - a)) \simeq f_p(\widehat{a})$. Dlatego

$$\widehat{\varepsilon} \geqslant | f_p(\widehat{a} + {}^*(x_n - a)) - f_p(\widehat{a}) |_p = | {}^*f(a + x_n - a) - {}^*f(a) |_p =$$

$$= {}^*(| f(x_n) - f(a) |),$$

co jest sprzeczne z założeniem.$\blacksquare$

5. Nieskończenie małe

Przez $\mathbb{K}_0$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich elementów nieskończenie małych należących do zbioru $\mathbb{K}$, a przez $\mathbb{K}_1$ zbiór wszystkich skończonych elementów zbioru $\mathbb{K}$. Łatwo sprawdzić, że zbiór $\mathbb{K}_1$ jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{K}$. Pokażemy, że zbiór $\mathbb{K}_0$ jest ideałem pierścienia $\mathbb{K}_1$, który nie jest maksymalny.

Zbiór $\mathbb{K}_0$ jest zamknięty ze względu na działania dodawania i mnożenia. Jest więc podpierścieniem pierścienia $\mathbb{K}_1$. Aby wykazać, że jest to ideał pierścienia $\mathbb{K}_1$ wobec przemienności mnożenia, wystarczy dowieść, że $x \cdot \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{K}_1$.

Załóżmy, że $\widehat{x}_n \in \mathbb{K}_1$, czyli istnieje liczba $b \in \mathbb{R}_+$ taką, że $| \widehat{x}_n | < \widehat{b}$. Niech dalej $\widehat{a}_n \in \mathbb{K}_0$ i $d \in \mathbb{R}_+$. Wówczas $\exists n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_1 \quad | a_n | < d/b$ oraz $\exists n_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_2 \quad | x_n | < b$. Przyjmując $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dostajemy $| x_n \cdot a_n | < b \cdot d/b = d$ dla $n \geqslant n_0$, czyli $| {}^*(x_n \cdot a_n) | < \widehat{d}$. Z dowolności d i $\widehat{a}_n$ dostajemy szukany rezultat.

Wykażemy teraz, że nie jest to ideał maksymalny. W tym celu przyjmijmy $\lambda_n = (1 + (-1)^n)/2$, oraz $I = \left\{x + \widehat{\lambda}_n \cdot y \;:\; x \in \mathbb{K}_0, y \in \mathbb{K}_1\right\}$. Oczywiście $\mathbb{K}_0 \subset I$ (wystarczy przyjąć $y = 0$). Równość nie zachodzi, ponieważ $\widehat{\lambda}_n \in I \setminus \mathbb{K}_0$. Zbiór I jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{K}_1$. Pokażemy, że jest to ideał. Niech $z \in \mathbb{K}_1$ i $x + \widehat{\lambda}_n \cdot y \in I$ dla pewnych $x \in \mathbb{K}_0$ i $y \in \mathbb{K}_1$. Wówczas $z \cdot (x + \widehat{\lambda}_n \cdot y) = z \cdot x + \widehat{\lambda}_n \cdot y \cdot z \in I$, bo $\mathbb{K}_1$ jest pierścieniem, a $\mathbb{K}_0$ ideałem. Jest to oczywiście ideał właściwy, bo np. $\widehat{2} \in \mathbb{K}_1 \setminus I$.

Znaleźliśmy ideał właściwy, w którym $\mathbb{K}_0$ zawiera się w sposób istotny, a więc $\mathbb{K}_0$ nie jest ideałem maksymalnym.

Przez N_p będziemy oznaczać zbiór tych klas abstrakcji relacji $\simeq$, które są wyznaczone przez ciągi o wyrazach naturalnych. Nieskończone elementy tego zbioru będziemy nazywać nieskończonymi naturalnymi liczbami progresyjnymi lub krócej – nieskończonymi liczbami naturalnymi. Zbiór N_p będziemy nazywać zbiorem naturalnych liczb progresyjnych. Podamy teraz definicje monady punktu, która uprości zapis w wielu sytuacjach.

Definicja 14. *Jeśli $\widehat{x}_n \in \mathbb{K}$, to przez mon x_n będziemy oznaczać zbiór $\{\ \widehat{y}_n \in \mathbb{K} : \widehat{y}_n \simeq \widehat{x}_n\}$.*

Jeśli $\widehat{a}_n \simeq \widehat{0}$, to $\widehat{x}_n + \widehat{a}_n \in mon\ x$. Załóżmy teraz, że $\widehat{y}_n \in mon\ x$. Wówczas istnieje $\widehat{a}_n \simeq \widehat{0}$, takie że $\widehat{y}_n = \widehat{x}_n + \widehat{a}_n$ (wystarczy przyjąć $\widehat{a}_n = \widehat{y}_n - \widehat{x}_n$), co pozwala przy badaniu ciągłości funkcji w punkcie x badać zachowanie się funkcji w punktach z $mon\, x$. Natomiast przyjęcie oznaczenia

$$\{x\}_0 := \{\widehat{y}_n \in \mathbb{K} : \widehat{y}_n - \widehat{x} \text{ jest pseudozerem}\},$$

pozwoli przy badaniu granicy funkcji w punkcie x ograniczyć się do zbioru $mon\ x \setminus \{x\}_0$.

Definicja 15. *Jeśli istnieje $a \in \mathbb{R}$, takie że $\widehat{a} \in mon\ x_n$, to będziemy mówić, że $\widehat{x}_n$ ma część standardową równą a.*

Część standardowa, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie. Z definicji monady wynika następujący wniosek.

Wniosek 3. *Jeśli liczby progresyjne $\widehat{x}_n$ i $\widehat{y}_n$ mają części standardowe równe odpowiednio a i b, to liczba $\widehat{x}_n + \widehat{y}_n$ ma część standardową równą $a + b$.* ∎

Podamy teraz kilka własności liczb progresyjnych, z których będziemy korzystać w przyszłości. Oczywista jest pierwsza z nich, a także wniosek z niej wynikający.

Własność 5. *Jeśli x jest nieskończenie małą liczbą progresyjną, to każdy jej reprezentant tworzy ciąg zbieżny do zera (w sensie standardowym).* ∎

Wniosek 4. *Jeśli liczba progresyjna $\widehat{a}_n$ ma część standardową równą a, to ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w sensie standardowym do a.*■

Własność 6. *Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a i dowolnej nieskończenie małej liczby progresyjnej $\widehat{x}_n$ mamy $\widehat{a} + \widehat{x}_n > \widehat{0}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie, czyli dla pewnych a i $\widehat{x}_n$ spełniających założenia jest $\widehat{a} + \widehat{x}_n \leqslant \widehat{0}$. Wówczas $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad a + x_n \leqslant 0$. Mamy stąd $0 < a = a + x_n - x_n \leqslant -x_n$, czyli $|\, a \,|\leqslant|\, x_n \,|$, wbrew temu, że $\widehat{x_n}$ jest liczbą nieskończenie małą.■

Własność 7. *Jeśli $\widehat{0} \leqslant \widehat{a}_n \leqslant \widehat{b}_n$ i $\widehat{b}_n \simeq \widehat{0}$, to również $\widehat{a}_n \simeq \widehat{0}$.*■

Własność 8. *Jeśli $\widehat{x}_n$ i $\widehat{y}_n$ są liczbami progresyjnymi, takimi że $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$ i $\widehat{y}_n \geqslant \widehat{0}$, to $\widehat{x}_n \geqslant \widehat{0}$.*■

Własność 9. *Niech $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n$ będą liczbami progresyjnymi, takimi że $\widehat{a}_n \simeq \widehat{b}_n$. Wówczas dla każdej liczby progresyjnej skończonej $\widehat{r}_n$ mamy:*

$$\widehat{a}_n \cdot \widehat{r}_n \simeq \widehat{b}_n \cdot \widehat{r}_n.$$

Dowód. Z założenia istnieje $M > 0$, takie że $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\, r_n \,| \leqslant M$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n > n_0 \quad |\, a_n - b_n \,| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Stąd

$$|\, r_n \cdot a_n - r_n \cdot b_n \,| = |\, r_n \,| \cdot |\, a_n - b_n \,| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

a więc $\widehat{r}_n \cdot \widehat{a}_n \simeq \widehat{r}_n \cdot \widehat{b}_n$.■

Własność 10. *Jeśli $\widehat{a}_n$ jest liczbą progresyjną skończoną, to istnieje podciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, taki że liczba $\widehat{a}_{n_k}$ ma część standardową.*

Dowód. Z założenia ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Niech $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ będzie podciągiem zbieżnym ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Niech jego granicą będzie $a \in \mathbb{R}$. Mamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall k \geqslant k_0 \quad |\, a_{n_k} - a \,| \leqslant \varepsilon.$$

Oznacza to już, że $\widehat{a}_{n_k} \simeq \widehat{a}$.■

Z Wniosku 4 wynika, że powyższa własność jest niestandardową wersją twierdzenia Bolzano-Weierstrassa.

Własność 11. *Niech $\hat{x}_n$ będzie liczbą skończoną nie mającą części standardowej. Wówczas z ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać dwa podciągi zbieżne w $\mathbb{R}$ do różnych liczb.*

Dowód. Z poprzedniej własności istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny w $\mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{N} \setminus \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ musi być nieskończony, bo przeczyłoby to założeniu nieposiadania części standardowej. Elementy tego zbioru oznaczmy przez $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Wówczas liczba $\hat{x}_{n_l}$ jest skończoną liczbą progresyjną. Korzystając ponownie z Własności 10 możemy wybrać podciąg $(x_{n_{l_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ zbieżny do innej liczby niż podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.■

Własność 12. *Jeśli $\hat{a}_n$ jest nieskończoną liczbą progresyjną, to*

$$\lim_{n\to\infty} | a_n | = \infty. \blacksquare$$

Natychmiastową konsekwencją tej własności jest następujący wniosek.

Wniosek 5. *Jeśli $\hat{a}_n$ jest nieskończoną liczbą progresyjną, to istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$.*■

Literatura

[1] J. Błahut, *Wybrane zagadnienia analizy (ujęcie niestandardowe)*, Skrypt Pol. Śl. 1405, Gliwice 1988.

[2] L. Chwistek, *Granice nauki*, Księżnica Atlas, Lwów 1935.

[3] D. Laugwitz, *The Theory of Infinitesimals. An Introduction to Nonstandard Analysis*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1980.

Recenzent: Dr hab. Władysław Kierat

Wpłynęło do redakcji 15.10.1993 r.

Abstract

In the paper, a non-standard model of Calculus is presented, based on the definitions given by Leon Chwistek, which is formally different but equivalent to the model constructed by Detlef Laugwitz. The construction of Laugwitz's model requires the notion of Fréchet filter. Leon Chwistek, who was the first author of non-standard models, founded his construction on an equivalence relation of sequences of real numbers. Theis elementary approach of Chwistek is used in the paper. The classesdetermined by a certain equivalence relation are called, after Chwistek, progressive numbers. Operations and inequalities on progressive numbers are introduced and their properties are studied. In particular, it is proved that the ring of progressive numbers has divisors of zero and the introduced order is only partial. The mutual relations between notions of limit and continuity of functions are discussed. Moreover the definition of infinitesimals is given and their main properties are proved.