ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 72 Nr kol. 1279

Damian SŁOTA

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY W MODELU NIESTANDARDOWYM CHWISTKA I LAUGWITZA

Streszczenie. W niniejszej pracy zaprezentowano niestandardowe charakteryzacje, w modelu Chwistka i Laugwitza [4], podstawowych pojęć rachunku różniczkowego, takich jak: granica ciągu liczbowego, jednostajna ciągłość i różniczkowalność funkcji. Następnie na podstawie tych charakteryzacji dowiedziono podstawowe własności wymienionych pojęć.

THE DIFFERENTIAL CALCULUS IN THE NON-STANDARD MODEL OF CHWISTEK AND LAUGWITZ

Summary. In the paper, non-standard characterizations in the Chwistek and Laugwitz model of the fundamental notions of differential calculus are given: limit of a numerical sequences, uniform countinuity and differentiability of functions. On the base of these characterizations, main properties of the above mentioned notions are proved.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В НЕСТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ ХВИСТКА И ЛЯУГВИЦА

Резюме. В этой статьи представлены в модели Хвистка и Ляугвица нестандартные характеризации фундаментальных понятий дифференциального исчисления, таких как предел численных последовательностей, а также равномерная непрерывность и дифференцируемость функций. Отсюда выведены главные свойства этих понятий.

1. Funkcje zmiennej rzeczywistej

Niniejsza praca oparta jest na definicji modelu niestandardowego analizy zaprezentowanej w [4]. W pracy [4] określiliśmy przedłużenie na zbiór $\mathbb{K}$ tylko dla funkcji określonych na całej prostej, teraz będziemy chcieli pojęcie to rozszerzyć na funkcje o dziedzinie zawartej w $\mathbb{R}$.

Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ przyjmiemy $A_p = \{\widehat{x}_n : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in A\}$.

Definicja 1. *Jeśli f jest funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze A, to przyporządkowujemy jej funkcję $f_p : A_p \to \mathbb{K}$, spełniającą równość $f_p(\widehat{a}_n) = {}^*f(a_n)$.*

Powyższa definicja wymaga modyfikacji definicji granicy i ciągłości funkcji w ujęciu Chwistka: warunki podane w definicjach mają zachodzić dla tych nieskończenie małych a, dla których $x + a \in A_p$ (w przypadku granicy dodatkowo różnych od pseudozera).

Wykażemy teraz trzy własności, z których będziemy korzystać w przyszłości.

Własność 1. *Dla dowolnych liczb progresyjnych $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ mamy:*

$$| \widehat{a}_n + \widehat{b}_n |_p \leqslant | \widehat{a}_n |_p + | \widehat{b}_n |_p,$$

$$\Big| \, | \widehat{a}_n |_p - | \widehat{b}_n |_p \, \Big|_p \leqslant \Big| \widehat{a}_n - \widehat{b}_n \Big|_p .$$

Dowód. Niech $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ będą dowolnymi liczbami progresyjnymi.

(i) Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N} \quad | a_n + b_n | \leqslant | a_n | + | b_n |$, więc

$$| \widehat{a}_n + \widehat{b}_n |_p \leqslant | \widehat{a}_n |_p + | \widehat{b}_n |_p .$$

(ii) Z drugiej strony $| \widehat{a}_n |_p = | \widehat{a}_n - \widehat{b}_n + \widehat{b}_n |_p \leqslant | \widehat{a}_n - \widehat{b}_n |_p + | \widehat{b}_n |_p$, skąd $| \widehat{a}_n |_p - | \widehat{b}_n |_p \leqslant | \widehat{a}_n - \widehat{b}_n |_p$. Zamieniając rolami $\widehat{a}_n$ i $\widehat{b}_n$ dostajemy także $-(| \widehat{a}_n |_p - | \widehat{b}_n |_p) \leqslant | \widehat{a}_n - \widehat{b}_n |_p$. Z tych dwu nierówności otrzymujemy drugą z nierówności

$$\Big| \, | \widehat{a}_n |_p - | \widehat{b}_n |_p \, \Big|_p \leqslant \Big| \widehat{a}_n - \widehat{b}_n \Big|_p . \blacksquare$$

Własność 2. *Jeśli $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ i $g(B) \subseteq A$, to $(f \circ g)_p = f_p \circ g_p$.*

Dowód. Korzystając z definicji, otrzymujemy:

$$(f \circ g)_p(\widehat{a}_n) = {}^*((f \circ g)(a_n)) = {}^*(f(g(a_n))) = f_p({}^*g(a_n)) =$$

$$= f_p(g_p(\widehat{a}_n)) = (f_p \circ g_p)(\widehat{a}_n). \blacksquare$$

Własność 3. *Jeśli $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ i $\forall x \in A \quad f(x) \leqslant g(x)$, to $\forall \widehat{y}_n \in A_p \ f_p(\widehat{y}_n) \leqslant g_p(\widehat{y}_n)$.*

Dowód. Niech $\widehat{y}_n \in A_p$. Ponieważ $\forall n \in \mathbb{N} \ f(y_n) \leqslant g(y_n)$, więc $f_p(\widehat{y}_n) \leqslant g_p(\widehat{y}_n)$. $\blacksquare$

1.1. Ciągi liczbowe

Ciąg liczb rzeczywistych $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest funkcją $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Możemy rozpatrywać jej przedłużenie do zbioru liczb progresyjnych $s_p : \mathbb{N}_p \to \mathbb{K}$. Dla $\widehat{a}_n \in \mathbb{N}_p$ mamy:

$$s_p(\widehat{a}_n) = \widehat{s}(a_n) = \widehat{s_{a_n}}.$$

Twierdzenie 4. *Ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych jest zbieżny do a wtedy i tylko wtedy, gdy $s_p(\nu) \simeq \widehat{a}$ dla każdej nieskończonej liczby naturalnej ν.*

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $\widehat{a}_n$ będzie nieskończoną liczbą naturalną. Ponieważ $a_n \longrightarrow \infty$, więc $s_{a_n} \longrightarrow a$. Dlatego $s_p(\widehat{a}_n) \simeq \widehat{a}$.

$\Leftarrow$ Niech $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n = n$. Wówczas $\widehat{a}_n$ jest nieskończoną liczbą naturalną. Z założenia mamy $s_p(\widehat{a}_n) \simeq \widehat{a}$. Biorąc dowolne $\varepsilon > 0$, z definicji nieskończonej bliskości dostajemy:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |\, s_{a_n} - a \,| < \varepsilon.$$

Korzystając z definicji ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy tezę.∎

Twierdzenie 5. *Punkt a jest punktem skupienia ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_p(\nu) \simeq \widehat{a}$ dla pewnego nieskończonego naturalnego ν.*

Dowód. $\Rightarrow$ Załóżmy, że x jest punktem skupienia ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas istnieje podciąg $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $s_{n_k} \longrightarrow a$. Oznaczmy $t_k = s_{n_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Z poprzedniego twierdzenia $t_p(\nu) \simeq \widehat{a}$ dla każdej nieskończonej liczby naturalnej ν. Mamy:

$$s_p(\widehat{n}_k) = \widehat{s}(n_k) = \widehat{t}_k \simeq \widehat{a}.$$

Stąd już dostajemy tezę, ponieważ $\widehat{n}_k$ jest nieskończenie wielką liczbą naturalną (jako podciąg ciągu liczb naturalnych).

$\Leftarrow$ Niech $\widehat{a}_n$ będzie nieskończenie wielką liczbą naturalną, taką że $s_p(\widehat{a}_n) \simeq \widehat{a}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są różne. Weźmy $\varepsilon > 0$. Z założenia

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad |\, s_{a_n} - a \,| < \varepsilon,$$

czyli podciąg $(s_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do a.∎

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że ciągi standardowe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne odpowiednio do L i M. Wówczas*

$$s_n \pm t_n \longrightarrow L \pm M,$$

$$s_n \cdot t_n \longrightarrow L \cdot M,$$

a jeśli $M \neq 0$, to także

$$\frac{s_n}{t_n} \longrightarrow \frac{L}{M}.$$

Dowód. Dla nieskończonego ν mamy $s_p(\nu) \simeq \widehat{L}$ i $t_p(\nu) \simeq \widehat{M}$, czyli

$$s_p(\nu) \pm t_p(\nu) \simeq \widehat{L} \pm \widehat{M},$$

$$s_p(\nu) \cdot t_p(\nu) \simeq \widehat{L} \cdot \widehat{M}.$$

Ponieważ M jest rzeczywiste i różne od zara, więc $\widehat{M}$ jest skończone i różne od pseudozera. Dlatego $t_p(\nu)$ jest skończone i różne od pseudozera także dla nieskończonych ν. Mamy więc

$$\frac{1}{t_p(\nu)} \simeq \frac{1}{\widehat{M}},$$

a stąd

$$\frac{s_p(\nu)}{t_p(\nu)} = s_p(\nu) \cdot \frac{1}{t_p(\nu)} \simeq \widehat{L} \cdot \frac{1}{\widehat{M}} = \frac{\widehat{L}}{\widehat{M}}. \blacksquare$$

1.2. Własności granicy funkcji

W paragrafie tym będziemy zakładać, że funkcje f, g i h są określone na zbiorze A i przyjmują wartości rzeczywiste, a x jest takim punktem zbioru A, że $mon\, x \subset A_p$.

Twierdzenie 7. *Jeśli f i g mają granicę w punkcie x równą odpowiednio f_0 i g_0, to:*
$f + g$ ma granicę w punkcie x równą $f_0 + g_0$,
$f - g$ ma granicę w punkcie x równą $f_0 - g_0$,
$f \cdot g$ ma granicę w punkcie x równą $f_0 \cdot g_0$,
f/g ma granicę w punkcie x równą f_0/g_0, przy dodatkowym założeniu, że $g_0 \neq 0$.

Dowód. Ponieważ $f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{f}_0$ i $g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) \simeq \widehat{g}_0$ dla wszystkich nieskończenie małych $\widehat{a}_n$ różnych od pseudozera i takich, że $\widehat{x} + \widehat{a}_n \in A_p$, więc

$$\begin{aligned} &|\,(f_p + g_p)(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - {}^*(f_0 + g_0)\,| = \\ &= |\, f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{f}_0 + g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{g}_0)\,| \leqslant \\ &\leqslant |\, f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{f}_0\,| + |\, g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{g}_0\,| \simeq \widehat{0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &|\,(f_p \cdot g_p)(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - {}^*(f_0 \cdot g_0)\,| = \\ &= |\,(f_p \cdot g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{f}_0 \cdot g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) + \widehat{f}_0 \cdot g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{f}_0 \cdot \widehat{g}_0)\,| \leqslant \\ &\leqslant |\, g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n)\,| \cdot |\, f_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{f}_0\,| + \\ &+ |\,\widehat{f}_0\,| \cdot |\, g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n) - \widehat{g}_0\,| \simeq \widehat{0}, \end{aligned}$$

co dowodzi tezy dla sumy i iloczynu. Ostatnia relacja wynika stąd, że $|g_p(\widehat{x} + \widehat{a}_n)|$ i $|\widehat{f}_0|$ są skończone. Teza dla różnicy jest konsekwencją równości $f - g = f + (-1) \cdot g$ i udowodnionej już części twierdzenia.

Mamy wreszcie:

$$\left|\frac{f_p}{g_p}(\hat{x}+\hat{a}_n)-{}^*\!\left(\frac{f_0}{g_0}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{f_p}{g_p}(\hat{x}+\hat{a}_n)-\frac{f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)}{\hat{g}_0}+\frac{f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)}{\hat{g}_0}-{}^*\!\left(\frac{f_0}{g_0}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant|f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)|\cdot\left|\frac{1}{g_p(\hat{x}+\hat{a}_n)}-\frac{1}{\hat{g}_0}\right|+\left|\frac{1}{\hat{g}_0}\right|\cdot|f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)-\hat{f}_0|=$$

$$=|f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)|\cdot\left|\frac{\hat{g}_0-g_p(\hat{x}+\hat{a}_n)}{g_p(\hat{x}+\hat{a}_n)\cdot\hat{g}_0}\right|+\left|\frac{1}{\hat{g}_0}\right|\cdot|f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)-\hat{f}_0|\simeq\hat{0}.\blacksquare$$

Twierdzenie 8. *Jeśli f i g mają granicę w punkcie x równą odpowiednio f_0 i g_0 oraz $\forall x\in A\ \ f(x)\leqslant g(x)$, to $f_0\leqslant g_0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest na odwrót, czyli $\hat{f}_0>\hat{g}_0$. Mamy wtedy dla dowolnej nieskończenie małej $\hat{a}_n$ różnej od pseudozera

$$\hat{0}\leqslant|\hat{f}_0-\hat{g}_0|=\hat{f}_0-\hat{g}_0\leqslant$$

$$\leqslant g_p(\hat{x}+\hat{a}_n)-f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)+\hat{f}_0-\hat{g}_0=$$

$$=(g_p(\hat{x}+\hat{a}_n)-\hat{g}_0)-(f_p(\hat{x}+\hat{a}_n)-\hat{f}_0).$$

Ponieważ prawa strona jest liczbą nieskończenie małą, więc $\hat{f}_0\simeq\hat{g}_0$, czyli $f_0=g_0$ wbrew przypuszczeniu.$\blacksquare$

Twierdzenie 9 (o trzech funkcjach)
Jeśli f, g i h spełniają dla każdego $x\in A$ nierówność $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ oraz f i h mają granicę w punkcie x równą a, to g ma granicę w punkcie x równą a.

Dowód. Z założenia $\forall\hat{y}_n\in\mathbb{K}\quad f_p(\hat{y}_n)\leqslant g_p(\hat{y}_n)\leqslant h_p(\hat{y}_n)$. Stąd

$$\hat{0}\leqslant g_p(\hat{y}_n)-f_p(\hat{y}_n)\leqslant h_p(\hat{y}_n)-f_p(\hat{y}_n)=(h_p(\hat{y}_n)-\hat{a})-(f_p(\hat{y}_n)-\hat{a})\simeq\hat{0}$$

dla $\hat{y}_n\in mon\ x\setminus\{x\}_0$, a w konsekwencji

$$\hat{0}\leqslant|g_p(\hat{y}_n)-\hat{a}|\leqslant|g_p(\hat{y}_n)-f_p(\hat{y}_n)|+|f_p(\hat{y}_n)-\hat{a}|\simeq\hat{0}.\blacksquare$$

1.3. Podstawowe własności funkcji ciągłych

Zajmiemy się teraz podstawowymi własnościami funkcji ciągłych.

Twierdzenie 10. *Jeśli f i g są ciągłe w punkcie x, to również $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ są ciągłe w punkcie x oraz przy dodatkowym założeniu, że $g \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu x, f/g jest ciągła w punkcie x.*

Dowód. Ustalmy $\widehat{y}_n \in mon\ x$. Z założenia mamy $f_p(\widehat{y}_n) \simeq f_p(\widehat{x})$ i $g_p(\widehat{y}_n) \simeq g_p(\widehat{x})$. Dostajemy stąd

$$|\,(f+g)_p(\widehat{y}_n) - (f+g)_p(\widehat{x})\,| \leqslant |\,f_p(\widehat{y}_n) - f_p(\widehat{x})\,| + |\,g_p(\widehat{y}_n) - g_p(\widehat{x})\,| \simeq \widehat{0},$$

czyli $f+g$ jest ciągła. Dalej mamy:

$$|\,(f\cdot g)_p(\widehat{y}_n) - (f\cdot g)_p(\widehat{x})\,| \leqslant |\,f_p(\widehat{y}_n)\,|\cdot|\,g_p(\widehat{y}_n) - g_p(\widehat{x})\,| +$$

$$+\,|\,g_p(\widehat{x})\,|\cdot|\,f_p(\widehat{y}_n) - f_p(\widehat{x})\,| \simeq \widehat{0}$$

oraz

$$\left|\left(\frac{f}{g}\right)_p(\widehat{y}_n) - \left(\frac{f}{g}\right)_p(\widehat{x})\right| = \left|\frac{f_p(\widehat{y}_n)\cdot g_p(\widehat{x}) - f_p(\widehat{x})\cdot g_p(\widehat{y}_n)}{g_p(\widehat{y}_n)\cdot g_p(\widehat{x})}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\,g_p(\widehat{y}_n)\,|}\cdot|\,f_p(\widehat{y}_n) - f_p(\widehat{x})\,| + \frac{|\,f_p(\widehat{x})\,|}{|\,g_p(\widehat{y}_n)\cdot g_p(\widehat{x})\,|}\cdot|\,g_p(\widehat{x}) - g_p(\widehat{y}_n)\,| \simeq \widehat{0}.$$

Ciągłość różnicy wynika z ciągłości sumy i iloczynu. ∎

Twierdzenie 11. *Jeśli $g : B \to \mathbb{R}$ ma granicę w punkcie a równą x, przy czym $x \in A$ i $mon\ x \subset A_p$, a $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w punkcie x, to funkcja $f\circ g$ ma granicę w punkcie a równą $f(x)$.*

Dowód. Ustalmy $\widehat{y}_n \in mon\ a \setminus \{a\}_0 \cap B_p$. Z założenia $g_p(\widehat{y}_n) \simeq \widehat{x}$, a stąd i z ciągłości f w punkcie x dostajemy $f_p(g_p(\widehat{y}_n)) \simeq f_p(\widehat{x})$, czyli $(f\circ g)_p(\widehat{y}_n) \simeq f_p(\widehat{x})$. ∎

Twierdzenie 12. *Jeśli funkcja g jest ciągła w punkcie x, funkcja f jest ciągła w punkcie $g(x)$, to funkcja $\varphi = f\circ g$ jest ciągła w punkcie x.*

Dowód. Niech $\widehat{a}_n \simeq \widehat{x}$. Z założenia $g_p(\widehat{a}_n) \simeq g_p(\widehat{x})$. Na mocy ciągłości funkcji f dostajemy $f_p(g_p(\widehat{a}_n)) \simeq f_p(g_p(\widehat{x}))$, wobec czego $\varphi_p(\widehat{a}_n) \simeq \varphi_p(\widehat{x})$. ∎

Własność 13. *Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x, to funkcja $|f|$ też jest ciągła w punkcie x.*

Dowód. Mamy $|f|_p(\widehat{y}_n) = |f_p(\widehat{y}_n)|_p \ \forall \widehat{y}_n \in A_p$. Niech $\widehat{y}_n \simeq \widehat{x}$. Wykorzystując założenie dostajemy:

$$\begin{aligned}\widehat{0} \leqslant \Big|\, |f|_p(\widehat{y}_n) - |f|_p(\widehat{x}) \,\Big|_p &= \\ = \Big|\, |f_p(\widehat{y}_n)|_p - |f_p(\widehat{x})|_p \,\Big|_p &\leqslant \\ \leqslant \Big| f_p(\widehat{y}_n) - f_p(\widehat{x}) \Big|_p &\simeq \widehat{0}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Twierdzenie 14. *Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n \in [a,b]_p$, takich że $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$ zachodzi $f_p(\widehat{x}_n) \simeq f_p(\widehat{y}_n)$.*

Dowód. $\Leftarrow$ Przypuśćmy, że f nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje wówczas $\varepsilon > 0$, takie że

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n, y_n \in [a,b] \quad |\, x_n - y_n \,| < 1/n \ \wedge\ |\, f(x_n) - f(y_n) \,| \geqslant \varepsilon.$$

Wtedy $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$ i $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n \in [a,b]_p$, czyli na mocy założenia $f_p(\widehat{x}_n) \simeq f_p(\widehat{y}_n)$. Dostajemy stąd

$$\widehat{0} \simeq |fp(\widehat{x}_n) - f_p(\widehat{y}_n)|_p = |{}^*(f(x_n) - f(y_n))|_p = {}^*|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \widehat{\varepsilon},$$

co jest niemożliwe.

$\Rightarrow$ Przypuśćmy, że warunek w twierdzeniu nie zachodzi. Istnieją więc $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n \in [a,b]_p$, takie że $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$ i $f_p(\widehat{x}_n) \not\simeq f_p(\widehat{y}_n)$. Oznacza to, iż istnieje $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+$, takie że $|\, f_p(\widehat{x}_n) - f_p(\widehat{y}_n) \,| \geqslant \widehat{\varepsilon}_1$. Z definicji relacji mniejszości istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad |\, f(x_n) - f(y_n) \,| \geqslant \varepsilon_1.$$

Ponieważ przy tym $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$, więc można wybrać z ciągu liczb naturalnych taki podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, by były spełnione nierówności:

$$\begin{array}{ll}(i) & |\, x_{n_k} - y_{n_k} \,| < 1/k, \\ (ii) & |\, f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \,| \geqslant \varepsilon_1\end{array}$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, ale jest to sprzeczne z założoną jednostajną ciągłością funkcji f. $\blacksquare$

Twierdzenie 15. *Jeśli f jest ciągla na $[a,b]$, to jest ona jednostajnie ciągła na $[a,b]$.*

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją więc $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n \in [a,b]_p$, takie że $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$ i $f_p(\widehat{x}_n) \not\simeq f_p(\widehat{y}_n)$. Oznacza to, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz podciągi $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}, (y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ odpowiednio ciągów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, takie że

$$\widehat{x}_{n_m}, \widehat{y}_{n_m} \in [a,b]_p \ \wedge\ |\, f_p(\widehat{x}_{n_m}) - f_p(\widehat{y}_{n_m}) \,| > \widehat{\frac{1}{k}}. \tag{$*$}$$

Ciągi $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}, (y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ są ciągami ograniczonymi, można więc wybrać z nich podciągi zbieżne

$$x_{n_{m_k}} \longrightarrow x,$$

$$y_{n_{m_k}} \longrightarrow y.$$

Ponieważ $\widehat{x}_n \simeq \widehat{y}_n$, więc i $\widehat{x}_{n_{m_k}} \simeq \widehat{y}_{n_{m_k}}$. Zatem z jednoznaczności części standardowej $x = y$. Z ciągłości dostajemy:

$$f_p(\widehat{x}_{n_{m_k}}) \simeq f_p(\widehat{x}) \simeq f_p(\widehat{y}_{n_{m_k}}),$$

co jest sprzeczne z $(*)$.∎

Twierdzenie 16 (Weierstrassa)
Funkcja ciągła $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona oraz osiąga swoje kresy.

Dowód. Gdyby f nie była ograniczona, to istniałyby liczby $x_n \in [a,b]$, takie że $\mid f(x_n) \mid \geqslant n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawiera podciąg zbieżny $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Załóżmy, że jego granicą jest x_0. Wówczas liczba progresyjna utworzona przez ten podciąg należy do $mon x_0$, a liczba $f_p(\widehat{x}_{n_k})$ jest nieskończona. Z ciągłości funkcji f mamy $f_p(\widehat{x}_{n_k}) - f_p(\widehat{x}_0) \simeq \widehat{0}$. Ponieważ $f(x_0)$ jest skończone, więc i $f_p(\widehat{x}_0)$ jest skończone. Stąd $f_p(\widehat{x}_{n_k})$ jest skończone, co przeczy poprzednio wyprowadzonemu wnioskowi. Wykazaliśmy więc, że funkcja f jest ograniczona.

Dowiedziemy teraz drugiej części tezy. Zdefiniujmy teraz x_n, tak by

$$x_n \in \left\{ a + \frac{k}{n}(b-a) \; : \; k = 0, ..., n \right\}$$

oraz

$$f(x_n) = \max\left\{ f(\, a + \frac{k}{n}(b-a)\,) \; : \; k = 0, ..., n \right\}.$$

Istnieje podciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ([4], Własności 10) ciągu liczb naturalnych, taki że $\widehat{x}_{n_k} \in mon\; x_0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Wynika stąd już, że

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

W przeciwnym razie istniałby punkt standardowy $x_1 \in [a,b]$, taki że $f(x_1) \geqslant f(x_0)$. Niech $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie takim podciągiem ciągu liczb naturalnych, że

$$\widehat{a} + \frac{\widehat{m}_k}{\widehat{n}_k}(\widehat{b} - \widehat{a}) \in mon\; x_1 \quad \text{i} \quad \widehat{m}_k \leqslant \widehat{n}_k.$$

Wtedy

$$f_p(\widehat{x_1}) \simeq f_p(\widehat{a} + \frac{\widehat{m}_k}{\widehat{n}_k}(\widehat{b} - \widehat{a})) = f_p({}^*(a + \frac{m_k}{n_k}(b-a))) =$$

$$= {}^*\Big(f(a + \frac{m_k}{n_k}(b-a))\Big) \leqslant {}^*(f(x_{n_k}) = f_p(\widehat{x}_{n_k}) \simeq f_p(\widehat{x}_0),$$

co jest sprzeczne z założeniem o x_1.∎

Własność 17. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $c \in (a,b)$. Niech dalej $f_p(\widehat{x}_n) > \widehat{0}\ \forall\, \widehat{x}_n \in mon\, c$. Wówczas istnieje liczba naturalna n, taka że $f(x) > 0\ \forall\, x \in \left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]$.*

Dowód. W przeciwnym przypadku istniałby ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $\mid x_n - c \mid < 1/n$, ale $f(x_n) \leqslant 0$. Dostalibyśmy stąd $\widehat{x}_n \in mon\, c$ i $f_p(\widehat{x}_n) \leqslant \widehat{0}$, co jest sprzeczne z założeniem.∎

Z powyższej własności i definicji ciągłości dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 1. *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in (a,b)$ i $f(c) > 0$, to $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]$ i pewnego $n \in \mathbb{N}$.*∎

2. Pochodna funkcji jednej zmiennej

Twierdzenie 18. *Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ ma pochodną w punkcie $x_0 \in A$, takim że $mon\, x_0 \subset A_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich nieskończenie małych η różnych od pseudozera*

$$\frac{f_p(\widehat{x}_0 + \eta) - f_p(\widehat{x}_0)}{\eta} \simeq \widehat{g}.$$

Zachodzi ponadto wzór $f'(x_0) = g$.

Dowód. $\Rightarrow$ Zakładamy, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Przyjmijmy

$$\Phi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dla $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z założenia Φ ma granicę w zerze równą $f'(x_0)$, wobec czego

$$\Phi_p(\eta) \simeq {}^*f'(x_0)$$

dla każdej nieskończenie małej η różnej od pseudozera. Ponieważ

$$\Phi_p(\eta) = \frac{f_p(\widehat{x}_0 + \eta) - f_p(\widehat{x}_0)}{\eta},$$

więc dostajemy pierwszą część twierdzenia.

$\Leftarrow$ Niech teraz
$$\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\simeq\widehat{g}$$
dla pewnego $g\in\mathbb{R}$ i odpowiednich nieskończenie małych η. Przyjmijmy, jak poprzednio,
$$\Phi(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
dla $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Jest to dobrze określona funkcja rzeczywista, a ponieważ
$$\Phi_p(\widehat{h}_n)=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\widehat{h}_n)-f_p(\widehat{x}_0)}{\widehat{h}_n},$$
więc z założenia wynika, że Φ ma granicę w zerze równą g, czyli funkcja f ma pochodną w x_0 równą g, tzn. $f'(x_0)=g$.∎

Twierdzenie 19. *Jeśli f ma pochodną w pewnym punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. Mamy:
$$\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\simeq{}^*f'(x_0)$$
dla nieskończenie małych η różnych od pseudozera. Dostajemy stąd
$$f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)\simeq\eta\cdot{}^*f'(x_0)\simeq 0.$$
Teza wynika z przechodniości relacji nieskończonej bliskości.∎

Wykorzystując wcześniejsze oznaczenie $\{a\}_0=\{\widehat{x}_n\in\mathbb{K}\ :\ \widehat{x}_n-\widehat{a}$ jest pseudozerem$\}$ warunek niestandardowy istnienia pochodnej można zapisać w postaci:
$$\frac{f_p(\widehat{y}_n)-f_p(\widehat{x}_0)}{\widehat{y}_n-\widehat{x}_0}\simeq{}^*f'(x_0)\quad\forall\,\widehat{y}_n\in mon\,x_0\setminus\{x_0\}_0,$$
co wynika natychmiast z definicji zbioru $mon\ x$.

Twierdzenie 20. *Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to różniczkowalna jest ich suma, różnica, iloczyn oraz, przy dodatkowym założeniu, że $g(x_0)\neq 0$, iloraz. Zachodzą także wzory:*
$$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0),$$
$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Dowód. Niech η będzie nieskończenie małą różną od pseudozera. Mamy:

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\pm g)_p(\widehat{x}_0+\eta)-(f\pm g)_p(\widehat{x}_0)}{\eta}=\\
&=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)\pm g_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)\mp g_p(\widehat{x}_0)}{\eta}=\\
&=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\pm\frac{g_p(\widehat{x}_0+\eta)-g_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\simeq\\
&\simeq {}^*f'(x_0)\pm{}^*g'(x_0)={}^*(f'(x_0)\pm g'(x_0))
\end{aligned}$$

w przypadku sumy i różnicy,

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\cdot g)_p(\widehat{x}_0+\eta)-(f\cdot g)_p(\widehat{x}_0)}{\eta}=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)\cdot g_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)\cdot g_p(\widehat{x}_0)}{\eta}=\\
&=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\cdot g_p(\widehat{x}_0+\eta)+\frac{g_p(\widehat{x}_0+\eta)-g_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\cdot f_p(\widehat{x}_0)\simeq\\
&\simeq {}^*f'(x_0)\cdot g_p(\widehat{x}_0)+f_p(\widehat{x}_0)\cdot{}^*g'(x_0)
\end{aligned}$$

w przypadku iloczynu oraz

$$\begin{aligned}
&\frac{(f/g)_p(\widehat{x}_0+\eta)-(f/g)_p(\widehat{x}_0)}{\eta}=\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)\cdot g_p(\widehat{x}_0)-f_p(\widehat{x}_0)\cdot g_p(\widehat{x}_0+\eta)}{\eta\cdot g_p(\widehat{x}_0+\eta)\cdot g_p(\widehat{x}_0)}=\\
&=\frac{1}{g_p(\widehat{x}_0+\eta)\cdot g_p(\widehat{x}_0)}\cdot\left[\frac{f_p(\widehat{x}_0+\eta)-f_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\cdot g_p(\widehat{x}_0)-\right.\\
&\left.-f_p(\widehat{x}_0)\cdot\frac{g_p(\widehat{x}_0+\eta)-g_p(\widehat{x}_0)}{\eta}\right]\simeq\\
&\simeq\frac{{}^*f'(x_0)\cdot g_p(\widehat{x}_0)-f_p(\widehat{x}_0)\cdot{}^*g'(x_0)}{(g_p(\widehat{x}_0))^2}
\end{aligned}$$

w przypadku ilorazu.∎

Przejdziemy teraz do twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej. W dowodzie tego twierdzenia będzie wykorzystana poniższa własność przysługująca zbiorom otwartym w metryce naturalnej.

Własność 21. *Niech A będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$ z metryką naturalną. Wówczas* $\forall x\in A\quad mon\, x\subset A_p$.

Dowód. Ustalmy dowolny $x\in A$. Istnieje $r>0$, takie że $K(x,r)\subset A$. Załóżmy, że $\widehat{y}_n\in mon\, x$. Wówczas istnieje liczba naturalna n_0, taka że dla dowolnego $n\geqslant n_0$ $|\, y_n-x\,|<r$, czyli $\forall n\geqslant n_0\quad y_n\in A$.

Przyjmując

$$z_n = \begin{cases} x & dla \quad n < n_0, \\ y_n & dla \quad n \geqslant n_0, \end{cases}$$

otrzymamy $\widehat{y}_n = \widehat{z}_n$ i $\widehat{z}_n \in A_p$, wobec czego $\widehat{y}_n \in A_p$. ∎

Twierdzenie 22 (o pochodnej funkcji złożonej)
Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ i $f(x_0) \in (c, d)$. Jeśli funkcja $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dowód. Dowód składa się z dwóch części.

(i) Załóżmy najpierw, że $f_p(\widehat{x}_n) \neq f_p(\widehat{x}_0) \quad \forall \widehat{x}_n \in mon\ x_0 \setminus \{x_0\}_0$. Niech $\widehat{\eta}_n$ będzie dowolną nieskończenie małą różną od pseudozera. Wówczas $f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n) - f_p(\widehat{x}_0)$ nie jest pseudozerem. Gdyby było przeciwnie, to istniałby podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, taki że $f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_{n_k}) = f_p(\widehat{x}_0)$. Ponieważ $\widehat{\eta}_n$ jest różne od pseudozera i to samo jest prawdą dla dowolnego podciągu, więc $\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_{n_k} \in mon\ x_0 \setminus \{x_0\}_0$, co przeczy założeniu. Mamy:

$$\frac{(g \circ f)_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n) - (g \circ f)_p(\widehat{x}_0)}{\widehat{\eta}_n} = \frac{g_p(f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n)) - g_p(f_p(\widehat{x}_0))}{\widehat{\eta}_n} =$$

$$= \frac{\big(g_p(f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n)) - g_p(f_p(\widehat{x}_0))\big)\big(f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n) - f_p(\widehat{x}_0)\big)}{\big(f_p(\widehat{x}_0 + \widehat{\eta}_n) - f_p(\widehat{x}_0)\big)\widehat{\eta}_n} \simeq$$

$$\simeq {}^*g'(f(x_0)) \cdot {}^*f'(x_0).$$

(ii) Załóżmy teraz, że istnieje $\widehat{x}_n \in mon\ x_0 \setminus \{x_0\}_0$, taki że $f_p(\widehat{x}_n) = f_p(\widehat{x}_0)$. Liczba $\eta_1 = \widehat{x}_0 - \widehat{x}_n$ jest nieskończenie małą różną od pseudozera. Wobec tego z założonej różniczkowalności funkcji f dostajemy:

$${}^*f'(x_0) \simeq \frac{f_p(\widehat{x}_0 + \eta_1) - f_p(\widehat{x}_0)}{\eta_1} = \widehat{0}.$$

Biorąc części standardowe lewej i prawej strony otrzymujemy $f'(x_0) = 0$, więc

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0.$$

Wykażemy, że pochodna $g \circ f$ w punkcie x_0 jest też równa zeru. Z założonej różniczkowalności funkcji g dla dowolnego $\widehat{y}_n \in mon\ f(x_0) \setminus \{f(x_0)\}_0$ zachodzi:

$$\frac{g_p(\widehat{y}_n) - g_p({}^*f(x_0))}{\widehat{y}_n - {}^*f(x_0)} \simeq {}^*g'(f(x_0)).$$

Wobec tego istnieje $M > 0$, takie że

$$\left|\frac{g_p(\widehat{y}_n) - g_p(f_p(\widehat{x}_0))}{\widehat{y}_n - f_p(\widehat{x}_0)}\right| \leqslant \widehat{M} \tag{$*$}$$

dla dowolnego $\forall \widehat{y}_n \in mon\, f(x_0) \setminus \{f(x_0)\}_0$, czyli

$$|\, g_p(\widehat{y}_n) - g_p(f_p(\widehat{x}_0))\,| \leqslant \widehat{M} \cdot |\, \widehat{y}_n - f_p(\widehat{x}_0)\,| \tag{$**$}$$

dla dowolnego $\forall \widehat{y}_n \in mon\, f(x_0)$. Gdy $\widehat{y}_n \in mon\, f(x_0) \setminus \{f(x_0)\}_0$, to wynika to z $(*)$. Natomiast jeśli $\widehat{y}_n - f_p(\widehat{x}_0)$ jest pseudozerem, to na podciągu $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, takim że $y_{n_k} = f(x_0)$, lewa i prawa strona $(**)$ są równe zeru, więc nierówność jest prawdziwa. Na pozostałych wyrazach nierówność $(**)$ wynika z $(*)$.

Z ciągłości funkcji f i Własności 21 otrzymujemy:

$$f_p(mon\, x_0) \subseteq mon\, f(x_0) \subseteq (c,d)_p.$$

Jeśli $\widehat{x}_n \in mon\, x_0 \setminus \{x_0\}_0$, to $f_p(\widehat{x}_n) \in mon\, f(x_0)$. Wykorzystując poprzednią nierówność dostajemy:

$$\widehat{0} \leqslant \left|\frac{(g_p \circ f_p)(\widehat{x}_n) - (g_p \circ f_p)(\widehat{x}_0)}{\widehat{x}_n - \widehat{x}_0}\right| = \left|\frac{g_p(f_p(\widehat{x}_n)) - g_p(f_p(\widehat{x}_0))}{\widehat{x}_n - \widehat{x}_0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{M} \cdot \left|\frac{f_p(\widehat{x}_n) - f_p(\widehat{x}_0)}{\widehat{x}_n - \widehat{x}_0}\right| \simeq \widehat{0},$$

czyli $(g \circ f)'(x_0) = 0$.∎

Własność 23. *Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ma maksimum (minimum) w punkcie $x_0 \in (a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_p(\widehat{x}_n) \leqslant f_p(\widehat{x}_0)$ ($f_p(\widehat{x}_n) \geqslant f_p(\widehat{x}_0)$) $\forall \widehat{x}_n \in mon\, x_0$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla maksimum; dla minimum jest analogiczny. Załóżmy, że f ma maksimum w punkcie x_0. Istnieje więc $h > 0$, takie że

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\, x - x_0\,| < h \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant f(x_0).$$

Ustalmy dowolne $\widehat{x}_n \in mon\, x_0$. Z definicji zbioru $mon\, x_0$ istnieje taka liczba naturalna n_0, że

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |\, x_n - x_0\,| < h,$$

więc także

$$\forall n \geqslant n_0 \quad f(x_n) \leqslant f(x_0).$$

Oznacza to, że $f_p(\widehat{x}_n) \leqslant f_p(\widehat{x}_0)$. Prawdziwość implikacji odwrotnej jest prostą konsekwencją Własności 17.∎

Twierdzenie 24. *Jeśli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Pokażemy tezę jedynie dla maksimum. Z założenia $f_p(\hat{x}_0+\eta) \leqslant f_p(\hat{x}_0)$ $\forall \eta \simeq \hat{0}$. Dlatego

$$\forall \eta \in mon\, 0 \setminus \{0\}_0 \quad \wedge \quad \eta < \hat{0} \qquad f'_-(\hat{x}_0) = \frac{f_p(\hat{x}_0+\eta) - f_p(\hat{x}_0)}{\eta} \geqslant \hat{0}$$

oraz

$$\forall \eta \in mon\, 0 \setminus \{0\}_0 \quad \wedge \quad \eta > \hat{0} \qquad f'_+(\hat{x}_0) = \frac{f_p(\hat{x}_0+\eta) - f_p(\hat{x}_0)}{\eta} \leqslant \hat{0}.$$

Stąd i z założonej różniczkowalności

$$\hat{0} \leqslant f'_-(\hat{x}_0) \simeq {}^*f'(x_0) \simeq f'_+(\hat{x}_0) \leqslant \hat{0},$$

czyli ${}^*f'(x_0) \simeq \hat{0}$. Biorąc części standardowe otrzymamy $f'(x_0) = 0$.■

Z Twierdzenia 24 i z twierdzenia Weierstrassa wynika poniższe twierdzenie Rolle'a.

Twierdzenie 25 (Rolle'a)
Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna w każdym punkcie przedziału (a,b) i $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$, taki że $f'(c) = 0$.■

Literatura

[1] J. Błahut, *Wybrane zagadnienia analizy (ujęcie niestandardowe)*, Skrypt Pol. Śl. 1405, Gliwice 1988.

[2] L. Chwistek, *Granice nauki*, Książnica Atlas, Lwów 1935.

[3] D. Laugwitz, *The Theory of Infinitesimals. An Introduction to Nonstandard Analysis*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1980.

[4] D. Słota, *Model niestandardowy analizy oparty na definicjach Chwistka i Laugwitza* (w niniejszym Zeszycie).

Recenzent: Prof. dr hab. Piotr Antosik

Wpłynęło do redakcji 15.10.1993 r.

Abstract

In the paper, non-standard characterizations of basic notions of differential calculus are given in the model constructed by Chwistek and Laugwitz. In particular, limit of a numerical sequences, uniform continuity and differentiability of functions are described in the non-standard model of Chwistek and Laugwitz. Main properties of these notions as well as the notions of limit and continuity of functions introduced in [4] are derived. The non-standard proofs of the Weierstrass theorem on continuous functions on closed intervals and the chain rule for derivatives of composed functions are of special interest.